Cantor i nieskończoność

Wiktor BARTOL, Warszawa

Tekst oparty na wykładzie wygłoszonym podczas IX Szkoły Matematyki Poglądowej *Przełomy w matematyce* w Miętnem, 24–28.01.1992

Co powoduje, że pewne zjawiska w rozwoju matematyki – nowe wyniki, nowe teorie, nowe spojrzenia – nazywane są przełomami? Nie znam odpowiedzi na to pytanie, nie wiem, czy można jednoznacznie scharakteryzować przełom. Wiem jednak, że to, co zrobił Georg Cantor, musi na takie określenie zasługiwać.

*

W okresie, kiedy Cantor rozpoczynał swoją drogę naukową, wielu najwybitniejszych matematyków pracowało nad problemami dotyczącymi szeregów Fouriera czy ogólniej – szeregów trygonometrycznych. Wysiłki te nie były bezowocne: Cauchy, Dirichlet, Riemann, Lipschitz, Heine – żeby wymienić tylko największych – spowodowali, że gdy w 1869 roku Cantor przybył do Halle po studiach w Berlinie, teoria szeregów trygonometrycznych była już bardzo rozwinięta, bogata w wyniki i metody. Nie była wszakże teorią zamkniętą. Jednym z głównych nierozwiązanych problemów było pytanie o jednoznaczność reprezentacji funkcji w postaci szeregu trygonometrycznego. Pojawiały się wyniki częściowe: Heinrich Heine, starszy kolega Cantora z Halle, opublikował w 1870 r. twierdzenie, które ustalało jednoznaczność reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny, jeśli prawie wszędzie – a więc poza skończoną liczbą punktów – funkcja była ciągła, a szereg jednostajnie zbieżny. Problem jednoznaczności zainteresował Cantora, a wynik Heinego sugerował możliwości uogólnień. Do tego potrzebna była nowa metoda.

Jeśli istnieją dwa szeregi trygonometryczne dla tej samej funkcji, równe jej w każdym punkcie przedziału $(-\pi, \pi)$, to ich różnica jest szeregiem reprezentującym 0. Należałoby zatem udowodnić, że taka reprezentacja jest możliwa tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki tego szeregu są równe zeru. Cantor zauważył, że do dowodu tego faktu można wykorzystać zadaną szeregiem funkcję – nazwijmy ją F – wprowadzoną kilkanaście lat wcześniej przez Riemanna, ciągłą i jednostajnie zbieżną w całym przedziale: wystarczy mianowicie wykazać, że jest ona liniowa. Zamysł się powiódł i niebawem, bo już w tym samym 1870 roku, Cantor udowodnił swoje twierdzenie o jednoznaczności dla funkcji reprezentowalnej przez szereg trygonometryczny zbieżny w każdym punkcie przedziału. Właśnie: *w każdym punkcie przedziału*. Czy nie można osłabić tego założenia?

Niewiele później Cantor wiedział, że można. Potrafił wykazać, że jeśli istnieje skończony ciąg punktów, w których szereg różnic jest rozbieżny lub nie reprezentuje zera (nazwijmy te punkty *osobliwymi*), to funkcja Riemanna F jest liniowa w każdym przedziale zawartym między sąsiednimi liczbami z ciągu. Potrafił też więcej: udowodnił, że w każdym takim przedziale jest to ta sama funkcja, a więc F jest liniowa w całym przedziale od $-\pi$ do π, a stąd – jak poprzednio – wynika jednoznaczność reprezentacji danej funkcji przez szereg trygonometryczny. Nie odbiega to od wyniku Heinego; istotą rzeczy jest tu metoda. Czy nie można jej uogólnić tak, aby zrezygnować z założenia o skończoności ciągu punktów osobliwych?

Dość szybko Cantor uznał, że wie jak to zrobić. Miał pomysł, który zaprowadził go nie tylko dalej niż oczekiwał, ale znacznie dalej niż był w stanie sobie to wówczas – w początkach lat 70-tych XIX wieku – wyobrazić. Spróbujmy prześledzić istotę owego pomysłu.

