Pewne zagadnienia geometrii euklidesowej

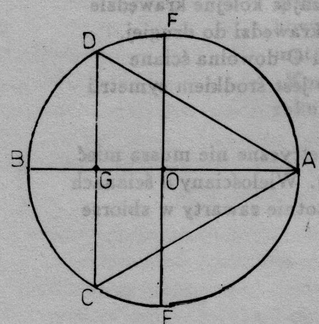
Erwin KASPAREK, Katowice

W pracy przedstawimy zagadnienia geometrii euklidesowej, których rozwiązań będziemy szukać w jej nadgeometriach, mianowicie: w geometrii afinicznej i rzutowej. Taka metoda postępowania jest często stosowana w tych zagadnieniach geometrii euklidesowej, których rozwiązania nie wymagają użycia wyłącznie pojęć tej geometrii.

Zagadnienie 1. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w daną elipsę wybrać te, które mają największe pole.

Zauważmy, że analogiczne zagadnienie w przypadku, gdy elipsa jest okręgiem, można dość łatwo rozwiązać, a rozwiązaniami są trójkąty równoboczne wpisane w ten okrąg. Ten fakt wykorzystamy w rozwiązaniu naszego problemu zauważając, że elipsa i okrąg są afinicznie równoważne. Ściślej mówiąc, jeżeli przez E oznaczymy elipsę a przez K wybrany okrąg, to istnieje przekształcenie afiniczne f płaszczyzny na siebie, w którym obrazem okręgu K jest elipsa E (przekształceń takich jest wiele).

Ustalmy jedno takie przekształcenie. W tym przekształceniu każdemu trójkątowi T_K wpisanemu w okrąg K odpowiada trójkąt T_E wpisany w elipsę E i odwrotnie. Zależność między polami S_K i S_E wyraża się wzorem $S_E = |\det f| S_K$, gdzie $|\det f|$ jest bezwzględną wartością wyznacznika przekształcenia f.

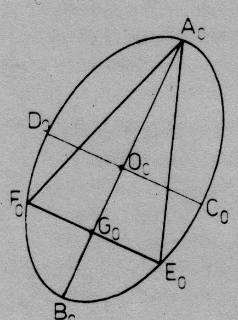


Rys. 1

Wynika stąd, że te trójkąty wpisane w elipsę E mają największe pole, które są obrazami, poprzez przekształcenie f, trójkątów równobocznych wpisanych w okrąg K. Z geometrycznego punktu widzenia odpowiedź taka nie jest zbyt zadawalająca, gdyż taki trójkąt chcielibyśmy umieć skonstruować.

Podamy taką konstrukcję. W tym celu skorzystamy z dość oczywistego faktu, mianowicie: trójkąt wpisany w okrąg jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego środkowe przecinają się w punkcie będącym środkiem tego okręgu. Wynika stąd prosta konstrukcja takiego trójkąta (rys. 1).

Prowadzimy dowolną średnicę AB okręgu. W środku G odcinka OB wystawiamy prostopadłą do AB, która przecina okrąg w punktach C i D. Wtedy trójkąt ACD jest równoboczny.

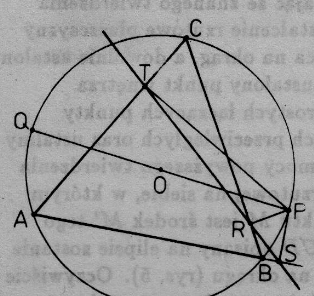


Rys. 2

Jeżeli trójkąt T_E wpisany w elipsę jest obrazem, poprzez f, trójkąta równobocznego T_K wpisanego w okrąg, to środkowe trójkąta T_E przecinają się w środku elipsy, gdyż punkt przecięcia się środkowych trójkąta i środek figury są niezmiennikami przekształceń afinicznych. Ponadto, średnice prostopadłe AB i EF okręgu są przekształcone w parę średnic sprzężonych elipsy. Konstrukcja trójkąta T_E jest teraz oczywista (rys. 2).

Prowadzimy dowolną średnicę A_0B_0 elipsy i do niej konstruujemy średnicę sprzężoną C_0D_0. Przez środek G_0 odcinka O_0B_0 prowadzimy prostą równoległą do średnicy C_0D_0, która przecina elipsę w punktach E_0 *i* F_0.

