

Aspekty numeryczne w zagadnieniu homotetycznego pokrycia figury

Stanisław FUDALI, Szczecin

Aspekt egzystencjalny

O zagadnieniu pokrycia homotetycznego figury pisano już w *Delcie* [8]. Stąd przeto wiadomo, że zagadnienie to sprowadza się do pytania: Jaka jest najmniejsza liczba pomniejszonych homotetycznych kopii wypukłej figury Q niezbędnych do pokrycia Q ? Rzecz zrozumiała, chodzi tu o figurę Q dowolnego wymiaru n , a przez *pokrycie* figury Q rozumie się taką rodzinę podzbiorów Q_1, \dots, Q_s , że dla każdego punktu $p \in Q$ istnieje $i \in \{1, \dots, s\}$, że $p \in Q_i$.

Dla $n = 2$ odpowiedź na to pytanie została podana przez Hochberga i Markusa [6], której można nadać sformułowanie:

Twierdzenie (Hochberg, Markus). *Dla każdej płaskiej figury istnieje homotetyczne pokrycie tej figury składające się z trzech członów, jeżeli jest różna od równoległoboku, a jeżeli jest równoległobokiem – to z czterech.*

Dla $n = 3$ znana jest odpowiedź częściowa, dotycząca niektórych tylko, a nie dowolnych figur trójwymiarowych [7]; można ją sformułować następująco:

Twierdzenie (Lassak). *Dla każdej 3-wymiarowej środkowosymetrycznej figury Q istnieje homotetyczne pokrycie tej figury składające się z co najwyżej ośmiu członów.*

(Oryginalne twierdzenia brzmią nieco inaczej). Oba te twierdzenia mają charakter egzystencjalny: orzekają o *istnieniu* pokrycia homotetycznego, składającego się z określonej liczby członów. Są one równocześnie potwierdzeniem – pierwsze w pełni dla $n = 2$, drugie częściowo dla $n = 3$ – sformułowanej w terminach pokryć homotetycznych hipotezy Hadwiger'a (zob. [8]): Najmniejsza liczba (oznaczamy ją $a_n(Q)$) pomniejszonych kopii figury $Q \subset E^n$ potrzebnych do pokrycia Q jest zawarta między $n + 1$ i 2^n ; w ujęciu symbolicznym sprowadza się to do nierówności

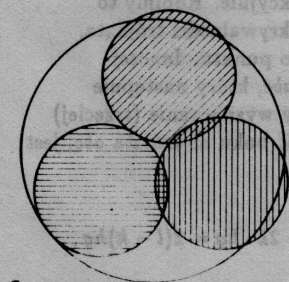
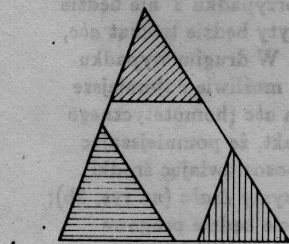
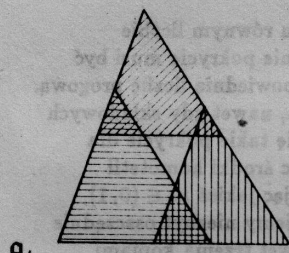
$$n + 1 \leq a_n(Q) \leq 2^n.$$

Liczba progowa

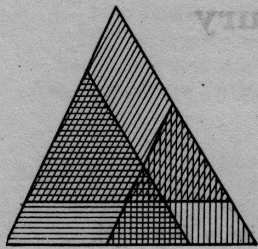
W 1977 r. J. Bielousow [1] zwrócił uwagę na oczywisty, aczkolwiek w egzystencjalnym aspekcie zagadnienia pomijany fakt, że nie każde trzy pomniejszone kopie mogą stanowić pokrycie dowolnej figury płaskiej; ilustruje to rysunek 1. Współczynniki homotetii kopii pokrywających muszą być odpowiednio dobrane, aby trzema kopiami figury Q można było pokryć Q . W związku z tym Bielousow starał się znaleźć najmniejszą liczbę, która potraktowana jako współczynnik homotetii pozwoliłaby na pokrycie figury trzema kopiami. W taki mniej więcej sposób liczba ta została opisana w [1], w [4] zaś została nazwana *liczbą progową figury* i sprecyzowana – powtórzmy tu nieco ogólniejsze jej określenie:

Definicja. Niech $K_n^s(Q)$ będzie zbiorem liczb $k \in (0, 1)$ takich, że s przystających kopii figury Q w przestrzeni n -wymiarowej, otrzymanych przez homotetię o współczynniku k , nie pokrywa Q . Kres górny tego zbioru nazywamy *s-tą liczbą progową figury Q* i oznaczamy $k_n^s(Q)$, tzn. $k_n^s(Q) = \sup K_n^s(Q)$.