Załóżmy, że w przedziale jest nieskończenie wiele punktów osobliwych. Dzięki twierdzeniu Bolzano–Weierstrassa wiadomo, że taki zbiór ma co najmniej jeden punkt skupienia: taki punkt, w każdym otoczeniu którego znajdzie się nieskończenie wiele punktów osobliwych. Przypuśćmy, że jest tylko jeden punkt skupienia. Wówczas w każdym podprzedziale nie zawierającym tego punktu mamy skończoną liczbę punktów osobliwych, a w takiej sytuacji można już wykazać, że funkcja Riemanna jest liniowa w całym podprzedziale. Ale przecież takie podprzedziały mogą znajdować się dowolnie blisko punktu skupienia, a funkcja F jest ciągła – stąd już prosty wniosek: funkcja ta jest liniowa w całym przedziale, którego jednym z krańców jest ów punkt skupienia. Tu działa z kolei wcześniejsza metoda Cantora, pozwalająca stwierdzić, że funkcja Riemanna jest liniowa w całym przedziale. Nietrudno zauważyć, że powyższe rozumowanie łatwo przenosi się na przypadek, gdy punktów skupienia jest skończenie wiele, a stąd jeszcze dalej: jeśli punktów skupienia jest nieskończenie wiele, to one same mają co najmniej jeden punkt skupienia. Jeśli istnieje dokładnie jeden taki punkt – i tak dalej, i tak dalej, i tak dalej.

Pomysł genialny, ale stało się tu jeszcze coś: oto ciężar problemu przenosi się niepostrzeżenie ze zbioru wartości badanej funkcji na jej dziedzinę. To strukturą dziedziny chce się Cantor teraz zająć. Jak tę strukturę – owe piętra punktów skupienia – precyzyjnie opisać ? Cantor zdaje sobie sprawę z tego, że przede wszystkim trzeba zająć się precyzyjnym opisem samego zbioru liczb rzeczywistych.

Pojawia się „cantorowska" konstrukcja liczb rzeczywistych, Cantor wykazuje, że każdy punkt na prostej rzeczywistej odpowiada pewnej „cantorowskiej" liczbie rzeczywistej, zakłada aksjomatycznie, że każdej takiej liczbie odpowiada pewien punkt na prostej; mówiąc o punktach należy zatem myśleć o liczbach. Pojawiają się wreszcie *zbiory pierwszego gatunku*, pojęcie geometryczne, a więc także analityczne:

Niech P będzie zbiorem punktów na prostej i niech P' będzie zbiorem jego punktów skupienia. Wówczas możemy myśleć o zbiorze punktów skupienia zbioru P' – niech to będzie zbiór P''. Kontynuując to postępowanie, dochodzimy po k krokach do zbioru $P^{(k)}$, do *k-tego zbioru pochodnego.* Otóż pomysł Cantora na dowód twierdzenia o jednoznaczności daje się wykorzystać dla każdego takiego zbioru punktów osobliwych, dla którego n-ty zbiór pochodny (dla pewnego n) jest już pusty. Takie zbiory Cantor nazywa właśnie *zbiorami pierwszego gatunku.* Dzięki temu pojęciu można dokładnie opisać te zbiory punktów osobliwych, dla których prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności reprezentacji funkcji przez szereg trygonometryczny.

W 1872 roku, kiedy pojawiły się wyżej przedstawione konstrukcje i pojęcia, Cantor wybiegał już myślą dalej. Pisze: *Pojęcie liczby, tak jak tu zostało rozwinięte, niesie w sobie zarodek nieuniknionego i absolutnie nieskończonego rozszerzenia.* Do takiego wniosku doprowadziły go *zbiory drugiego gatunku.* Istotnie, po rozważeniu zbiorów pierwszego gatunku nie można było uniknąć nieograniczonego rozszerzenia horyzontów.

Przypuśćmy, że P jest zbiorem takim, że $P^{(n)} \neq \emptyset$ dla każdej liczby naturalnej n. Można wówczas myśleć o zbiorze punktów skupienia dla zbioru wszystkich punktów należących do któregokolwiek ze zbiorów $P^{(n)}$. Jeśli ∞ uznamy za najmniejszą liczbę nieskończoną tj. większą od każdej liczby naturalnej, to zbiór takich punktów skupienia możemy oznaczyć symbolem $P^{(\infty)}$. A i ten zbiór ma swoje punkty skupienia, które utworzą zbiór $P^{(\infty+1)}$ – i postępując tak dalej otrzymamy zbiory $P^{(2\infty)}$, $P^{(\infty^\infty)}$, $P^{(\infty^{\infty^n})}$ – i tak dalej, i tak dalej, i tak dalej. To są *zbiory pochodne drugiego gatunku*, a zbiór P jest *zbiorem drugiego gatunku.* Nieważne, że wszystkie te zbiory mogą się pokrywać : istotne jest to, że można sobie taki ciąg wyobrazić, że taka konstrukcja jest poprawna.

