Problemy z niewymiernością – stworzenie liczb rzeczywistych

Witold WIĘSŁAW, Wrocław

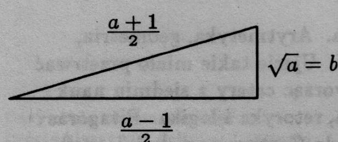
Motto: (i) *Historyczny prowincjonalizm oznacza ignorowanie stałego przepływu i oddziaływania osiągnięć matematycznych i nauki na przestrzeni dziesięcioleci i stuleci.*

(ii) *Naukowy prowincjonalizm oznacza ignorowanie wzajemnych relacji pomiędzy pracą matematyczną i wynikami wchodzącymi w dziedziny naukowe i inżynierskie.*

(iii) *Matematyczny prowincjonalizm oznacza ignorowanie większości podstawowych osiągnięć matematyki poza dziedziną szczególnej specjalności matematycznej.*

J. W. Gray (BAMS 25 (N.S) (1991). No 1, 131–140).

1. Początki kłopotów z niewymiernością.



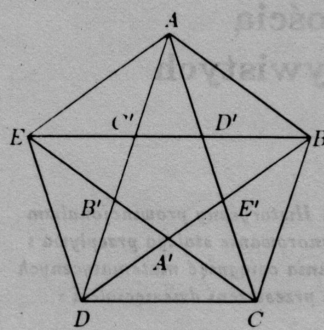
Rys. 1

Lista matematyków Eudemosa z Rodos (334 p.n.e.) wymienia wyraźnie Pitagorasa z Samos (580–501 p.n.e.) jako odkrywcę liczb niewymiernych. Wiąże się to z jego słynnym twierdzeniem. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że istnieje liczba b, której kwadrat jest równy a (rys. 1). We współczesnej notacji oznacza to, że $a = b^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$. To, że taka liczba nie musi być wymierna, okazuje się już przy odpowiednim wyborze a. Np. dla $a = 2$ udowodnił to precyzyjnie Euklides (ok. 300 p.n.e.).

Natomiast pojęcie niewspółmierności pojawiło się w „Dialogach" Platona – „Theatetus" (Teajtet) (str. 147 B). Dialog został napisany w roku 368/67 p.n.e., wkrótce po śmierci matematyka Theatetosa, po bitwie, w której został ranny. Fikcyjną datą dialogu był rok 399 p.n.e., tzn. rok śmierci Sokratesa. W pierwszej części dialogu stary matematyk, Theodorus z Cyreny, pokazany jest w czasie wystąpienia przed grupą młodych ludzi, wśród których był młody, wówczas 17-letni, Theatetus. Dowodzi im niewymierności liczb $\sqrt{n}$ dla $n = 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17$. Mimo, że dialog jest zupełnie fikcyjny, wydaje się, że Platon poświęcił go pamięci przyjaciela, który akurat zmarł przedwcześnie i miał istotny wkład w rozwój teorii odcinków niewspółmiernych i pojęcia niewymierności. Należy stąd wnosić, że to, czego dowodzi Theodorus we wstępie, było znane, gdy Theatetus był 17-letnim chłopcem.

Stary Ateńczyk w „Prawach" Platona mówi nam, że dowiedział się o istnieniu odcinków niewspółmiernych pod koniec swego życia i że jest wstydem dla Greków, że wciąż ignorują ten fakt. Platon identyfikuje się ze Starym Ateńczykiem. Theodorus urodził się ok. 470 (460) p.n.e. Z dialogu Platona wynika, że niewymierność $\sqrt{2}$ udowodnił ktoś inny, nie Theatetus.

Hippasus z Metapontu (V w. p.n.e.) zainteresowany był dwunastościanem foremnym („*sfera składająca się z 12 pięciokątów foremnych*"). Dwunastościan foremny występuje w południowych Włoszech jako kryształ pirytu (FeS_2). Dwunastościan był bardzo wcześnie używany we Włoszech jako kostka do gry. Wydaje się, że dwunastościan miał znaczenie religijne w Etrurii.



Rys. 2

Nie wiadomo dokładnie, kiedy żył Hippasus. Wiadomo jedynie, że brał udział w rewolcie politycznej w południowych Włoszech w 445 p.n.e. Hippasusa można uważać za odkrywcę niewspółmierności. Udowodnił on mianowicie, że przekątna pięciokąta foremnego jest niewspółmierna z jego bokiem, a ich stosunek wyraża się za pomocą ułamka łańcuchowego:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} \text{ – „liczba złota”.}$$

Istotnie, rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ (rys. 2). Ponieważ trójkąty AED i $BE'C$ mają odpowiednie boki równoległe, więc są podobne. Zatem

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BE'}.$$

Ale $BE' = BD - DE' = BD - BC$, bo $DE' = BC = AE$. Stąd otrzymujemy, że

przekątna : bok = bok : (przekątna – bok).

Niech a_0 oznacza przekątną, a_1 – bok, $a_2 = a_0 - a_1$, tzn. $a_0 : a_1 = a_1 : a_2$. Niech $a_3 = a_1 - a_2$ i ogólnie: $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. Otrzymujemy $a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \ldots = a_n : a_{n+1} = \ldots$, tzn. dostajemy algorytm Euklidesa dla a_0 i a_1:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2$$
$$a_1 = 1 \cdot a_2 + a_3$$
$$a_2 = 1 \cdot a_3 + a_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jak widać, ciąg ten nie urywa się, tzn. odcinki a_0 i a_1 są niewspółmierne. Ponadto

$$\frac{a_0}{a_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pitagorejska koncepcja matematyki była szeroka. Arytmetyka, geometria, astronomia i muzyka to były działy matematyki. Ujęcie takie miało przetrwać stulecia, aż do średniowiecznego quadrivium, tworząc cztery z siedmiu nauk wyzwolonych. Pozostałę trzy to była gramatyka, retoryka i logika. Pitagoras w połowie życia emigrował z rodzinnego Samos do Crotony w południowych Włoszech. Pitagorejczycy w V w.p.n.e. doszli do krytycznego punktu w rozwoju pojęcia liczby. Zamierzali dowieść, że jeżeli a, b, c oraz a', b', c' są długościami boków trójkątów podobnych, to

