Co to są teorie aksjomatyczne

Agnieszka WOJCIECHOWSKA, Wrocław

Często można usłyszeć opinię, że najbardziej charakterystyczną cechą matematyki jest jej dedukcyjny charakter, a to z kolei rozumie się w ten sposób, że teorie matematyczne są teoriami aksjomatycznymi. Spróbujmy w tym miejscu wyjaśnić co to są teorie aksjomatyczne i jakie jest ich miejsce w matematyce.

Zacznijmy od przykładu – przypomnijmy w nim dowód dobrze znanego faktu, że pierwiastek z 2 jest liczbą niewymierną i zanalizujmy szczegóły tego rozumowania.

Jak pamiętamy, dowód przeprowadza się metodą niewprost.

Przypuśćmy zatem, że $\sqrt{2}$ to liczba wymierna, a jako taka może być ona zapisana jako ułamek o całkowitym liczniku i mianowniku. Możemy więc znaleźć liczbę naturalną, która pomnożona przez $\sqrt{2}$ daje w wyniku liczbę całkowitą różną od zera. Niech n będzie najmniejszą taką liczbą. Mamy wtedy $n > 0$ i $n\sqrt{2}$ jest liczbą calkowitą. Z nierówności spełnianych przez $\sqrt{2}$ wynika, że

$$n < n\sqrt{2} < 2n,$$

a stąd

$$0 < n\sqrt{2} - n < n$$

przy czym różnica $n\sqrt{2} - n$ jest liczbą naturalną. Oznaczmy ją k. Mnożąc k przez $\sqrt{2}$ otrzymujemy różną od zera liczbę

$$k\sqrt{2} = (n\sqrt{2} - n)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2},$$

która, jako różnica dwóch liczb całkowitych, jest liczbą całkowitą. Tak więc k jest liczbą naturalną, która pomnożona przez $\sqrt{2}$ daje wynik naturalny, przy czym $k < n$, co jest sprzeczne z wyborem liczby n jako najmniejszej takiej liczby. Sprzeczność ta dowodzi, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Przeanalizujmy, z czego korzystaliśmy w tym dowodzie. Po pierwsze, z definicji liczby wymiernej. Po drugie, z własności mnożenia i nierówności. Po trzecie, co jest dla nas najbardziej interesujące, z zasady minimum dla liczb naturalnych (przy wyborze liczby n). No i oczywiście z prawa logiki umożliwiającego przeprowadzanie dowodów metodą niewprost. Tym jednak nie będziemy się w tej chwili zajmować, skupiając się na czysto matematycznej stronie zagadnienia.

Definicji nie ma co dyskutować. Własności działań i nierówności na liczbach całkowitych są łatwe do wyprowadzenia wprost z definicji. Z czego możemy jednak wyprowadzić zasadę minimum? Oto jej pełne brzmienie:

ZASADA MINIMUM: Każdy niepusty zbiór liczb naturalnych posiada element najmniejszy.

Spróbujmy to uzasadnić. Niech więc A będzie niepustym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a x – jego dowolnym elementem. Jeśli x jest najmniejszym elementem A, to kończymy rozumowanie, jeśli nie, to znajdujemy element $y \in A$ taki, że $y < x$ i z kolei sprawdzamy czy y jest najmniejszy w A, i tak dalej. W ten sposób postępując, w końcu dojdziemy do najmniejszego elementu zbioru A. Co to jednak znaczy *w końcu*? Jaką mamy gwarancję, że to postępowanie się skończy? Taką gwarancję daje właśnie ... Zasada Minimum, którą chcieliśmy udowodnić.

Możemy też podjąć próbę udowodnienia zasady minimum na przykład metodą niewprost.

Przypuśćmy, że A jest niepustym zbiorem liczb naturalnych, nie posiadającym najmniejszego elementu. Tak więc wszystkie elementy A są większe niż 0. Ponadto, jeśli liczba naturalna n jest mniejsza od każdego elementu zbioru A, to tę samą własność ma liczba $n + 1$ – w przeciwnym bowiem razie byłaby ona najmmiejszym elementem zbioru A. Tak więc zbiór wszystkich liczb, które są mniejsze od każdego elementu zbioru A, zawiera 0 oraz dla dowolnego elementu n zawiera też $n + 1$. Oczywiście, jest to typowa sytuacja dla zastosowania zasady indukcji: wprost z niej wynika, że wspomniany zbiór zawiera wszystkie liczby naturalne. Każda liczba naturalna jest więc mniejsza od wszystkich elementów zbioru A, skąd wynika, że A jest pusty. To daje nam żądaną sprzeczność.