Widzimy już tutaj prawie gotową – choć jeszcze niejawną – teorię liczb porządkowych. Cantor jeszcze się nią nie zajmuje, nie ma zresztą do tego instrumentów. Jego celem jest przecież opis struktury zbioru liczb rzeczywistych, potrzebny do rozszerzenia jego twierdzenia o jednoznaczności. Interesuje go teraz charakteryzacja ciągłości, różnica między zbiorami dyskretnymi a ciągłymi. Pod koniec 1872 roku zadaje Dedekindowi listowne pytanie: *Czy można znaleźć wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy liczbami naturalnymi a liczbami rzeczywistymi?* Cantor podejrzewał, że odpowiedź jest negatywna, ale nie potrafił tego podejrzenia uzasadnić. Okazało się, że Dedekind również nie znał odpowiedzi na pytanie Cantora. Sprawa staje się intrygująca i Cantor skupia się na problemach continuum liczbowego, powoli odrywając się od początkowej problematyki, od szeregów trygonometrycznych.

I oto na przełomie lat 1873/1874 Cantor dokonuje pierwszego wielkiego odkrycia, jak byśmy dziś powiedzieli, teoriomnogościowego. Dowodzi nieprzeliczalności zbioru R wszystkich liczb rzeczywistych (a dowód jest w istocie bardzo zbliżony do znanego dzisiejszym studentom matematyki dowodu nieprzeliczalności odcinka $[0, 1]$ przez konstrukcję odpowiedniego malejącego ciągu pododcinków). Dowodzi jednocześnie przeliczalności zbioru liczb algebraicznych i wnioskuje stąd o nieprzeliczalności zbioru liczb przestępnych. I – przede wszystkim – już wie, że zbiory nieskończone mają różne wielkości! Podąża tym tropem i po trzech latach (niektórzy jego biografowie podejrzewają, chyba słusznie, że ta zwłoka wynikła z tego, że Cantor ożenił się w początkach 1874 roku) odkrywa rzecz zaskakującą: istnieje mianowicie wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy punktami kwadratu a punktami odcinka, a więc także między punktami płaszczyzny a punktami prostej, a więc także między punktami rzeczywistej przestrzeni n-wymiarowej a punktami przestrzeni m-wymiarowej dla dowolnych całkowitych dodatnich n i m. W pierwszej chwili wnioskuje, że ten wynik pozbawia znaczenia pojęcie wymiaru: okazuje się bowiem, że każdy punkt przestrzeni rzeczywistej dowolnego wymiaru dodatniego można zakodować przy pomocy jednej liczby rzeczywistej. Jednakże Dedekind nie uważa tego faktu za obalenie pojęcia wymiaru, a niebawem pojawiają się dowody pokazujące, że żadne wzajemnie jednoznaczne przekształcenie między przestrzeniami różnych wymiarów nie może być ciągłe. W intrygujący sposób powraca pytanie: czym jest ciągłość przestrzeni?

Wyniki dotyczące odpowiedniości między przestrzeniami różnych wymiarów pojawiają się w pracy *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* w 1878 roku. Jest tu też pojęcie równoliczności zbiorów, a nawet symbol „$\sim$". Są liczne przykłady zbiorów przeliczalnych, pokazano, że takimi są wszystkie zbiory pierwszego gatunku. I jest twierdzenie o równoliczności zbioru wszystkich liczb niewymiernych ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, a także o tym, że usuwając ze zbioru R podzbiór przeliczalny, otrzymamy zbiór równoliczny z całym zbiorem. Cantor skupia się tu na zbiorze liczb rzeczywistych, bo jest on reprezentantem dla wszystkich skończeniewymiarowych przestrzeni rzeczywistych, na nim można więc badać problem ciągłości. Cantor podejrzewa, że każdy podzbiór tego zbioru jest równoliczny albo ze zbiorem N wszystkich liczb naturalnych, albo z R, ale pozostawia ten problem na później. Jesteśmy już na progu teorii mnogości.