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

W IV w.p.n.e. Pitagorejczycy dowiedli, że jeżeli liczby wyrażające długości boków są wymierne, to tak jest. Zatem przyjęto, że jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy długościami odcinków na linii prostej i (dodatnimi) liczbami wymiernymi. Okazało się jednak, że istnieją liczby niewymierne. Pitagorejczycy udowodnili, że przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem, tzn. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Byłoby interesującym dowiedzieć się kto pierwszy tego dowiódł. Zapewne nigdy się już tego nie dowiemy. Jedno jest pewne: Pitagoras pod koniec V w.p.n.e. wiedział, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Z wielką pomysłowością aproksymowano $\sqrt{2}$ za pomocą kolejnych rozwiązań równań $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Arystoteles (ok. 350 r.p.n.e.) wiedząc, że równanie $p^2 = 2q^2$ nie ma rozwiązań $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, rozpatrywał równanie $p^2 - 2q^2 = 1$, tzn.

$$\frac{p^2}{q^2} - 2 = \frac{1}{q^2}.$$

Teon ze Smyrny (ok. 50 n.e.) skonstruował dwa ciągi p_n i q_n aproksymujące $\sqrt{2}$, kładąc

$$p_0 = 1, \ q_0 = 1, \ p_{n+1} = p_n + 2q_n, \ q_{n+1} = p_n + q_n.$$

Wtedy

$$p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n-1}.$$

W podobny sposób pojawiła się *„złota liczba"* φ:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_{n+1} = p_n + p_{n-1}, \quad q_n = p_n,$$

skąd

$$p_n^2 - p_n q_n - q_n^2 = (-1)^{n-1}.$$

Liczby $\varphi_n = \frac{p_n}{q_n}$ spełniają równanie

$$\varphi_n^2 = \varphi_n + 1 \pm \frac{1}{q_n^2},$$

skąd wynika już, że $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Powróćmy jednak do problemu niewymierności.

Były możliwe dwie drogi wyboru. Wybór polegał na podjęciu decyzji, że niektóre długości nie odpowiadają żadnym liczbom, albo też przyjęciu, że $\sqrt{2}$ i inne dodatnie niewymierności są liczbami. Dokonując drugiego wyboru geometrzy IV w.p.n.e. postawili kamień milowy w historii myśli ludzkiej. *„Wielkie kontinuum"* analizy, zbiór liczb rzeczywistych, było w zasięgu ręki. Nowe wielkości, dodatnie liczby niewymierne dołączone zostały do zbioru dodatnich liczb wymiernych, tworząc nowy zbiór liczb lub wielkości, mający tę dodatkową własność, że zwykłe operacje na tych wielkościach: dodawanie, mnożenie i dzielenie nie wyprowadzają poza ten zbiór, podobnie, jak to miało miejsce dla liczb wymiernych.

Zeno sformułował cztery paradoksy nieskończoności, między innymi: *nie można osiągnąć końca toru wyścigowego, bo najpierw trzeba przebyć jego połowę, potem znów połowę przebytego odcinka itd. aż do nieskończoności. „Nie można osiągnąć nieskończenie wielu punktów w skończonym czasie"*. Zatem nigdy nie osiągnie się końca toru wyścigowego.

Wszystko to wskazywało na to, że matematykom potrzebne były nowe podstawy. Współczesny Platonowi Eudoksos zbudował teorię proporcji (stosunków), dającą się zastosować do dowolnych wielkości. Stosunek P/Q jest taki sam, jak X/Y:

$$P/Q = X/Y \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}\ (mX \gtreqless nY \Leftrightarrow mP \gtreqless nQ).$$

Jeżeli stosunki P/Q i X/Y są równe, to P, Q, X, Y nazywamy *proporcjonalnymi*. Teorię tę rozwinął Euklides w V Księdze „Elementów". Księga VI zawiera zastosowania do figur podobnych. Teoria Eudoksosa potwierdzała metodę wyczerpywania i uzupełniała wyniki Pitagorejczyków o figurach podobnych. Jak zobaczymy później, w definicji Eudoksosa tkwiło *implicite* pojęcie przekroju Dedekinda: dwa stosunki P/Q i X/Y są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory liczb wymiernych, które je oszacowują z góry (z dołu) są równe.

2. Wieki średnie.

W okresie 1800 lat pomiędzy Euklidesem a Michaelem Stifelem (1485–1567) w nauce o liczbach niewymiernych nie nastąpił żaden istotny postęp. Stifel był pierwszym matematykiem, który wprowadził *„numeris irrationalibus"* (*„Arithmetica integra"*, Nürnberg 1544). Nie był on jeszcze w stanie rozpatrywać ich jako zwykłych liczb, ale stwierdził, że takie liczby zajmują określone miejsce w uporządkowanym zbiorze liczb. Pewne próby budowania prostej liczbowej znajdujemy u Galileusza (*„Rozmowy i dowodzenia matematyczne"* (1638); str. 33). Czytamy tam:

„Salviati> Przechodzę teraz do innego rozważnia. Ponieważ linja i wszelka ciągłość jest podzielona na cząstki w dalszym ciągu podzielone, to nie można przeczyć wnioskowi, że linja składa się z nieskończenie wielu cząstek niepodzielnych, gdyż z jednego podziału i dalszych dzieleń bez końca wynika, że cząstek jest nieskończenie wiele, bo inaczej dzielenie musiałoby mieć swój koniec; a skoro wielkość cząstek jest nieskończona, a nie skończona, więc nieskończenie wiele skończonych wielkości tworzy razem wielkość nieskończoną i tak dochodzimy do ciągłości, złożonej z nieskończenie wielu cząstek niepodzielnych".

Koncepcje te znajdują już klarowne definicje u Newtona („*Arithmetica universalis*", wyd. II, London 1722, str. 4). Czytamy:

„Przez liczbę rozumiemy nie tyle zbiór jedynek, ile oderwany [abstrakcyjny] stosunek dowolnej wielkości do innej wielkości tego samego rodzaju, przyjętej przez nas za jednostkę. Liczby bywają trzech rodzajów: całkowite, ułamkowe i niewymierne [surdus]. Liczbą całkowitą jest to, co mierzy się jedynką; ułamkową – wielokrotność części jedynki; liczba niewymierna jest niewspółmierna z jedynką."

Newton zrywa tu całkowicie z klasyczną tradycją, zgodnie z którą liczbami są jedynie zbiory jedynek. Równocześnie po staremu nazywa liczby niewymierne „*głuchymi*" albo „*niemymi*" (surdus). Termin ten powstał w literaturze europejskiej z przekładu terminu arabskiego, który z kolei wywodził się od greckiego $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$ (niewyrażalny, niemy, nie mający stosunku). Równocześnie w wiekach średnich był w użyciu termin „*irrationalis*". Kartezjusz, tak jak później Newton, mówił o „*liczbach niemych*" – nombres sours.