To jednak nie rozwiązuje naszego problemu. Pozostaje bowiem pytanie: jak udowodnić zasadę indukcji, którą wykorzystaliśmy powyżej. Przypomnijmy jej treść:

ZASADA INDUKCJI: Niech T będzie takim zbiorem liczb naturalnych, że $0 \in T$ i dla każdego $n \in T$ mamy $n + 1 \in T$. Wtedy wszystkie liczby naturalne należą do T.

Spróbujmy to udowodnić. Niech więc T spełnia powyższe założenia i przypuśćmy, że nie wszystkie liczby naturalne należą do T. Oznaczmy przez n pierwszą liczbę naturalną nie należącą do T. Jest wtedy $n > 0$, a więc n jest postaci $m + 1$ dla pewnego m, przy czym z definicji n wynika, że $m \in T$. To jednak pociąga za sobą $n \in T$, co daje sprzeczność.

Ten dowód, jakkolwiek poprawny, nie może nas zadowolić. Wybierając bowiem n jako najmniejszą liczbę nie należącą do T, wykorzystujemy oczywiście zasadę minimum – to ona gwarantuje nam istnienie takiej liczby. Tą drogą nie możemy więc osiągnąć naszego celu, jakim jest udowodnienie zasady minimum. Możemy oczywiście sformułować inne zasady, na których można by się oprzeć w dowodach zasady minimum bądź zasady indukcji – ale z kolei te nowe zasady trzeba byłoby udowodnić...

Jest to chyba właściwy moment, aby powiedzieć sobie, że nie możemy udowodnić wszystkiego. Jakieś fakty zmuszeni jesteśmy zaakceptować bez dowodów, aczkolwiek w wyborze tych faktów mamy pewną swobodę. Te fakty, które następnie służą jako podstawa dowodów to właśnie AKSJOMATY.

Tak więc chcąc stworzyć teorię opisującą liczby naturalne, trzeba najpierw sformułować aksjomaty liczb naturalnych – może wśród nich być zasada minimum lub zasada inducji – a następnie z nich wyprowadzać twierdzenia o liczbach naturalnych.

Kolejny problem to sposób wyboru aksjomatów. Oczywiście należy wybrać własności nie podlegające wątpliwości, zgodne z doświadczeniem. Zestaw aksjomatów powinien być możliwie najmniejszy, a równocześnie wystarczająco obszerny, aby w oparciu o niego dało się przeprowadzić kompletne dowody, lub co więcej, aby stanowił definicję zbioru liczb naturalnych (jako jedynej struktury spełniającej aksjomaty). Powinien też mieć czytelną strukturę. Te wszystkie postulaty można sformułować precyzyjnie w języku logiki matematycznej, co jednak bynajmniej nie ułatwia ich spełnienia. Nie wchodząc głębiej w rozważania tych logicznych problemów zajmijmy się jeszcze aksjomatyką liczb naturalnych.

Aksjomatyka ta została po raz pierwszy sformułowana przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano w końcu XIX wieku. Przytoczmy ją w wersji opisanej przez Jana Mikusińskiego w *Wiadomościach Matematycznych*.

Aksjomaty opisują strukturę porządkową liczb naturalnych. Oto one.

A.1. Dla dowolnych x, y, z, jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.

A.2. Dla dowolnych x, y zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

A.3. Zasada minimum.

A.4. Zasada maksimum: Każdy niepusty i ograniczony zbiór liczb naturalnych ma element największy.

A.5. Zbiór wszystkich liczb naturalnych nie jest ograniczony.

Aksjomaty te są wystarczające do udowodnienia wszystkich porządkowych własności liczb naturalnych. Liczba 0 może być zdefiniowana jako najmniejszy element zbioru wszystkich liczb naturalnych, a $n+1$ jest, dla każdego n, najmniejszym elementem zbioru $\{x : n < x\}$. Mając te definicje można sformułować i udowodnić zasadę indukcji. W dowodzie, którego ideę przedstawiliśmy powyżej, należy wykorzystać zasadę maksimum dla wykazania, że jeśli $n > 0$, to $n = k + 1$ dla pewnego k. Pozostaje wprowadzić aksjomaty dla dodawania i mnożenia, aby mieć pełną arytmetykę liczb naturalnych.

Podobną metodą można podać aksjomatyczny opis liczb rzeczywistych, a także przestrzeni euklidesowej – jest to aksjomatyczna geometria euklidesowa.

Wszystkie te przykłady mają wspólną jedną charakterystyczną cechę. Każda z tych teorii powstała po to, by jednoznacznie opisać jeden, konkretny obiekt matematyczny, badany przez matematykę od dawna. Chodzi tu więc nie tyle o odkrycie nowych faktów, co o pewien sposób systematyzacji czy hierarchizacji własności już znanych. Zastosowana metoda polega na wyborze niektórych, poznanych przez wieloletnie matematyczne doświadczenie, własności opisywanego obiektu i uznaniu ich za podstawowe, niekwestionowalne – **aksjomaty**, a następnie na wyprowadzaniu z nich pozostałych własności metodą czystego rozumowania, bez odwoływania się do doświadczenia czy obserwacji. Wszystko to razem: aksjomaty, metody rozumowania i otrzymane twierdzenia, stanowi właśnie TEORIĘ AKSJOMATYCZNĄ. Aksjomaty dobrane być powinny przy tym w taki sposób, aby opisywać tylko jedną, z góry wybraną, strukturę, a nie jakieś różne od niej twory matematyczne.