W następnym roku pojawia się pierwsza praca z cyklu pod wspólnym (z jednym wyjątkiem) tytułem *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, publikowanego w latach 1879–1884. W tych pracach Cantor wykłada całą swoją, coraz bardziej rozwiniętą, teorię zbiorów punktowych. Nie odwołuje się już do szeregów trygonometrycznych, pomija problem wymiaru.

W pierwszej części, w 1879 roku, Cantor powraca do zbiorów pochodnych, traktując je jako narzędzie do badania ciągłości zbioru R, wiąże je ze zbiorami wszędzie gęstymi. Omawia pojęcie równoliczności zbiorów (pisze: *Dwa zbiory mają tę samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy ...*, ale pojęcia *mocy* jeszcze nie ma), dzieli zbiory na dwie klasy: te, które mają tę samą moc co zbiór N i te, które mają tę samą moc co zbiór R. Podaje przykłady zbiorów przeliczalnych, czerpiąc je z wcześniejszych prac; zauważa też, że istnieją zbiory przeliczalne drugiego gatunku, zbiory wszędzie gęste (zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb algebraicznych). Przykładami zbiorów nieprzeliczalnych są przedziały na prostej, zbiór R, nawet R bez przeliczalnego podzbioru. Praca niewiele wnosi nowego do teorii, ale jest początkiem jej systematyzacji.

W 1880 pojawia się druga praca z cyklu, dość krótka. W niej – zbiory drugiego gatunku, a więc zbiory pochodne postaci $P^{(\infty)}, P^{(\infty^\infty)}$ itd. Wiele miejsca poświęca tu Cantor omówieniu symboli, służących za wykładniki w opisie takich zbiorów, broniąc ich naturalności: nie są to puste znaki, powstają w ramach pewnej konkretnej konstrukcji, uzasadnieniem dla nich są zbiory pochodne.

Trzecia praca ukazała się w roku 1882. Cantor próbuje tu sformułować ogólną definicję zbioru, choć definicja ta ma charakter raczej filozoficzny. Dowodzi kilku twierdzeń o zbiorach przeliczalnych, w szczególności ogólnej (dla dowolnego skończonego wymiaru) wersji twierdzenia o tym, że dowolna rodzina parami rozłącznych przedziałów na prostej jest (co najwyżej) przeliczalna. Powraca do pojęcia ciągłości w dość nieoczekiwany sposób: dowodzi istnienia krzywej ciągłej w nieciągłej przestrzeni (jest to podprzestrzeń R^3, złożona ze wszystkich punktów, których co najmniej jedna współrzędna jest liczbą przestępną). Oznacza to, według Cantora, że przypuszczenie, iż przestrzenie ciągłe charakteryzują się możliwością ciągłego ruchu, jest błędne. Może należy zatem rozważyć nową mechanikę, odrzucającą dogmat ciągłości przestrzeni?

Dotychczasowe wyniki Cantor wykorzystuje w czwartej pracy (1883) do badania zbiorów i funkcji na prostej, opisuje związki między mocą pochodnej zbioru a postacią i mocą samego zbioru.