Matematycy XVII stulecia jeszcze przed Newtonem skłaniali się do równoprawnego traktowania liczb wymiernych i niewymiernych.

J. Wallis (1616–1703), który pojmował liczby jeszcze jako zbiory jedynek, mówił, że na „*głuchych*" pierwiastkach można przeprowadzać te same operacje arytmetyczne, jak na liczbach w zwykłym sensie i podkreślił, że przybliżenia takich pierwiastków można uczynić dowolnie bliskimi. Wallis nawet liczb wymiernych nie traktował jak zwykłych liczb, choć uważał je za pojęcie w pełni rzeczywiste. G. W. Leibniz (1646–1716) pisał [25]: „*mamy trojakiego rodzaju wielkości: wymierne, algebraiczne i przestępne*".

W późniejszej pracy pisał, że liczba $a = 2^{1/a}$, $a = \sqrt{2}$ jest „*intercendentna*". Ch. von Wolff (1679–1754) mówił o stosunku (ratio) dwóch wielkości, ale dla niewspółmiernych wielkości nie było to całkiem jasne. (Ch. von Wolff, „*Elementa Matheseos universae*", tom I, Halae Magdeburgicae 1717). Aby uniknąć trudności, należy tak rozszerzyć system liczbowy, aby obejmował on stosunki odcinków niewspółmiernych.

3. Wiek XVII. Dalsze przykłady liczb niewymiernych.

Newtonowskie pojęcie liczby jako stosunku rozpowszechniło się w XVIII wieku, np. w pracach L. Eulera (1707–1783) i innych.

Próby bliższego powiązania pojęcia liczby wymiernej i niewymiernej pojawiły się w II połowie XVIII w. A. G. Köstner (1719–1800) traktował liczby niewymierne jako granice liczb wymiernych.

D'Alembert (1717–1783) odrzucał istnienie liczb niewymiernych. Jak się przekonamy w dalszej części wykładu, pogląd ten miał swoich zwolenników i w późniejszym okresie. Równocześnie jednak XVIII wiek przynosi jakościowe wyniki dotyczące liczb niewymiernych. W połowie tego stulecia postawiono, chyba po raz pierwszy, pytanie dotyczące niewymierności (a być może nawet przestępności, sądząc z tytułu pracy) liczb e, π i $\log_a b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami wymiernymi, $a \neq 1$ i b nie jest wymierną potęgą a. (L. Euler,„*Introductio in Analysin Infinitorum*", Lausanne 1748, ustęp 105; J. H. Lambert (1768) por. [29]). Euler udowodnił, że e i e^2 są niewymierne. U Eulera wystąpił w „*Introductio...*" archaiczny termin „*numerus surdus*" (liczba głucha). Zwykle używał jednak terminu „*numerus irrationalis*" na określenie liczby niewymiernej.

Lambert (1728–1777) udowodnił w 1761, że π jest liczbą niewymierną, ale dowód był błędny. Natomiast w 1766 udowodnił następujące twierdzenie:

1) *Jeżeli* $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, *to* $e^x \notin \mathbb{Q}$.
W szczególności $\log x \notin \mathbb{Q}$ *dla* $x \in \mathbb{Q}_{+}^{\times}$, $x \neq 1$.
2) *Jeżeli* $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, *to* $\operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

Lambert wykorzystał w dowodzie świeżo znalezione przez Eulera rozwinięcie liczby $\frac{e-1}{2}$ na ułamek łańcuchowy:

$$\frac{e-1}{2} = [0; 1, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots],$$

skąd wyprowadził, że

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \left[0; \frac{2}{x}, \frac{6}{x}, \frac{10}{x}, \frac{14}{x}, \ldots\right],$$

oraz

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \ldots}}}, \quad \text{tzn.} \quad \operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

Nie troszcząc się o zbieżność znalezionych rozwinięć, wyprowadził stąd bez trudu oba twierdzenia. Poprawny dowód zbieżności powyższych rozwinięć podał dopiero Pringsheim w 1898 roku.

Ponieważ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, więc z twierdzenia 2 wynika, że π jest liczbą niewymierną. Lambert podał też bezpośredni dowód tego faktu. Natomiast z twiedzenia 1 wynika, że $e^n \notin \mathbb{Q}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

A. M. Legendre udowodnił ([30]) Note IV), że nie tylko π, ale także π^2 jest liczbą niewymierną. Legendre pisał tam (str. 251):

„Jest prawdopodobne, że liczba π nie jest zawarta wśród niewymierności algebraicznych, tzn. nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o skończonej liczbie składników, którego współczynniki są wymierne, lecz jak się wydaje, ścisły dowód takiego twierdzenia jest bardzo trudny; jesteśmy jedynie w stanie udowodnić, że kwadrat π jest jeszcze liczbą niewymierną".

Jest to zapewne pierwsze miejsce w literaturze, w którym pojawiła się precyzyjna definicja liczby przestępnej, choć już wcześniej Leibniz i Euler używali tego terminu, nie precyzując go jednak bliżej.

Powszechnie dziś znany dowód niewymierności e pochodzi od Fouriera (1815). Wykorzystał on rozwinięcie e w szereg:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

4. Pierwsza połowa XIX wieku. Dalsze zmagania z niewymiernością.

W elementarnych wykładach rachunku różniczkowego, które zaczęły się coraz częściej pojawiać na przełomie XVIII i XIX stulecia, brak jakiejkolwiek wzmianki o pojęciu liczby. Liczby pojmowano jako coś znanego, czego nie należy definiować (por. J. L. Lagrange (1804 [28]), Cauchy (1821 [7]), M. Gergonne (1829–1830 [17])). U Cauchy'ego też nie ma pojęcia liczby. Jest natomiast precyzyjne, jak na owe czasy, pojęcie ciągu, szeregu zbieżnego i rozbieżnego:

„Rozdział VI.