Ponieważ wspomnieliśmy już geometrię euklidesową, widzimy, jak stara jest metoda aksjomatyczna w matematyce i gdzie należy doszukiwać się jej początków. Zanim stała się częścią kultury matematycznej, była elementem greckiej myśli filozoficznej. Dedukcja, a także aksjomatyzacja, jako sposób organizacji myślenia i dyskusji, była nieodłączną tej filozofii częścią, miała służyć do wprowadzenia ładu i hierarchii w świat idei. Sukces udało się odnieść jedynie w geometrii. Matematyka okazała się najbardziej podatna na takie traktowanie.

W nauce nowożytnej możemy spotykać także inne przykłady takiego podejścia: prawa Kopernika i Keplera, dynamika Newtona, metodologia Leibniza. Pewne obserwowane fakty fizyczne zostały uznane za aksjomaty (choć niekoniecznie tak nazwane) i na nich zbudowano – dedukcyjnie – całą teorię. Metoda ta jest stosowana również we współczesnej fizyce.

Teorie, o których mówimy, można by nazwać TEORIAMI JEDNEGO OBIEKTU – obiektem tym są np. liczby, przestrzeń, układ planetarny itp. Bardziej współczesnym, ale i bardziej skomplikowanym przykładem matematycznym jest teoria mnogości.

Teorie te dobrze realizują cel postawiony przez Greków: uporządkowanie, hierarchizacja wiedzy o danym obiekcie oraz stworzenie metody odkrywania nowych jej własności.

Ponieważ nie formułowaliśmy żadnych warunków nakładanych na postać aksjomatów czy język, w jakim je formułujemy, nazwiemy te teorie NIEFORMALNYMI TEORIAMI AKSJOMATYCZNYMI.

Przeciwieństwem *nieformalnych* są *sformalizowane* teorie aksjomatyczne. Aby sformalizować teorię, należy:

1. opisać formalny język, w którym zapisujemy aksjomaty i twierdzenia,

2. określić metody dowodzenia twierdzeń,

3. nałożyć na teorię warunek, aby rzeczywiście stanowiła ona opis danego obiektu (i tylko jego),

4. nadać odpowiednią strukturę zbiorowi aksjomatów.

Niestety okazuje się, że w przypadku teorii jednego obiektu przeprowadzenie tak zaplanowanej formalizacji jest w większości przypadków niemożliwe. Na przykład w przypadku arytmetyki liczb naturalnych język wspomniany w punkcie 1. powinien zawierać symbole arytmetyczne, jak + czy $<$, a nie mnogościowe jakim jest $\in$. Jednak bez użycia symbolu należenia nie możemy zapisać zasady minimum czy też zasady indukcji. Jeśli zaś włączymy do języka ten symbol, to dla zapewnienia właściwej jego interpretacji musimy dołączyć pewne aksjomaty dotyczące relacji należenia – i teoria nasza przestaje być tylko arytmetyką, zawiera bowiem fragment teorii mnogości.

Próbując ominąć tę trudność inną drogą możemy zamiast np. zasady minimum przyjąć cały zestaw aksjomatów zapisanych w języku arytmetyki i zastępujących zasadę minimum w jej standardowych zastosowaniach, ale okazuje się, że w ten sposób otrzymujemy teorię znacznie słabszą (jest to tzw. *arytmetyka pierwszego rzędu*).

Postulat 3 można formułować w słabszej lub mocniejszej wersji. Zawsze żądamy oczywiście, aby aksjomaty były spełnione przez wyjściowy obiekt (co implikuje, iż nie są one między sobą sprzeczne). Do tego można dodać warunek, by każda własność obiektu dała się wyprowadzić z aksjomatów (oczywiście własność zapisana w języku, o którym mowa w punkcie 1.), bądź też – co więcej – aby dany obiekt był **jedynym** (z dokładnością do izomorfizmu) modelem tej teorii. W pierwszym przypadku mówimy o teorii *zupełnej*, w drugim – o *kategorycznej*.

W punkcie 4. żądać można, by zbiór aksjomatów był skończony, albo tylko by istniał **algorytm** pozwalający – krok po kroku – wypisać wszystkie aksjomaty.

