Wielościany i środki symetrii

Danuta CIESIELSKA, Krzysztof CIESIELSKI, Kraków

W dyskusji po jednym z referatów na Szkole Matematyki Poglądowej poświęconej izomorfizmom padło pytanie, czy z tego, że w wielościanie wypukłym wszystkie ściany mają środki symetrii, wynika, iż wielościan ma środek symetrii. Jedni uważali, że twierdzenie takie wydaje się fałszywe, inni, że wprost przeciwnie, nikomu jednak nie udało się na poczekaniu rozstrzygnąć problemu. Poniżej wykażemy, że odpowiedź na postawione pytanie jest pozytywna. Twierdzenie wydawać się może zaskakującym, gdyż z własności dwuwymiarowych ścian bryły trójwymiarowej wynika własność „przestrzenna". A na pierwszy rzut oka można by sądzić, że ściany wielościanu mogą być ustawiane stosunkowo dowolnie... Dowód przeprowadzimy w kilku punktach.

1. Każda krawędź wielościanu jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian. Weźmy dowolną krawędź K_1. Oznaczmy jedną ze ścian, której bokiem jest K_1, przez S. Ściana ta ma środek symetrii; istnieje więc na niej krawędź K_2 równa i równoległa do K_1 (obraz K_1 w symetrii środkowej na ścianie S). Krawędź K_2 jest także bokiem drugiej ściany. Postępując analogicznie, konstruujemy krawędź K_3 równoległą do K_2 i dalej kolejne krawędzie – w ten sposób otrzymujemy ich ciąg. Liczba krawędzi jest skończona, więc w pewnym momencie musimy dojść do krawędzi już rozważanej ($K_i = K_{n+1}$, przy czym $K_i \neq K_l$ dla $l \neq j$, oraz $j, l \leq n$). Ale i musi być równe 1, w przeciwnym przypadku K_{i-1}, K_{i+1} i K_{n+1} byłyby trzema różnymi, równoległymi krawędziami dobranymi do K_i. Skonstruowaliśmy ciąg równoległych krawędzi $K_1, \ldots, K_n$; proste przez nie wyznaczone ograniczają nieograniczony graniastosłup G (wypukły), zawierający w sobie badany wielościan. Ponadto w każdej ścianie graniastosłupa zawiera się któraś ze ścian wielościanu (K_i oraz K_{i+1} wyznaczają zarówno ścianę wielościanu, jak i graniastosłupa).

2. Weźmy dowolną krawędź M_1 ściany S, różną od K_1 i K_2. Istnieje w ścianie S krawędź równoległa do M_1; tak, jak w punkcie 1. tworzymy ciąg równoległych odcinków $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Wszystkie one zawierają się w graniastosłupie G. Wśród „pasów przestrzennych" zawartych między płaszczyzną daną przez ścianę S i płaszczyzny równoległe do S, zawierające kolejne spośród M_i, istnieje pas „największy"; niech będzie on dany przez krawędź M_k. Pas taki jednak zawiera w sobie graniastosłup nieograniczony dany przez $M_1, \ldots, M_p$, zatem zawiera też badany wielościan. W szczególności więc należą do tego pasa wszystkie odcinki $K_1, \ldots, K_n$. Zbierając te fakty razem otrzymujemy, że M_k musi zawierać się w jednej ze ścian graniastosłupa G, czyli w wielościanie istnieje ściana S' równoległa do S. W ścianie S' muszą wobec tego zawierać się dwa odcinki równe i równoległe do M_1.

3. Pokażemy, że ściana S jest izometryczna z S'. Rozważmy kolejne boki wielokąta S, poczynając od K_1; w pewnym momencie dojdziemy do K_2, równoległego do K_1. Wielokąt S jest środkowo symetryczny, więc bok następujący po K_2 jest równoległy do boku następującego do K_1 itd. Tak samo będzie dla ściany S'. Na mocy punktu **2.** krawędzie S są parami równe i równoległe do krawędzi S'; zauważmy, że kolejność ich występowania w obu ścianach jest taka sama (a stąd już wynika, że wielokąty te są izometryczne). Istotnie; gdyby np. po krawędzi K_1' ($K_1' \parallel K_1$) ściany S' występowała krawędź M nierównoległa do krawędzi L_1 (następującej po K_1), to – na mocy wypukłości S – kąt wewnętrzny między K_1' i M byłby mniejszy niż kąt wewnętrzny między K_1 i L_1; wówczas w pewnym momencie w wielokącie S' wystąpiłby kąt wewnętrzny większy niż 180° (między pierwszą krawędzią równoległą do L_1 i krawędzią ją poprzedzającą). Jest to jednak niemożliwe, bo S' jest wielokątem wypukłym.

4. Ściany S i S' są równoległe i izometryczne, przy czym krawędzi K_1 odpowiada K_1', zaś krawędzi K_2 (równoległej do K_1) K_2'. Krawędzie K_1 i K_2 wyznaczają równoległobok R (zawarty w S), izometryczny z równoległobokiem R', wyznaczonym przez K_1' i K_2', zawartym w S'. Równoległoboki te leżą w równoległych do siebie płaszczyznach, są zatem ścianami równoległościanu o środku symetrii O, gdzie O jest środkiem odcinka PP' (przez P i P' oznaczamy środki symetrii ścian S i S'). Na mocy analogicznego rozumowania, przeprowadzonego dla wszystkich par krawędzi, dochodzimy do wniosku, że S' jest obrazem S w symetrii środkowej względem punktu O, gdyż O jest jednoznacznie wyznaczony przez P i P'.

5. Rozważmy krawędź K_2 ściany S i krawędź K_{j+1} ściany S', która jest obrazem K_2 w symetrii środkowej względem O. Punkt O jest punktem przecięcia odpowiednio dobranych odcinków łączących końce K_2 i K_{j+1}, jak również par odcinków, analogicznie dobranych do innych krawędzi S i ich obrazów w symetrii względem O. Tak, jak ściana S dana przez K_1 i K_2 jest środkowo symetryczna z S', daną przez K_j i K_{j+1}, tak ściana S_1, dana przez K_2 i K_3, jest środkowo symetryczna z S_1', daną przez K_{j+1} i K_{j+2}. W obu wypadkach jednak K_{j+1} jest obrazem K_2, więc O jest również środkiem symetrii, w której S_1 przechodzi na S_1'. Obrazem odcinka K_3 w tej symetrii jest K_{j+2}; rozumując tak dalej, pokazujemy, że w symetrii względem O kolejne ściany wyznaczone przez krawędzie równoległe do K_1 przechodzą na ściany wielościanu. Z poprzednich punktów wynika, że dla każdej ściany istnieje ściana będąca jej obrazem w pewnej symetrii środkowej; rozważając kolejne krawędzie i wyznaczone przez nie kierunki, przechodząc od jednej krawędzi do drugiej, dochodzimy do wniosku, że w symetrii względem punktu O dowolna ściana wielościanu przechodzi na inną ścianę. Oznacza to, że O jest środkiem symetrii wielościanu, co kończy dowód.

Na zakończenie zauważmy, że wielościany środkowo symetryczne nie muszą mieć ścian środkowo symetrycznych (np. ośmiościan foremny). Wielościany o ścianach posiadających badaną własność stanowią zatem zbiór istotnie zawarty w zbiorze wielościanów środkowo symetrycznych.