1. Ogólne rozważania o szeregach.

Szeregiem nazywamy ciąg nieokreślonych wielkości

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

w którym następne [wielkości] otrzymujemy z poprzednich wg określonego prawa. Takie wielkości są różnymi składnikami szeregu, który rozpatrujemy. Niech

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

będzie sumą n pierwszych składników, gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą. Jeżeli dla wartości n stale rosnących suma s_n zbliża się nieograniczenie do pewnej *granicy s, to szereg jest zbieżny, a wspomnianą granicę nazywa się sumą szeregu. Jeżeli przeciwnie, suma s_n nie zbliża się do żadnej ustalonej granicy, to szereg jest rozbieżny i nie ma sumy."*

Cauchy jest więc świadom, że do pojęcia sumy szeregu potrzebne jest pojęcie granicy. W dalszym ciągu usiłował udowodnić to, co dziś nazywamy twierdzeniem Cauchy'ego: *ciąg s_n sum częściowych ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego*, innymi słowy, że przestrzeń metryczna $\mathbb{R}$ jest zupełna. Cauchy udowodnił jedynie konieczność swojego warunku. Dostateczność tego warunku wymaga uprzedniego zdefiniowania liczb rzeczywistych. Bez definicji liczb niewymiernych ta część dowodu jest niemożliwa. Cauchy stwierdził w *Cours d'Analyse*, że liczby niewymierne należy uważać za granice ciągów liczb wymiernych.

Niezależnie jednak od braku precyzyjnej definicji liczb niewymiernych, z coraz większym powodzeniem odkrywano dalsze własności liczb niewymiernych. J. Liouville (1809–1882) udowodnił w 1844 swoje słynne twierdzenie o aproksymacji rzeczywistych liczb algebraicznych liczbami wymiernymi:

Jeżeli $a \in \mathbb{R}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n (tzn. pierwiastkiem wielomianu stopnia n o współczynnikach wymiernych, nieprzywiedlnego nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych), to istnieje stała $C(\alpha) > 0$, taka, że

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^n}$$

dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

Bynajmniej nie ten wynik zafascynował Liouville'a – to było tylko twierdzenie pomocnicze w dowodzie twierdzenia, zgodnie z którym *każdy przedział (a, b) na prostej zawiera liczbę przestępną.*

Istotnie powyższe twierdzenie o aproksymacji pozwoliło Liouville'owi skonstruować liczby przestępne

$$\theta(g) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{-n!}.$$

dla każdego $g \in \mathbb{N}$, $g \neq 1$. Nieco później, bo w 1851 roku, Liouville zdołał dowieść, że $e, e^2 \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ dla każdego $d \in \mathbb{N}$.

Mówiąc o próbach konstruowania liczb niewymiernych należy wspomnieć o B. P. J. N. Bolzano (1781–1848), który wcześniej niż Cauchy podał definicję szeregu zbieżnego, w czym krył się zalążek pojęcia liczby niewymiernej.

Użyte przez Bolzano pojęcie zbioru nieskończonego ukryte jest w definicji liczby niewymiernej. Należy tu jednak odnotować, że rozważania Bolzano przez wiele dziesiątków lat nie były znane i nie wywarły wpływu na współczesnych mu matematyków.

5. II połowa XIX wieku.

Pierwszą próbę uściślenia dotychczasowego pojęcia liczby podjął Karl Weierstrass (1815–1897). Od czasu, gdy jego nauczyciel, Ch. Gudermann, zapoznał go z teorią funkcji analitycznych (semestr zimowy 1839–1840), Weierstrassa zafascynowała ta teoria. Pierwsze wyniki Weierstrassa związane z funkcjami eliptycznymi zwróciły jego uwagę na potrzebę precyzyjniejszego sformułowania pojęcia liczby. Całkowanie zespolone, stosowane już przez Gaussa, a ugruntowane przez Cauchy'ego wywarło duże wrażenie na Weierstrassie. Unikał jednak metody Cauchy'ego starając się zalgebraizować analizę. Dowodem na to była zbudowana przez niego teoria zespolonych szeregów potęgowych, w swej istocie czysto algebraiczna. Posługując się nią udowodnił np. nierówność Cauchy'ego, nie korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego.

W liście do H. A. Schwarza z 3 X 1875 pisał, że *„teoria musi być zbudowana w oparciu o prawdę algebraiczną, a nie używać metod przestępnych dla uzyskania prostych i podstawowych twierdzeń algebraicznych."* I dalej pisze, że zamierza usystematyzować podstawy tej teorii. W 1859/60 rozpoczął wykładać funkcje analityczne na uniwersytecie w Berlinie. Jego wykłady *„Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen"* rozszerzane i modyfikowane trwały aż do 1884/85. We wstępie do swoich wykładów pisze o potrzebie formalnej definicji liczb rzeczywistych.

Podstawowe pojęcie Weierstrassa to agregat (*„Zahlgröße)"*. Idąc w ślad za pomysłem Pitagorejczyków definiuje jednostki, $\varepsilon_N = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Liczba ułamkowa a to liczba postaci

$$a = m + m_1 + \ldots + m_N \varepsilon_{m_N} .$$

Agregat jest zbiorem liczb (jednostek) wraz z krotnościami ich występowania. Widać więc, że jakiś wpływ na Weierstrassa wywarły egipskie ułamki proste, choć tu ułamki proste mogą mieć równe mianowniki.

Dwie dodatnie liczby wymierne: $a, b \in \mathbb{Q}_+^\times$ są równe:

$$a = b \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{Q} (\omega < a \Leftrightarrow \omega < b) .$$

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a_j \in \mathbb{Q}_+^\times$, będzie agregatem (*„das additives Agregat"*). Liczby a_j nazywamy ułamkami agregata A. (Uwaga: a_j nie muszą być parami różne). Liczba wymierna r jest zawarta w agregacie A, jeżeli istnieje podagregat A zawierający r. Piszemy wtedy $r \in A$. *Agregat* A jest *skończony* (albo: *zbieżny*), jeżeli istnieje $R \in \mathbb{Q}_+^\times$ takie, że dla każdego $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\sum_{i=1}^{n} a_i < R$.

Jeżeli A i B są dwoma agregatami, to wg Weierstrassa:

$$A = B \Leftrightarrow \text{ dla każdego } q \in \mathbb{Q},\ (q \in A \Leftrightarrow q \in B).$$

Sumą agregatów nazywa on sumę $A \cup B$(z powtórzeniami), a iloczynem agregatów A i B:

$$AB = \{ab \in \mathbb{Q} : a \in A,\ b \in B\} .$$

Jeżeli agregat jest złożony ze skończenie wielu elementów, to Weierstrass utożsamia go z sumą jego elementów.