Wszystkie te postulaty pod adresem teorii wyglądają sensownie. Jednak rzadko kiedy są do pogodzenia. Jak udowodnił Goedel, nie istnieje teoria sformalizowana, spełniająca warunki 1–4 i opisująca liczby naturalne lub jakąkolwiek strukturę matematyczną zawierającą liczby naturalne. Nie ma więc sformalizowanej, zupełnej, kategorycznej teorii liczb naturalnych, liczb rzeczywistych itd. Jest to bardzo głęboki rezultat podstaw matematyki. Tłumaczy on dlaczego matematycy pracują w teoriach **nieformalnych** i dlaczego trudno jest uczyć aksjomatyzacji.

Mówiliśmy dotychczas o teoriach typu „greckiego", opisujących jeden obiekt. W matematyce rozważa się jednak również inny rodzaj teorii aksjomatycznych – takich, które opisują możliwie szeroką klasę obiektów o podobnych własnościach. Źródłem takiej teorii jest właśnie spostrzeżenie, że pewne istotnie różne struktury matematyczne mają niektóre cechy wspólne. Wybierając te zasadnicze wspólne cechy możemy określić całą klasę struktur – wszystkich, którym dane własności przysługują. Cokolwiek możemy udowodnić opierając się na wybranych własnościach jako na aksjomatach, jest prawdziwą własnością każdej ze struktur należących do tej klasy.

Klasycznym przykładem takiej sytuacji jest spostrzeżenie podobieństwa pomiędzy algebraiczną strukturą zbioru liczb całkowitych i zbioru wielomianów. W obydwu określone jest dodawanie i mnożenie spełniające te same prawa, w obydwu mówi się o dzieleniu z resztą, podzielności, największym wspólnym dzielniku itd. Oczywiście są i różnice – np. zbiór liczb całkowitych jest liniowo uporządkowany przez relację $<$, a w zbiorze wielomianów porównujemy tylko ich stopnie. Jednak to, co możemy udowodnić o liczbach całkowitych opierając się na wspomnianych wspólnych własnościach, pozostaje prawdziwym twierdzeniem o wielomianach, a co więcej – **dowód jest taki sam**. Nie warto oczywiście powtarzać wiele razy tego samego dowodu. Wprowadzamy więc nazwę: *pierścień* – jest to zbiór, w którym określone są dwa działania: dodawanie i mnożenie, spełniające wspomniane wcześniej warunki. **Teoria pierścieni** to aksjomatyczna teoria, której aksjomatami są te właśnie warunki. Tak więc pierścieniami są wszystkie modele tej teorii, a każde twierdzenie jakie możemy wyprowadzić z jej aksjomatów, jest prawdziwą własnością każdego pierścienia.

Twierdzenia te odnoszą się, oczywiście, nie tylko do wyjściowych dwóch pierścieni – liczb całkowitych i wielomianów, ale i innych, o których początkowo wcale nie myśleliśmy (np. pierścień funkcji ciągłych).

Teorię aksjomatyczną powstałą w opisany powyżej sposób nazwiemy TEORIĄ UOGÓLNIAJĄCĄ. Oczywiście własności logiczne takich teorii są inne niż w przypadku teorii jednego obiektu. Są one dalekie od zupełności: różne pierścienie posiadają rozmaite własności, które nie dają się wyprowadzić z aksjomatów. Nie ma za to żadnych kłopotów z formalizacją – teoria od razu jest w postaci sformalizowanej (prawie).

To właśnie opisany sposób powstania teorii uogólniających jest drogą wprowadzania nowych pojęć we współczesnej matematyce, takich jak grupa, pierścień, ciało, zbiór uporządkowany, przestrzeń liniowa, przestrzeń topologiczna itp.

Jednak nie można powiedzieć, że matematyk specjalizujący się np. w teorii pierścieni, zajmuje się aksjomatyczną teorią pierścieni. Wyprowadzanie twierdzeń z aksjomatów tej teorii jest tylko niewielką cząstką takiej pracy. Poza nią jest badanie specyficznych własności różniących pierścienie między sobą, klasyfikacja pierścieni, relacje między pierścieniami itp.

Tak więc to, co algebraicy rozumieją pod nazwą „teoria pierścieni", nie jest sformalizowaną teorią o wspominianych wyżej aksjomatach. Jest to nieformalna teoria mówiąca o rozmaitości pierścieni, ich podpierścieniach, homomorfizmach itd., a wszystko to zanurzone jest w kontekst teorii mnogości. Każdy pierścień jest modelem sformalizowanej teorii pierścieni – właśnie te modele, a nie sama teoria są przedmiotem badań.

Ponownie więc, choć od innej strony, dochodzimy do wniosku, że podejście nieformalne jest dla matematyki ważniejsze niż formalizacja. Mówienie o matematyce jako o teorii dedukcyjnej w logicznym rozumieniu tego słowa zubaża więc nasze rozumienie matematyki.