Liczebnikowa część tej nazwy związana jest z liczbą składowych w pokryciu a nie z uporządkowaniem liczb progowych. Płaskie figury różne od równoległoboku nie mają pierwszej ani drugiej liczby progowej, bo żadnej z nich nie można pokryć jedną bądź dwiema kopiami; równoległobok nie ma także i trzeciej liczby



Rys. 1

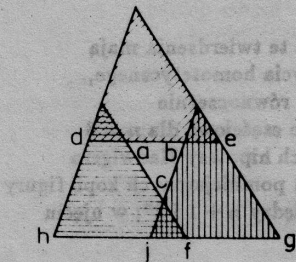


Rys. 2

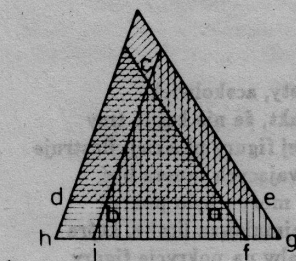
progowej. Z tego samego powodu również żadna figura trójwymiarowa nie ma pierwszej, drugiej ani trzeciej liczby progowej, niektóre z nich nie mają też czwartej, piątej, szóstej, a nawet siódmej – taki jest, na przykład, równoległoscian którego nie uda się pokryć mniejszą od ośmiu liczbą kopii homotetycznych.

W tymże artykule [1] Bielousow udowodnił, że trzecią liczbą progową rodziny płaskich figur różnej od równoległoboku jest $k_2^3(Q) = 2/3$, a równoległoboku – $1/2$. Znaczący to, że jeżeli współczynnik homotetii *każdej* z trzech wziętych do pokrycia kopii figury Q różnej od równoległoboku jest mniejszy od $2/3$, to tymi trzema kopiami nie będzie można pokryć figury Q ; równoległoboku nie będzie można pokryć czterema kopiami, jeżeli współczynnik homotetii *każdej* z nich będzie mniejszy od $1/2$. (Gdy jedna lub dwie kopie mają współczynnik mniejszy od $2/3$, a trzecia – większy od $2/3$, to Q może, ale nie musi, być pokryta tymi kopiami (rys. 2)). Nie znaczy to jednak, że przy współczynnikach homotetii większych lub równych $2/3$ można trzema kopiami pokryć dowolną figurę płaską. Dowolnej płaskiej figury środkowosymetrycznej nie można pokryć trzema kopiami, jeżeli każda z nich uzyskana została przez homotetię o współczynniku mniejszym od $3/4$, chociaż większym od $2/3$. Wykazał to Bielousow w [1], bo udowodnił, że liczbą progową rodziny płaskich figur środkowosymetrycznych jest $3/4$; ta właśnie liczba jest progową dla sześciokąta foremnego [1]. I tu znowu wcale to nie znaczy, że przy współczynnikach nieco większych od $3/4$ uda się trzema kopiami pokryć dowolną figurę środkowosymetryczną; nie uda się pokryć koła, jeżeli współczynnik homotetii *każdej* kopii będzie mniejszy od $\sqrt{3}/2 \approx 0,8660254 \dots$ – ta właśnie liczba jest progową dla koła.

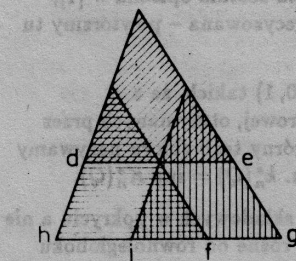
Pokrycie progowe



a.



b



c.