I wreszcie publikuje w tym samym 1883 roku część piątą. Nadaje jej inny, „mocniejszy" tytuł :*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* czyli *Podstawy ogólnej teorii mnogości.* Cantor uwierzył już w swoją teorię na tyle, że dokonuje tu wreszcie tego, czego nie umiał , a może bał się wcześniej: nadaje samodzielny byt liczbom pozaskończonym. Przypomnijmy: w 1880 roku Cantor tłumaczy użycie symbolu ∞ i utworzonych z niego wyrażeń wyłącznie poprzez zbiory pochodne drugiego gatunku; te zbiory istnieją, a symbole służą tylko do ich opisu. Teraz zbiory pochodne już nie są potrzebne, liczby pozaskończone tłumaczą się same przez się, a ściślej – jako naturalne uogólnienie liczb naturalnych. Liczby naturalne – stwierdza Cantor – powstają w ten sposób, że dodajemy kolejne jedynki: dodając pierwszą jedynkę (do „niczego") mamy liczbę 1, potem 2, 3 itd. Takie budowanie liczb Cantor nazywa *pierwszą zasadą tworzenia.* Otrzymujemy zbiór, który nie ma największego elementu. Możemy jednak wprowadzić nową liczbę – nazwijmy ją ω – która będzie reprezentować naturalny porządek otrzymanego zbioru i będzie najmniejszą liczbą większą od wszystkich poprzednich. Teraz możemy zastosować ponownie pierwszą zasadę tworzenia, otrzymujemy liczby $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots$; znów ten zbiór nie ma największego elementu, możemy więc dodać liczbę, reprezentującą uporządkowanie wszystkich poprzednich, którą uznamy za najmniejszą większą od nich. Takie dodawanie nowych liczb tam, gdzie wcześniej otrzymany zbiór nie miał elementu największego, Cantor nazwał *drugą zasadą tworzenia.* Stosując obydwie zasady tworzenia można zbudować nieograniczony ciąg liczb pozaskończonych. Cantor skupia się na dwóch klasach liczb: klasa I to liczby naturalne, klasa II to liczby takie, że zbiór liczb poprzedzających je jest przeliczalny (czyli – według dzisiejszej terminologii – zbiór przeliczalnych liczb porządkowych). Pokazuje, że te dwie klasy nie są równoliczne; dowodzi też, że każdy podzbiór klasy II jest albo skończony, albo równoliczny z klasą I, albo równoliczny z klasą drugą. Innymi słowy, moc N jest najmniejszą mocą nieskończoną, a moc klasy II – najmniejszą mocą, większą od mocy N.

To jest początek. Dalej w pracy pojawiają się zbiory dobrze uporządkowane i rozróżnienie między liczbami kardynalnymi a porządkowymi, własności zbiorów dobrze uporządkowanych, rozwinięta arytmetyka liczb pozaskończonych. Wreszcie jest tu efekt jego wieloletnich starań, czyli charakteryzacja continuum liczbowego: jest to mianowicie zbiór doskonały (a więc równy zbiorowi swoich punktów skupienia) i spójny (czyli taki, że każde dwa jego punkty można połączyć *skończonym* ciągiem punktów w ten sposób, aby odległość między sąsiednimi była dowolnie mała). Zauważmy przy okazji, że słynny *zbiór Cantora* pojawia się w tej pracy właśnie po to, by wykazać, że doskonałość zbioru jeszcze nie wystarcza do jego ciągłości.

Trudno tu omawiać wszystkie wyniki, zawarte w *Grundlagen*. Warto jednak dostrzec dwie rzeczy, nieco drugorzędne z punktu widzenia samej teorii. Pierwsza z nich, to użycie przez Cantora symbolu „ω" zamiast „∞". Ten drugi symbol tradycyjnie reprezentował nieskończoność, którą można nazwać *potencjalną*, taką, która tak naprawdę nie istnieje, a służy jedynie wyrażeniu faktu, że jakaś wielkość może być dowolnie duża lub dowolnie mała. Poprzez wprowadzenie nowego symbolu dla „pierwszej" nieskończoności Cantor podkreśla, że mówi tu o pewnym istniejącym, dobrze określonym obiekcie, o *aktualnej* nieskończoności. To przeciwstawienie: *potencjalna – aktualna*, nie nowe przecież, okazało się być sprawą kluczową w odbiorze dzieła Cantora. I druga rzecz: świadom kontrowersyjności przyjęcia aktualnej nieskończoności w postaci liczb pozaskończonych, Cantor wiele miejsca poświęca w pracy na filozoficzne uzasadnienie swojej teorii. Wie, że same wyniki matematyczne mogą nie być wystarczające do tego, by jego koncepcja została zaakceptowana, ale wie też, że nie ma odwrotu, że tej koncepcji nie może odrzucić niezależnie od potęgi jej przeciwników. Odnotujmy tu krótko ciekawy argument – nie jedyny – który przytoczył Cantor w obronie naturalności liczb pozaskończonych. Otóż powstają one z liczb naturalnych tak samo jak liczby niewymierne powstają z liczb wymiernych: każda liczba nieskończona jest reprezentantem pewnego nieskończonego zbioru liczb poprzedzających ją (a pierwsza liczba nieskończona reprezentuje zbiór liczb naturalnych), podobnie jak każda liczba niewymierna jest reprezentantem pewnego nieskończonego zbioru liczb wymiernych. Nie można zatem akceptować liczb niewymiernych i jednocześnie odrzucać liczby pozaskończone.