Liczby rzeczywiste to nieskończone agregaty zbieżne. G. Frege zarzucił Weierstrassowi błąd logiczny w jego konstrukcji. G. Frege pisał w książce *„Grundgesetze der Arithmetik"* (2 Bde, Jena 1903):

„Sumę nieskończenie wielu dodatnich składników rozpatruje Weierstrass nie jako granicę sumy, lecz jako sumę".

Frege uważa, że znaki $\leq$ i $+$ nie mają tam pewnego znaczenia. Ten sam błąd zarzucił Weierstrassowi Cantor w 1872. Jedynie Dedekind uważał teorię Weierstrassa, a później Cantora za w pełni poprawne. W pracy *„Was sind und was sollen die Zahlen"* (Braunschweig 1888), Dedekind uważa, że *„teorie Panów Weierstrassa i Cantora posiadają pełną ścisłość"*. Faktem jest jednak, że Weierstrass nigdy nie opublikował swojej teorii, co chyba nie wynikało wyłącznie z jego niechęci do publikowania, gdyż dzieła Weierstrassa zajmują łącznie 7 tomów, obejmujących w większości prace opublikowane jeszcze za jego życia. Co prawda książka Dantschera [8] z 1908 roku zawiera wykład Weierstrassa, jednak trąci on myszką i nie jest precyzyjny, jak na rok 1908. Późniejsze ujęcie teorii agregatów (z 1866) jest już precyzyjniejsze (por. [36]). Implicite pojawia się pojęcie porządku, jego archimedesowość oraz pojęcie granicy. Weierstrass pisze tam:

„W dowolnej bliskości każdej niewymiernej wielkości liczbowej istnieje dowolnie wiele wymiernych wielkości liczbowych, które do niej dowolnie blisko zbliżają się. Zatem każda niewymierna wielkość liczbowa jest granicą wymiernych [wielkości liczbowych], tzn. w tym przypadku zdefiniowanych. Jak więc można czysto arytmetycznie zdefiniować różnicę pomiędzy wielkościami wymiernymi i niewymiernymi? Gdy wyjdziemy z istnienia wymiernych wielkości liczbowych

to nic ma żadnego sensu, aby [liczby] niewymierne jako granice tychże definiować, gdyż wcześniej wcale nie wiemy, czy prócz wymiernych są jeszcze inne wielkości liczbowe".

I dalej:

„Ale wielkości liczbowe, które powyżej zostały zdefiniowane, obejmują wprawdzie wszystkie liczby wymierne, lecz także zawierają jeszcze inne. Rozważmy na przykład liczbę e, która przyporządkowana jest elementom $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots,$ *tworzącym dobrze zdefiniowany szereg, jednoznacznie określający wielkość liczbową; całkiem łatwo można wykazać, że nie istnieje wymierna wielkość liczbowa, która jest jej równa; wynika stąd od razu, że dziedzina wielkości nie jest wyczerpana przez liczby wymierne."*

W piątek, 11 czerwca 1886 roku, Weierstrass mówił:

„Korzystając z pomocy wprowadzonej metody poglądowej daje się łatwo wyjaśnić, że każda wielkość liczbowa odpowiada pewnej określonej długości geometrycznej. Możemy mianowicie przedstawić wielkość liczbową w jakiejkolwiek arytmetycznej formie, na przykład w systemie dziesiętnym, w postaci

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots, \ \textit{gdzie}\ 0 \le a_k < 10, \ \textit{gdy}\ k \ge 1,$$

a więc możemy wszystkie wielkości liczbowe przedstawić jako długości, które powstają, gdy powyższe przedstawienie szeregu urywa się na pierwszym, drugim, itd. składniku."

Rozwinięcia liczb rzeczywistych przy dowolnej podstawie, w szczególności rozwinięcia dziesiętne, odgrywają u Weierstrassa bardzo istotną rolę.

W 1869 roku Méray (1835–1911) naszkicował swoją piewszą teorię liczb niewymiernych, rozwijając ją następnie w książce [32] w 1872. Był to przełomowy rok w budowie liczb rzeczywistych. W tym samym roku ukazały się też konstrukcje Cantora, Heinego i Dedekinda. Konstrukcje Méraya, Cantora i Heinego to, najkrócej mówiąc, konstrukcje uzupełnienia ciała Q liczb wymiernych względem topologii porządkowej, w przeciwieństwie do zupełnie odmiennej teorii Dedekinda. Omówimy je poniżej. Warto jednak wcześniej zdać sobie sprawę z faktu, że zarówno Heine, jak Cantor byli studentami Weierstrassa. (Cantor studiował w Berlinie w latach 1863–1869, gdzie był pod przemożnym wpływem Weierstrassa). Z drugiej strony jednak, Weierstrass odrzucał sam pomysł takiej konstrukcji, jak o tym dobitnie świadczy przytoczony fragment jego wykładów. Méray ciąg liczb wymiernych $v_1, v_2, \ldots$ nazywa *„variable progressive"* (1869), a później *„variant"* (1872). Jeżeli dla dowolnej dostatecznie małej liczby wymiernej $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że

$$|v_{n+p} - v_n| < \varepsilon \text{ dla } p = 0, 1, 2, \ldots,$$

to *„variant v_n est convergent"*. Dwa ciągi u i v są równoważne, jeżeli $\lim_{n,m\to\infty} (u_n - v_m) = 0$. Jeżeli ciąg u_n nie jest zbieżny do liczby wymiernej, to granicę u_n nazywa *„nombers fictifs"*, liczbą fikcyjną, utożsamiając ją z tym ciągiem.

Potrzeba uściślenia pojęcia liczby pojawiła się u Cantora w związku z jego badaniami w zakresie szeregów trygonometrycznych (twierdzenie o jednoznaczności etc.). Zręby tej teorii przedstawił w pracy *„Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie Trigonometrischen Reihen"*, Math. Annalen 5 (1872), 123–132. (por. [4]).