Rys. 3

Pokrycie, którego składowe są kopiami o współczynniku równym liczbie progowej, nazywamy *pokryciem progowym*. Takie właśnie pokrycie musi być wprawdzie skonstruowane, aby można było wyznaczyć odpowiednią liczbę progową. Konstrukcja pokrycia progowego nie zawsze jest prosta, nawet gdy składowych w pokryciu jest niewiele. Stosunkowo łatwo znajduje się takie pokrycie dla trójkąta. Od razu zauważa się bowiem, że umieszczając środki homotetii w wierzchołkach trójkąta T i za współczynnik przyjmując jakies $k_0 \in (0, 1)$, nie pokryjemy T , jeżeli $k_0 < 2/3$ (rys. 3a), bądź pokryjemy niezbyt oszczędnie (pozwalając na duże obszary pokrywane dwiema, a nawet trzema kopiami (rys. 3b)), gdy przyjmniemy $k_0 > 2/3$. W pierwszym przypadku T nie będzie pokryty, mimo że pokryty jest cały jego brzeg; niepokryty będzie trójkąt abc , homotetyczny do T , ale ze współczynnikami ujemnymi. W drugim wypadku T jest pokryty, ale użyte do tego pokrycia kopie nie są możliwie najmniejsze – wszystkie trzy mają część wspólną w postaci trójkąta abc (homotetycznego do T ze współczynnikami dodatnimi). Oczywisty jest fakt, że pomniejszając współczynniki homotetii w tym ostatnim przypadku (pozostawiając środki homotetii nadal w wierzchołkach trójkąta T) pomniejszamy Δabc (na rys. 3b); gdy zmaleje on do punktu, to powstałe wówczas pokrycie będzie progowe (rys. 3c).

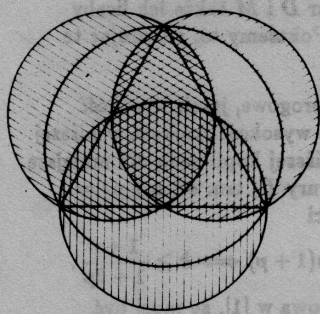
Trójkąta abc na rysunku 3b nie pomniejszamy konstrukcyjnie. Robimy to zupełnie inaczej, a mianowicie znajdujemy warunek pokrywalności trójkąta, tzn. warunek, przy którym Δabc będzie „ściągnięty” do punktu. Inaczej mówiąc, znajdujemy współczynnik homotetii trójkąta abc , który następnie przyrównujemy do zera. Od tego właśnie rozpoczniemy wyznaczanie (trzeciej) liczby progowej trójkąta. Zauważmy, że ab , tzn. długość boku \overline{ab} trójkąta abc , jest różnicą między de i sumą $(de + ae)$, a ponieważ

$$de = k \cdot hg \quad \text{i}$$

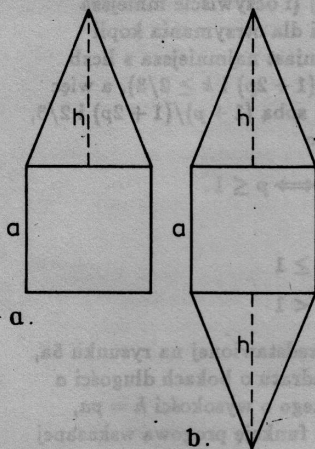
$$bd + ac = hj + fg = hg - (hf + jg - hg) = 2hg - 2k \cdot hg = 2(l - k)hg,$$