Zatrzymajmy się jeszcze chwilę przy ostatniej pracy z cyklu. Ukazała się rok później i ukazywała zastosowania liczb pozaskończonych do opisu pochodnych zbioru (a więc powrót do punktu wyjścia – w jakże zmienionej już sytuacji!). Powraca tu Cantor do jeszcze jednego, ciągnącego się od dłuższego czasu, wątku: dowodzi, że każdy domknięty podzbiór prostej mocy większej niż moc zbioru N jest z nią równoliczny i zapowiada, że korzystając z aparatu wprowadzonego w poprzedniej pracy, przedstawi niedługo dowód tego faktu także dla zbiorów, które domknięte nie są.

Ten problem, *hipoteza continuum*, dręczył go od tej pory stale. Nie rozwiązał go, bo – jak się okazało blisko 80 lat później – nie mógł, a niepowodzenie to przyczyniło się do pogłębienia frustracji, spowodowanej m.in. licznymi atakami na jego teorię (przede wszystkim ze strony wielkiego Kroneckera, który nie dopuszczał żadnych konstrukcji, nie dających się otrzymać z liczb naturalnych poprzez podstawowe działania arytmetyczne). Całkowite załamanie nastąpiło w roku 1885, a bezpośrednim jego sprawcą był szwedzki matematyk Gösta Mittag-Leffler, największy matematyczny sojusznik Cantora, jeden z nielicznych, którzy przyjęli i propagowali cantorowską teorię.

Nie mogąc poradzić sobie z hipotezą continuum, Cantor zajął się teorią porządków, a w szczególności typami porządkowymi (a więc już nie tylko zbiorami dobrze uporządkowanymi). Przygotował dwie krótkie prace i posłał je do Mittag-Lefflera, redaktora *Acta Mathematica*, gdzie publikował francuskie tłumaczenia swoich prac, w tym wszystkich prac z cyklu *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*. I oto Mittag-Leffler pisze do niego list, w którym gorąco odradza mu publikowanie tych prac. Powiada, że w sytuacji, gdy dzieło Cantora napotyka takie opory, nie powinien on drukować prac tak niepełnych jak te, które teraz przysłał, gdyż może to spowodować, że jego pomysły zostaną całkowicie zdyskredytowane.

To przechyliło szalę. Uraz wywołany odmową ze strony przyjaciela, brak jakiegokolwiek postępu w pracy nad hipotezą continuum, napięcie wywołane ciągłą walką o swoje racje spowodowały, że Cantor praktycznie wycofał się z matematyki. Zajął się trochę filozofią, trochę teologią, trochę historią. Pierwszy nowy wynik matematyczny pojawił się dopiero w 1891 roku i został przedstawiony przez Cantora w odczycie, który wygłosił na pierwszym kongresie Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego, do którego powstania bardzo się przyczynił i którego został pierwszym prezesem. Wynik nie byle jaki: twierdzenie, zwane dzisiaj *twierdzeniem Cantora*, w którego dowodzie Cantor stosuje po raz pierwszy metodę przekątniową.

Przerwijmy tu opis narastania teorii mnogości. Proces ten był spleciony nierozerwalnie z rozwojem świadomości Cantora, jego rozumienia i traktowania nieskończoności.

Pytanie o nieskończoność towarzyszyło filozofii i teologii od bardzo dawna. Jednym z głównych przedmiotów sporu był charakter nieskończoności: czy może istnieć nieskończoność dokonana, *aktualna*? Czy też nieskończoność jest jedynie procesem, nieograniczonością, możliwością dodawania wciąż nowych i nowych obiektów, bez możliwego końca? A więc: czy jest tylko nieskończonością *potencjalną*? Arystoteles odrzucał możliwość rozważania nieskończoności aktualnej. To samo stanowisko zajmowali teologowie chrześcijańscy: przyjęcie istnienia nieskończoności w formie dokonanej stanowi wszak świętokradcze sprzeniewierzenie się naturze Boga, który – jedyny – jest absolutną nieskończonością. Spinoza i Leibniz dodawali: absolut jest nieopisywalny, bo opisany stałby się skończony. Przeciwnikiem aktualnej nieskończoności był sam wielki Gauss, który uznawał ją jedynie jako *façon de parler*, sposób mówienia o pewnych granicach. I wreszcie współcześni: wspomniany już Kronecker i wielu innych, matematyków i filozofów.