Liczbę rzeczywistą (*„die Zahlgröße"*) utożsamia Cantor z ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych (a_n), pisząc: *„Szereg (1) ma określoną granicę b."*

Jeżeli a jest *„wielkością liczbową"* wyznaczoną przez ciąg (a_n), a a' wielkością liczbową wyznaczoną przez ciąg (a'_n), to można je porównywać:

(a) $$a = a' \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall_n \ge n_0,\ |a_n - a'_n| < \varepsilon.$$

(b) $$a' < a \Leftrightarrow \exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall_n \ge n_0,\ \varepsilon < a_n - a'_n.$$

(c) $$a < a' \Leftrightarrow \exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_n^\times\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0,\ a_n - a'_n < \varepsilon.$$

Ogólna konstrukcja liczb rzeczywistych podana przez Cantora poprzedzona została jego wynikami, dotyczącymi rozwinięć liczb rzeczywistych. W dwóch pracach ([5], [6]) z 1869 roku przedstawia Cantor teorię rozwinięć postaci

$$(*) \qquad A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{bb'} + \frac{\nu}{bb'b''} + \ldots,$$

gdzie $b, b', b'', \ldots$ są liczbami naturalnymi większymi od 1, $\lambda \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $\mu \in \{0, 1, \ldots, b'-1\}$, $\nu \in \{0, 1, \ldots, b''-1\}$, itd. Cantor dowodzi, że jeżeli $(*)$ jest rozwinięciem liczby wymiernej, to od pewnego miejsca licznik przyjmuje największe z możliwych wartości. Daje to natychmiast kryterium niewymierności liczby A przedstawionej przy pomocy rozwinięcia $(*)$, skąd np. wynika niewymierność liczby e.

Dowodzi też, że liczba o rozwinięciu $(*)$ jest wymierna, wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ jest okresowy od pewnego miejsca.

W pierwszej z cytowanych prac Cantor zauważa, że każda niewymierna liczba $x > 1$ ma jednoznaczne rozwinięcie w ułamek łańcuchowy

$$x = 1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}}.$$

Następnie rozważa rozwinięcia postaci

$$x = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots,$$

gdzie $a, b, c, \ldots \in \mathbb{N}$ i $b \geq a^2$, $c \geq b^2$, $d \geq c^2$, itd. W szczególności, jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to od pewnego miejsca mianowniki tworzą ciąg $k, k^2, k^4, \ldots, k^{2^n}, \ldots$ Cantor ustala odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną pomiędzy punktami prostej z wybraną jednostką, a wielkościami liczbowymi.

W pracy *„Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen"*, Crelle's J. 77 (1874), 258–262; (por. [4]) Cantor udowodnił, że *zbiór rzeczywistych liczb algebraicznych jest przeliczalny*. Dowolnej liczbie ω algebraicznej stopnia n z wielomianem minimalnym

$$f(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

$(a_0, a_1 \ldots, a_n) = 1$, przyporządkował jej wysokość (*„Höhe"*):

$$N = n - 1 + |a_0| + \ldots + |a_n|.$$

Ponieważ dla każdej liczby naturalnej N istnieje skończenie wiele wielomianów (liczb ω) o wysokości N, a więc można je wszystkie przeliczyć. Wynika stąd, że zbiór $\mathbb{A}$ wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny. „Większość" liczb niewymiernych są to więc liczby przestępne.

Konstrukcje Cantora i Méraya, której idee sięgają Cauchy'ego, a nawet Köstnera, w najelegantszej postaci przedstawił Heine [19] w 1872 roku. Ciąg Cauchy'ego złożony z liczb wymiernych nazywa Heine *„Zahlenreihe"*. Termin liczba (*„Zahl"*) rezerwuje tylko dla liczb wymiernych. *Ciąg elementarny* (*„Elementarreihe"*) to ciąg liczb wymiernych zbieżny do zera. Dwa ciągi (a_n) i (b_n) są równoważne, gdy $(a_n - b_n)$ jest ciągiem elementarnym. *Uogólniona liczba* albo *symbol liczbowy* (*„Allgemeinere Zahl order Zahlzeichen"*) to klasa równoważności danego ciągu Cauchy'ego względem zbioru ciągów elementarnych. Krótko mówiąc, zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych definiuje Heine jako pierścień ilorazowy $\mathfrak{C}/\mathfrak{I}$, gdzie $\mathfrak{C}$ jest zbiorem ciągów Cauchy'ego o wyrazach wymiernych, a $\mathfrak{I}$ - zbiorem (ideałem w $\mathfrak{C}$) ciągów elementarnych. Element $(a_n) + \mathfrak{I}$ zapisuje Heine jako $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Jeżeli $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots]$, to

$$A > B \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ a_n - b_n > 0.$$

Sumę A i B definiuje jako:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots],$$

podobnie określa mnożenie i dzielenie. W ten sam sposób, korzystając ze zdefiniowanego porządku dla uogólnionych liczb, określa pojęcie granicy ciągu uogólnionych liczb.

Zupełnie inny pomysł wykorzystał Dedekind. Co prawda jego rozprawa (por. [9]; [14] – tekst po polsku) ukazała się w 1872 roku, jednakże potrzeba precyzyjniejszego zdefiniowania liczb rzeczywistych wynikła w czasie jego wykładów w Zurychu w 1885 roku, kiedy po habilitacji w Getyndze otrzymał etat profesora na tamtejszej Politechnice. Pomysł dojrzewał przez wiele lat.

Dedekind rozbija zbiór liczb wymiernych na dwie klasy:

$(\mathfrak{U}_\nu|\mathfrak{B}_\mu) : \mathfrak{U}_\nu < \mathfrak{B}\mu$, tzn. $a < b$ dla każdego $a \in \mathfrak{U}_\nu$ i $b \in \mathfrak{B}_\mu$. Każda taka klasa wyznacza *przekrój* („*der Schnitt*"). Przekrój nazywa liczbą rzeczywistą. Definiuje następnie sumę, iloczyn, iloraz oraz relację porządku w zbiorze przekrojów.

We wszystkich omawianych tu konstrukcjach liczbę rzeczywistą utożsamia się z odpowiednio wybranym zbiorem liczb wymiernych (bo jakżeby można inaczej!).

Można przypuszczać, że teoria Weierstrassa nie była w pełni klarowna, gdyż nie operował on jeszcze zbyt precyzyjnie pojęciem zbioru. U Cantora, twórcy teorii zbiorów, wygląda to już znacznie lepiej. Natomiast Dedekind, który znał wyniki swego przyjaciela Cantora, z korespondencji i wspólnych dyskusji, często je korygował, wskazując błędy i luki w jego rozumowaniach. Był więc w jakimś stopniu współtwórcą teorii zbiorów.