$$\text{bo } hf = jg = k \cdot hg, \text{ więc}$$

$$ab = ed - (db + ae) = k \cdot hg - 2(l - k)hg = (3k - 2)hg.$$



Rys. 4

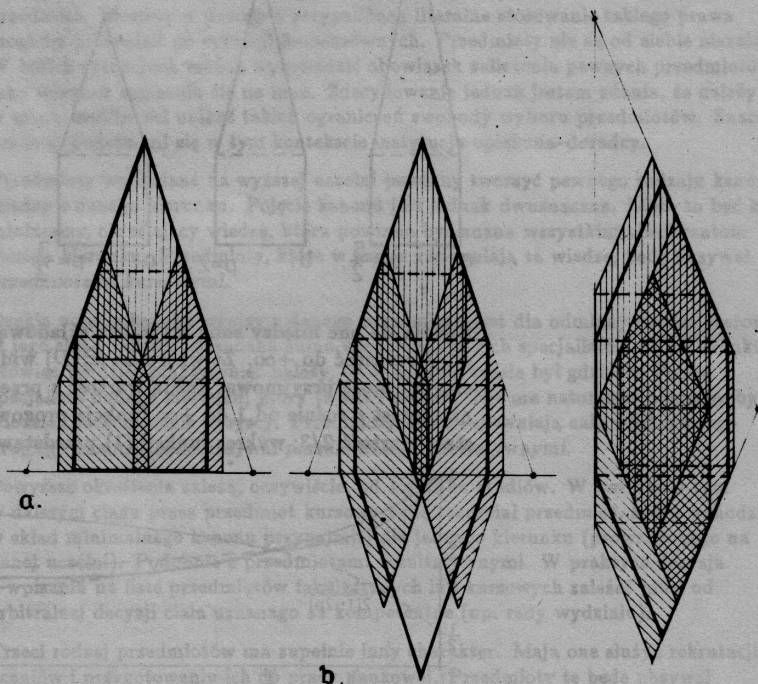


Rys. 5

Znaczący to, że trójkąt abc otrzymujemy z T za pomocą homotetii o współczynniku $k = 3k - 2$, gdzie k jest współczynnikiem homotetii trzech kopii pokrywających T (zakreskowanych na rys. 3b). Trójkąt ten zostanie ściągnięty do punktu, gdy ab zmaleje do zera, tzn. gdy będzie $0 = (3k - 2)hg$, skąd $k = 2/3$. Przy takim współczynniku pokrywających kopii trójkąt abc ściągnięty będzie do punktu, cały trójkąt T będzie pokryty (rys. 3c), a dalsze pomniejszanie współczynnika k doprowadziłoby do sytuacji takiej jak na rys. 3a bądź na rys. 1b. Dowodzi to, że pokrycie przedstawione na rys. 3c jest progowe, a współczynnik kopii w tym pokryciu – jak obliczono wyżej – jest równy $2/3$; jest to (trzecia) liczba progowa trójkąta T (a więc dowolnego trójkąta).

Znajdziemy teraz 3-członowe homotetyczne pokrycie koła K . Wpiszemy w K trójkąt foremny (czyli równoboczny) i każdy jego bok potraktujemy jako średnicę kopii (rys. 4). Rzuca się od razu w oczy fakt, że tak skonstruowane pokrycie koła K jest progowe, bo gdyby zmniejszyć średnicę kopii, to część brzegu (w otoczeniu wierzchołków wpisanego trójkąta) przestałaby być pokryta. Obliczenie liczby progowej w tym wypadku jest bardzo łatwe – jest nią stosunek długości boku wpisanego w K trójkąta równobocznego do długości średnicy koła, a więc $k_2^3(K) = \sqrt{3}/2$.

Konstrukcja pokrycia progowego nie zawsze tak łatwo może być przewidziana. Weźmy bowiem pod uwagę dwie figury: D przedstawioną na rys. 5a i M – na rys. 5b. Pierwsza z nich jest sumą kwadratu o boku długości a i trójkąta równoramiennego o wysokości $h = pa$, gdzie $p \in \mathbb{R}_+$; figura M jest uzupełnieniem figury D do figury środkowosymetrycznej. Pokrycie progowe figury D otrzymuje się za pomocą homotetii o środkach w wierzchołku części trójkątnej i w przecięciu przedłużeń ramion trójkąta z przedłużeniem podstawy (rys. 6a). Gdyby według tego samego schematu obracć środki homotetii dla pokrycia figury M , to trzema kopiami nie udałoby się pokryć M (rys. 6b), co pokażemy dalej. Stosując natomiast ten sam pomysł, ale według innego wzoru – środki homotetii umieszczone w przecięciu przedłużeń ramion trójkątów i przeciwnego im boku kwadratu (rys. 6c) – możemy skonstruować pokrycie progowe figury M .



Rys. 6

Mimo pewnego pokrewieństwa rozważanych tu figur D i M także ich liczby progowe (trzęcie) dla $p > 1/2$ różnią się znacząco. Pokażemy to, znajdując te liczby, najpierw dla D , a następnie dla M .