Cantor polemizował ze wszystkimi przeciwnikami aktualnej nieskończoności. Jeśli Arystoteles twierdził, że nieskończone liczby istnieć nie mogą, bo przy stosowaniu działań arytmetycznych pochłaniałyby liczby skończone, to Cantor pisał, że błędem jest przypisywanie nowym bytom własności odziedziczonych po bytach już rozpoznanych; poza tym, jeśli nawet np. $1 + \omega = \omega$, to już $\omega + 1 \neq \omega$. Teologów przekonywał, że istnienie zbiorów nieskończonych jest dowodem wielkości Boga, a nie jego zaprzeczeniem – i uzyskał ich poparcie w latach, kiedy porzucił matematykę; był to okres, kiedy Kościół poszukiwał naukowej podstawy dla swojej doktryny i dążył do pozyskania najlepszych umysłów epoki do tego celu. U Leibniza znajdował argumenty przemawiające za nieskończonością dokonaną: przecież świat monad, z których powstają wszelkie zjawiska, jest nieskończony. (Zabawne, że w jednej z prac Cantor próbował wskazać zastosowania swojej teorii liczb pozaskończonych do innych dziedzin nauki i sformułował hipotezę, że zbiór monad materialnych jest takiej mocy, jak I klasa liczbowa, a zbiór monad eterycznych jest takiej mocy, jak II klasa liczbowa. Wnioskował stąd, że liczby pozaskończone mogą być bardzo przydatne w rozwiązywaniu problemów fizycznych czy chemicznych.) Wobec matematyków używał argumentów matematycznych, odwołując się do naturalności pojawiania się liczb pozaskończonych, porównując proces ich powstawania z innymi konstrukcjami, mniej lub bardziej powszechnie akceptowanymi. I w ostatecznym rozrachunku o sukcesie koncepcji Cantora zadecydowało to, co zwykle decyduje w dłuższej perspektywie o sukcesie czy porażce nowej teorii: jej spójność i przydatność. Jeśli dziś operujemy swobodnie zbiorami nieskończonymi nie zastanawiając się nad filozofią, która się w nich kryje, to zawdzięczamy to w dużej mierze wytrwałości Cantora i głębokości jego teorii.

*

Główną cechą przełomu, rozpoczętego przez Cantora, jest niewątpliwie oswojenie nieskończoności. Nie tylko to jednak jest powodem tego, że matematyka „po Cantorze" wygląda inaczej. Do potocznego i powszechnego języka matematyki weszło pojęcie zbioru – dowolnego, już nie tylko liczbowego – pojęcie, któremu towarzyszyło bogate instrumentarium, pozwalające traktować je jako obiekt matematyczny i wykorzystywać do opisu różnorodnych zjawisk matematycznych. Trudno sobie wyobrazić topologię, teorię modeli, analizę funkcjonalną i wiele innych dziedzin matematyki bez takiej podstawy. Wraz z rozszerzeniem uniwersum liczbowego rozszerzyły się granice matematyki, sięgając struktur niedostrzegalnych i tym bardziej nieopisywalnych dotychczasowymi metodami, a samo pojęcie liczby nabrało nowych, nieoczekiwanych znaczeń. A poza tym: o ileż uboższa byłaby współczesna matematyka bez luk pozostawionych przez Cantora, łącznie z luką, w którą wpadło samo pojęcie zbioru, co doprowadziło do ujawnienia tzw. *paradoksów* teorii mnogości?

W wielu polskich uczelniach studenci poznają podstawy cantorowskiej teorii mnogości w ramach wykładu, którego nazwa brzmi: *Wstęp do matematyki*. Jest to bardzo adekwatne określenie roli, jaką pełni dzisiaj to, co stworzył Cantor i jest to jednocześnie najlepszy wyraz zmian, jakie nastąpiły w matematyce w ciągu tych ponad stu lat, które upłynęły od jego pierwszych prób zrozumienia matematycznymi metodami owej niezwykłej złożoności świata wciąż nas zachwycającej.

*

Przygotowując ten tekst, korzystałem w dużym stopniu z książki Josepha W. Daubena *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Harvard University Press, 1979). Gorąco ją polecam wszystkim, którzy chcą prześledzić rozwój myśli Cantora i poznać otoczenie, w którym ten rozwój się dokonywał.