Trójkąt $A_0E_0F_0$ ma maksymalne pole spośród wszystkich trójkątów wpisanych w elipsę. Z powyższych rozważań wnioskujemy, że wszystkie trójkąty wpisane w elipsę, których środkowe przecinają się w środku elipsy, mają równe pola. Zauważmy jeszcze, że jeżeli w wierzchołkach A, C, D trójkąta poprowadzimy styczne do okręgu, to utworzą one trójkąt równoboczny o najmniejszym polu pośród wszystkich trójkątów opisanych na tym okręgu. Zatem, styczne do elipsy w punktach A_0, E_0, F_0 utworzą trójkąt o najmniejszym polu spośród wszystkich trójkątów opisanych na tej elipsie.



Rys. 3

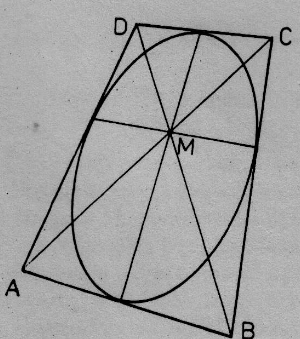
Zagadnienie 2. Dany jest trójkąt wpisany w okrąg. Udowodnić, że spodki prostopadłych opuszczonych z dowolnego punktu P tego okręgu na boki trójkąta leżą na jednej prostej (rys. 3).

Literami A, B, C oznaczmy wierzchołki trójkąta wpisanego w okrąg o środku w punkcie O. Spodki prostopadłych opuszczonych na boki trójkąta oznaczmy literami T, R, S. Rozpatrzmy trzy przypadki:

(i) Punkt P okręgu pokrywa się z którymkolwiek wierzchołkiem trójkąta. Wtedy prostą zawierającą spodki prostopadłych jest prosta zawierająca wysokość trójkąta opuszczoną z punktu P.
(ii) Punkt P okręgu jest symetryczny względem środka O okręgu do jednego z wierzchołków trójkąta, np. A. Wtedy kąty ABP i ACP są proste, więc interesującą nas prostą jest prosta zawierająca bok BC trójkąta.
(iii) Punkt P okręgu nie jest identyczny z żadnym wierzchołkiem trójkąta i nie jest symetryczny względem środka O okręgu do żadnego z wierzchołków trójkąta.