Pokrycie figury D pokazane na rysunku 6a będzie progowe, jeżeli wysokość trójkąta w najwyższej kopii, tzn. $k \cdot h = k \cdot pa$, plus wysokość trójkąta w niższej kopii (tzn. też $k \cdot h = h \cdot pa$) i plus bok kwadratu niższej kopii będą nie mniejsze od długości boku kwadratu i wysokości trójkąta figury D , tzn. od $a + pa = a(1+p)$, co można zanotować w postaci nierówności

$$2k \cdot pa + k \cdot a \geq a(1+p) \iff (2p+1)k \cdot a \geq a(1+p) \iff k \geq \frac{1+p}{1+2p}$$

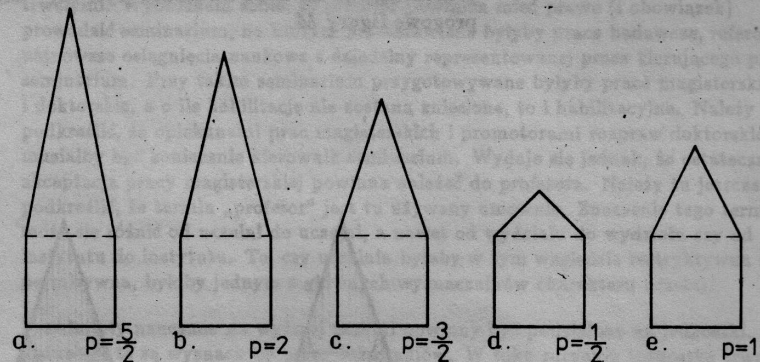
Równocześnie wiadomo wobec Twierdzenia Bielousowa w [1], że musi być $k \geq 2/3$, aby D była pokryta trzema kopiami. Dowolna liczba większa od każdej z tych liczb, tzn. od $2/3$ i od $(1+p)/(1+2p)$ (i oczywiście mniejsza od 1), może być wzięta jako współczynnik homotetii dla otrzymania kopii pokrywających D . Liczbę progową $k_2^3(D)$ jest natomiast najmniejsza z liczb spełniających obie te nierówności (tzn. $k \geq (1+p)/(1+2p)$ i $k \geq 2/3$), a więc $k_2^3(D) = \max(2/3, (1+p)/(1+2p))$. Porównując ze sobą $(1+p)/(1+2p)$ i $2/3$, zauważamy, że $2/3 \leq (1+p)/(1+2p)$, gdy $p \leq 1$, bo

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1+p}{1+2p} \iff 2+4p \leq 3+3p \iff p \leq 1.$$

Wobec tego można zanotować, że

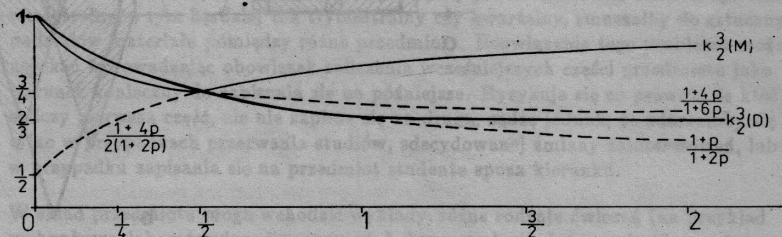
$$(1) \quad k_2^3(D) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{gdy } p \geq 1 \\ \frac{1+p}{1+2p}, & \text{gdy } p < 1 \end{cases}$$

Jest to trzecia liczba progowa nie tylko figury D przedstawionej na rysunku 5a, ale całej rodziny takich figur składających się z kwadratu o bokach długości a i zbudowanego na tym boku trójkąta równoramiennego o wysokości $h = pa$, zależnej od parametru p ; wyrażenie (1) opisuje więc funkcję progową wskazanej rodziny figur. Figury należące do tej rodziny widzimy na rysunku 7.