Być może był to zbieg okoliczności, ale ten okres przyniósł także pierwszy dowód przestępności znanej liczby. Otóż Ch. Hermite dowódł w 1873 roku, że e *jest liczbą przestępną*. Było to sensacją tamtych lat. Ale niewątpliwie największą sensacją był wynik F. Lindemanna (1882): *π jest liczbą przestępną!*

Replika Kroneckera, wg którego „*liczby naturalne pochodzą od Boga; wszystko inne stworzył człowiek*", była druzgocąca. W liście do Lindemanna, który po uzyskaniu tego błyskotliwego wyniku został dyrektorem Seminarium Matematycznego w Królewcu, pisał: „*Jaką wartość przedstawia Pański piękny dowód, skoro liczby niewymierne nie istnieją?*"

Kronecker uważał, że należy odrzucić wszelkie nieskończoności, a cała matematyka zbudowana jest z liczb naturalnych z pomocą konstrukcji, z których każda stosowana jest tylko skończenie wiele razy. Inne obiekty w matematyce nie istnieją – należy je odrzucić.

W swej słynnej pracy [31] z 1882 roku Lindemann sformułował bez dowodu następujące twierdzenie, uogólniające wynik Lamberta:

jeżeli $\alpha \in \mathbb{A}^\times$, to $e^\alpha \notin \mathbb{A}$.

Ubowodnił je Wierstrass w 1885 roku, dowodząc ogólniejszego twierdzenia:

jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$ *są parami różne, to liczby* $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ *są liniowo niezależne nad ciałem* $\mathbb{A}$.

Pierwszą aksjomatykę ciała $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych podał Hilbert na przełomie XIX i XX wieku ([20], §13; [21]).

Przypomnijmy w tym miejscu, że porządek liniowy $\geq$ w ciele nazywamy porządkiem ciała, jeżeli suma i iloczyn elementów dodatnich są dodatnie. Porządek ciała jest archimedesowski, jeżeli spełnia Aksjomat Archimedesa, tzn. dla dowolnego dodatniego a i b istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $na = \underbrace{a + \ldots + a}_{(n \text{ razy})} > b$.

Hilbert scharakteryzował $\mathbb{R}$ jako ciało liniowo uporządkowane z porządkiem archimedesowskim, które nie ma właściwych uporządkowanych rozszerzeń archimedesowskich. Dowodu jednak nie podał.

Kilka lat później Huntington [22] scharakteryzował $\mathbb{R}$ jako ciało liniowo uporządkowane, w którym każdy rosnący ciąg ograniczony ma kres górny. W późniejszej pracy [23] udowodnił, że $\mathbb{R}$ jest jednym ciałem liniowo uporządkowanym z porządkiem Archimedesa, w którym każdy zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Dziś wiadomo, że założenie archimedesowości jest zbędne.

6. Najnowsze konstrukcje liczb rzeczywistych. Klasyfikacja Mahlera liczb niewymiernych.

Wspominaliśmy już o opozycji Kroneckera do intensywnie rozwijanych teorii liczb rzeczywistych. Nie był jednak jedyny w swoich opiniach. Paul du Bois (brat Emila) w swej książce [2] z 1882 roku ustosunkował się krytycznie do arytmetycznych teorii liczb rzeczywistych i formalizmu tych teorii. Zanim został matematykiem, był psychologiem i to zapewne wpłynęło na ukształtowanie się jego poglądów matematycznych.

Tak pisał w swojej książce o liczbach niewymiernych [2]:

„Te trudności nie są natury matematycznej, mają źródło w naszych myślach – naszych wyobrażeniach [Vorstellungen]". „Gdyby to były trudności natury matematycznej, to by je dawno przezwyciężono".

Na zakończenie należy wspomnieć o dwóch nowych konstrukcjach liczb rzeczywistych. Pierwsza to konstrukcja liczb rzeczywistych za pomocą ultrapotęg, w szczególności niestandardowe rozszerzenia $\mathbb{R}$, które sankcjonują rachunek nieskończenie małych Newtona, Leibniza i innych, którego elementy przetrwały, przynajmniej w języku matematyki, do końca wieku XIX.
Z algebraicznego punktu widzenia są to pewne ciała uporządkowane z porządkiem, który nie spełnia aksjomatu Archimedesa.

Pojawiła się też inna, nowa konstrukcja liczb rzeczywistych. W 1975 roku kilku autorów, m. in. G. H. Ross, G. C. Rota i inni [13] podało konstrukcję liczb rzeczywistych w oparciu o pierścień szeregów formalnych Laurenta jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych, tzn.

$$\mathbb{Z}\{X\} = S^{-1}\mathbb{Z}[[X]],$$

gdzie $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, a $\mathbb{Z}[[X]]$ jest pierścieniem formalnych szeregów potęgowych o współczynnikach całkowitych. W zbiorze tym definiuje się odpowiednio relację równoważności $\sim$ i podpierścień $\mathbf{A}$, a zbudowany pierścień klas $\mathbf{A}/\sim$ okazuje się być zbiorem liczb rzeczywistych. Istotnie niech $\mathbf{A}$ będzie zbiorem wszystkich szeregów Laurenta z $\mathbb{Z}\{X\}$

$$a = \sum_{n=N}^{\infty} a_n X^n,$$

które spełniają następujący warunek:

istnieje $z \in \mathbb{N}$ takie, że $\sum_{i\leq n} |a_i| 2^{n-i} \leq z 2^n$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dwa szeregi Laurenta $a, b \in \mathbf{A}$ są równoważne: $a \sim b \Leftrightarrow$ istnieje szereg $c \in \mathbf{A}$ taki, że $a = b + (1 - 2X)c$ i

$$\forall z \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \forall j > k\ (z|c_j| \leq 2^j).$$

Okazuje się (por. [13]), że pierścień $\mathbf{A}/\sim$ jest izomorficzny z $\mathbb{R}$.

Zaczęliśmy nasze rozważania od najwcześniejszych przykładów liczb niewymiernych: $\sqrt{3}, \sqrt{2}$, stosunek przekątnej pięciokąta foremnego do jego boku. Zakończmy więc naszą dyskusję opisem zbioru liczb niewymiernych. Klasyfikację taką podał K. Mahler w 1932 roku. Wtedy, gdy proponował tę klasyfikację, nie było jeszcze wiadomo, czy wszystkie zbiory są niepuste.