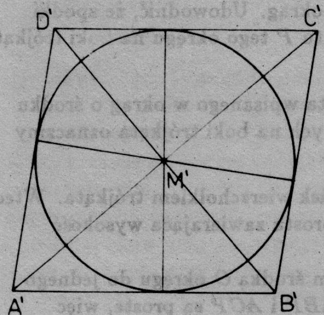
Ten przypadek rozwiążemy środkami geometrii rzutowej, rozszerzając płaszczyznę euklidesową do płaszczyzny rzutowej. Przez Q oznaczmy punkt symetryczny do punktu P względem środka O okręgu. Czwórki punktów $ABCP$ i $ABCQ$ są wtedy reperami płaszczyzny rzutowej, tzn. są wierzchołkami czworokątów zupełnych. Symbolami Λ_P i Λ_Q oznaczmy pęki prostych odpowiednio o wierzchołkach w punktach P i Q. Z podstawowego twierdzenia o tranzytywności na płaszczyźnie rzutowej wiadomo, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe f płaszczyzny rzutowej na siebie takie, że $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$, $f(P) = Q$. To przekształcenie indukuje przekształcenie rzutowe F pęku Λ_P na pęk Λ_Q w sposób następujący: jeśli $l \in \Lambda_P$, to $F(l) = k \in \Lambda_Q$, gdzie k jest prostą, która jest obrazem prostej l w przekształceniu rzutowym f. Ponieważ A, B, C są punktami stałymi przekształcenia f, zatem $F(\mathrm{pr}\, PA) = \mathrm{pr}\, QA$, $F(\mathrm{pr}\, PB) = \mathrm{pr}\, QB$, $F(\mathrm{pr}\, PC) = \mathrm{pr}\, QC$, gdzie symbol $\mathrm{pr}\, XY$ oznacza prostą przechodzącą przez punkty X i Y. Proste $\mathrm{pr}\, PA$, $\mathrm{pr}\, PB$, $\mathrm{pr}\, PC$ są prostopadłe do swoich obrazów w przekształceniu F, tzn. są prostopadłe odpowiednio do prostych $\mathrm{pr}\, QA$, $\mathrm{pr}\, QB$, $\mathrm{pr}\, QC$. Punkty P, Q są punktami właściwymi (euklidesowymi) na rozszerzonej płaszczyźnie rzutowej, a każde przekształcenie g pęku w pęk, które prostej pęku Λ_P przyporządkowuje prostą pęku Λ_Q do niej prostopadłą, jest rzutowe. Biorąc pod uwagę fakt, iż przekształcenie rzutowe pęku prostych w pęk prostych jest jednoznacznie wyznaczone przez trzy różne proste i ich obrazy, wnioskujemy, że przekształcenia g i F są identyczne. Oznacza to, że F jest przekształceniem, które każdej prostej pęku Λ_P przyporządkowuje prostą pęku Λ_Q do niej prostopadłą. Obecnie wyznaczymy obrazy, w przekształceniu f, spodków prostopadłych opuszczonych z punktu P na boki trójkąta. Niech R będzie spodkiem prostopadłej opuszczonej z punktu P na bok BC trójkąta (rys. 3). Obrazem tej prostopadłej w przekształceniu F jest prosta pęku Λ_Q prostopadła do niej, a więc prosta przechodząca przez punkt Q i równoległa do boku BC. Z definicji przekształcenia F wynika, że obraz punktu R poprzez f leży na prostej przechodzącej przez Q i równoległej do boku BC. Z drugiej strony punkt R leży na prostej $\mathrm{pr}\, BC$, a więc w przekształceniu f jego obraz będzie leżał na tej samej prostej, gdyż B i C są punktami stałymi f. Wnioskujemy zatem, że obrazem punktu R w przekształceniu f jest punkt niewłaściwy, a mianowicie kierunek $[\mathrm{pr}\, BC]$ prostej $\mathrm{pr}\, BC$.

Z pozostałymi spodkami postępujemy analogicznie. A więc obrazy spodków prostopadłych opuszczonych z punktu P na boki trójkąta w przekształceniu f są współliniowe (bo leżą na prostej niewłaściwej). Ponieważ f zachowuje współliniowość punktów, zatem same spodki prostopadłych są też współliniowe.



Rys. 4

Zagadnienie 3. Udowodnić, że w czworokącie opisanym na elipsie (a więc i na okręgu) punkt przecięcia jego przekątnych i punkt przecięcia prostych łączących punkty styczności elipsy z przeciwległymi bokami czworokąta są identyczne (rys. 4).



Rys. 5

Zagadnienie to można łatwo rozwiązać, korzystając ze znanego twierdzenia geometrii rzutowej, mianowicie: istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny rzutowej na siebie, które daną elipsę przekształca na okrąg, a dowolnie ustalony punkt wnętrza elipsy przekształca na dowolnie ustalony punkt wnętrza okręgu. Oznaczmy przez M punkt przecięcia prostych łączących punkty styczności elipsy z czworokątem leżące na bokach przeciwległych oraz ustalmy jakikolwiek okrąg o środku w punkcie M'. Na mocy powyższego twierdzenia istnieje przekształcenie rzutowe f płaszczyzny rzutowej na siebie, w którym obrazem elipsy jest dany okrąg, a obrazem punktu M jest środek M' tego okręgu. W tym przekształceniu czworokąt $ABCD$ opisany na elipsie zostanie przekształcony w czworokąt $A'B'C'D'$ opisany na okręgu (rys. 5). Oczywiście czworokąt $A'B'C'D'$ jest równoległobokiem, gdyż proste łączące punkty styczności tego czworokąta z okręgiem w niego wpisanym są średnicami tego okręgu, a zatem jest on rombem albo kwadratem, w którym punkt przecięcia przekątnych i punkt przecięcia prostych łączących ich punkty styczności z okręgiem w niego wpisanym są identyczne. Ponieważ przekątne czworokąta $ABCD$ przechodzą przez f w przekątne czworokąta $A'B'C'D'$, zatem nasze twierdzenie zostało udowodnione.