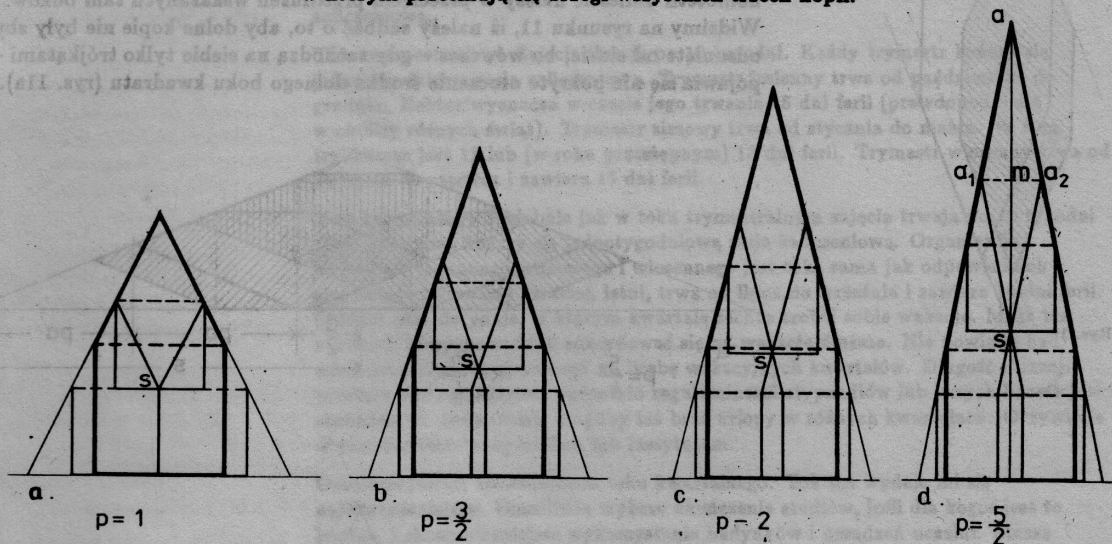
Rys. 7

Różnią się one między sobą trójkątną składową; wysokość tego trójkąta może od 0 wzrastać do $+\infty$. Ze wzoru na $k_2^3(D)$ widać, że zależy ona od p w sposób ciągły i może przyjmować każdą wartość z przedziału $(2/3, 1)$ dla $p \in (0, 1)$, gdy natomiast p rośnie od 1 do $+\infty$ funkcja progowa $k_2^3(D)$ od p nie zależy i ma stałą wartość $2/3$; wykres funkcji (1) przedstawiony jest na rys. 8.



Rys. 8

Niesależność funkcji progowej $k_2^*(D)$ od parametru p w przedziale $(1, +\infty)$ jest interesującym faktem. Na rysunku 9 widzimy kilka przedstawicieli rodziny figur typu D dla różnych wartości p i wydaje się, że tylko dla $p = 1$ (rys. 9a) pokazane jest pokrycie progowe, a dla pozostałych reprezentantów rodziny pokrycia nie są progowe – zachodzą na siebie części kwadratowe dolnych kopii, a także otoczenie wierzchołka w częściach trójkątnych w obu dolnych kopiach zawiera się w części trójkątnej górnej kopii. Wydawać by się mogło, że dla $p > 1$ można jeszcze co najmniej o odrobinę pomniejszyć wszystkie kopie. Gdy jednak dobrze się przyjrzymy tym pokryciom, to zauważymy, że niczego tutaj pomniejszyć się już nie uda. Przy pomniejszaniu kopii pokrywających D w którymkolwiek przykładzie na rys. 9 odsłoni się część wnętrza figury D w otoczeniu punktu s , w którym przecinają się brzozy wszystkich trzech kopii.