Przypomnijmy niezbędne pojęcia. Niech $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. Połóżmy:

$$H(P) := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

niech $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$\omega_N(\alpha) := \sup\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ istnieje nieskończenie wiele } P \in \mathbb{Z}[X], \operatorname{st}(P) \leq N, \\ 0 < |P(\alpha)| < H(P)^{-\omega}\}.$$

A oto klasyfikacja Mahlera; α jest:

$$A - \text{liczbą} \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \omega_N(\alpha) \ll 1 \quad \text{liczby algebraiczne}$$

$$S - \text{liczbą} \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \omega_N(\alpha) \not\ll 1, \text{ ale } \omega_N(\alpha) \ll N.$$

T – liczbą $\leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ \omega_N(\alpha) \not\ll N,$ ale $\omega_k(\alpha) < \infty$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

U – liczba $\leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega_N(\alpha) = +\infty$.

Wiadomo już dziś, że każda z klas S, T, U jest niepusta, prawie każda liczba jest S-liczbą, a jeżeli $\alpha, \beta \in S \cup T \cup U$, obie z różnych klas, to są one algebraicznie niezależne.

A jak współcześnie wprowadza się liczby rzeczywiste?

J. Dieudonné („*Foundations of modern analysis*", 1960) definiuje $\mathbb{R}$ jako ciało liniowo uporządkowane z porządkiem archimedesowym, w którym każdy zstępujący ciąg odcinków ma przekrój niepusty.

W. Rudin („*Podstawy analizy matematycznej*", 1969) wykłada teorię przekrojów Dedekinda.

K. Kuratowski („*Rachunek różniczkowy i całkowy*" wyd. II, 1964) wspomina o aksjomatyce ciała $\mathbb{R}$ jako liniowo uporządkowanego ciała archimedesowskiego, w którym każdy zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Szkicuje także teorię przekrojów Dedekinda.

Najpełniejszy w polskiej literaturze wykład teorii Dedekinda zawarty jest w „*Analizie*" W. Sierpińskiego.

Natomiast świeżo wydana trzytomowa „*Analiza*" K. Maurina zawiera wzmiankę o konstrukcjach Cantora i Méraya liczb rzeczywistych.

Na zakończenie przytoczę opinię Pierponta [34] z 1928 roku:

„*Osobiście nie wierzę w to, że absolutna ścisłość zostanie kiedykolwiek osiągnięta, a jeżeli nadejdzie czas, że tak się stanie, to będzie to oznaczać, że wyścig matematyków zakończył się*".

Bibliografia

[1] E. T. Bell, *The development of mathematics*, Mc Graw–Hill Book Company, inc., York-London, 1945.

[2] P. du Bois–Reymond, *Die allgemeine Functionenlehre*, 1882.

[3] C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.

[4] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer-Verlag, Reprint, 1980.

[5] —, *Über die einfachen Zahlensysteme*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg 14(1869), 121–128.

[6] —, *Zwei Sätze über eine Gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte*, ibidem 14 (1969), 152–158.

[7] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique; 1re Partie, Analyse Algébraique*, 1821.

[8] V. von Dantscher, *Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen*, Leipzig und Berlin, Teubner-Verlag, 1908.

[9] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Dritter Band, Braunschweig, 1932.

[10] P. Duguc, *Eléments d'analyse de Karl Weierstraß*, Archive for History of Exact Sciences 10 (1973), 41–176.

[11] H. D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Zahlen*, Springer-Verlag, 1988.

[12] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausaunne, 1748.

[13] F. Faltin, N. Metropolis, H. Ross, G. -C. Rota, *The real numbers as a wreath product*, Advances in Mathematics 16 (1975), 278–304.

[14] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Wybór i opracowanie Roman Murawski. Wydawnictwo Naukowe UAM. Poznań 1986.

[15] K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippassus of Matapontum*, Annals of Mathematics 46 (1945), 242–264.

[16] Galileo Galilei, *Rozmowy i dowodzenia matematyczne* (1638), Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego Instytutu Popierania Nauki, Warszawa. Pałac Staszica, 1930.

[17] M. Gergonne, *Exposition èlèmentaire des principes du calcul différentiel*, Annales de Mathématiques Pure et Appliquées 20 (1829–30), 213–284.

[18] J. W. Gray, *The review of Accessible categories: The foundations of categorical model theory, by M. Makken and R. Paré*, Bulletin of the American Mathematical Society 25 (N.S.) (1991), No 1, 139–140.

[19] E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, Crelle's Journal 74 (1872), 172–188.

[20] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

[21] D. Hilbert, *Ueber den Zahlbegriff*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (1900), 180–184.

[22] E. V. Huntington, *Complete set of postulates for the theory of real quantities*, Transations of the American Mathematical Society 4 (1903), 358–370.

[23] E. V. Huntington, *A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups*, Transactions of the American Mathematical Society 6 (1905), 181–197.

[24] P. E. B. Jourdain, *The development of the theory of transfinite numbers*, Archiv der Mathematik und Physik (3), X (1906), 254–281; XIV (1908–1909), 287–311; XVI (1910), 21–43; XXII (1913–1914), 1–21.

[25] A. P. Juszkiewicz, *Leibniz i osnovanie isčislenia beskonečno małych*, Uspehi matematičeskih nauk 3 (1948), No 1 (23), 150–164.

[26] S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, PWN, Warszawa 1973.

[27] G. Lachaud, *Exactitude et Approximation en Analyse diophantienne*, preprint 1987.

[28] J. L. Lagrange, *Leçons Sur le Calcul des Fonctions*, Journal de l'École Polytechnique V (1804), 1–320; *Supplement aux leçons sur le calcul des fonctions, données en l'an* 7 [1799] *a l'École Polytechnique*, ibidem VII (1808), 1–90.

[29] J. Lambert, *Mémoire sur quelques propriétés des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*, Histoire Acad. -roy. sci. et belles lettr., Berlin, Année 1761, 265–322. Opera Math. II, 112–159.

[30] A. M. Legendre, *Élements de Géométrie*, 1794.

[31] F. Lindemann, *Uber die Zahl* π, Mathematische Annalen 20 (1882), 213–225.

[32] Ch. Mérăy, *Noveaux précis d'analyse infinitésimal*, Paris, Savy, 1872.

[33] I. Newton, *Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, 1707.

[34] J. Pierpont, *Mathematical rigor, past and present*, Bulletin of the American Mathematical Society 34 (1928), 23–53.

[35] K. Weierstraß, *Mathematische Werke*, Bde I–VII, Berlin 1894–1927.

[36] —, *Augewähelte Kapitel aus der Funktionenlehre; Vorlesungen, gehalten in Berlin* 1886.

Teubner = Archiv zur Mathematik, Band 9, 1988.