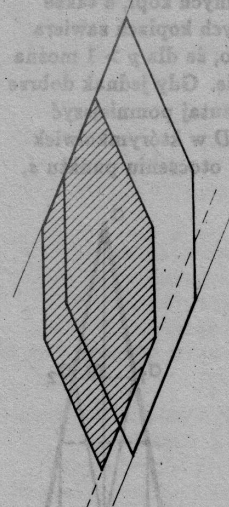


Rys. 9

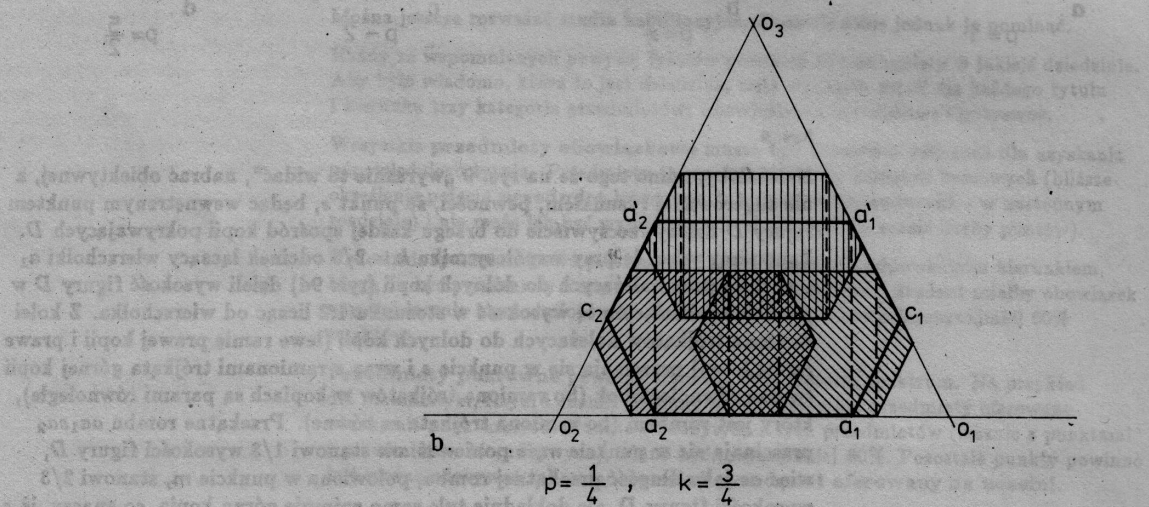
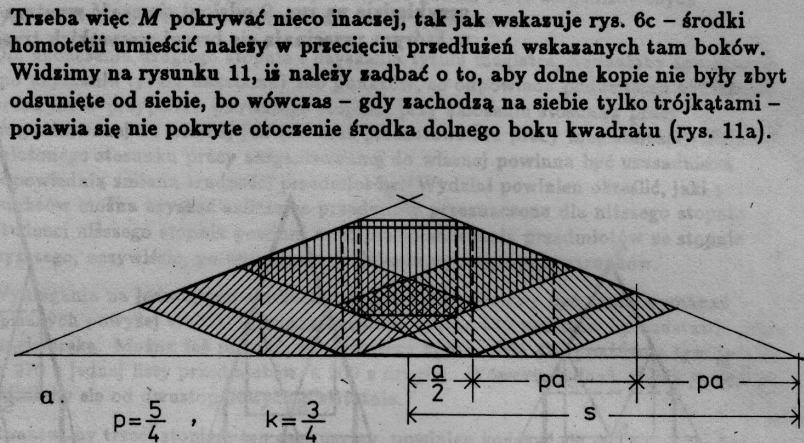
Należałoby, mimo tego że na rys. 9 „wyraźnie to widać”, nabrać obiektywnej, a nie sugerowanej rysunkiem, pewności, że punkt s , będąc wewnętrznym punktem figury D należy rzeczywiście do brzozy każdej spośród kopii pokrywających D . Zauważmy więc, że przy współczynniku $k = 2/3$ odcinek łączący wierzchołki a_1 i a_2 trójkątów należących do dolnych kopii (rys. 9d) dzieli wysokość figury D w punkcie m dzieląc tę wysokość w stosunku 1:2 licząc od wierzchołka. Z kolei ramiona trójkątów należących do dolnych kopii (lewe ramię prawej kopii i prawe ramię lewej) przecinają się w punkcie s i wraz z ramionami trójkąta górnej kopii tworzą równoległobok (bo ramiona trójkątów w kopiach są parami równoległe), który jest rombem (bo ramiona trójkąta są równe). Przekątne rombu aa_1sa_2 przecinają się w punkcie m , a ponieważ am stanowi $1/3$ wysokości figury D , więc as jako długość przekątnej rombu, połowiona w punkcie m , stanowi $2/3$ wysokości figury D , ale dokładnie tyle samo zajmuje górna kopia, co znaczy, iż s – wspólny punkt brzozy dolnych kopii – należy do brzozy górnej kopii. Wobec tego, przy $p < 1$, pokrycie figury D kopiami otrzymanymi przez homotetię o współczynniku $k = 2/3$, przedstawione na rys. 9, jest progowe.

Wydawać by się mogło, że progowe pokrycie figury M , która jest w jakimś sensie uzupełnieniem figury D , otrzyma się automatycznie z progowego pokrycia tej ostatniej. Okazuje się, że wcale tak nie jest, co pokazuje rys. 6b – kopie figury D uzupełnione odpowiednio trójkątami przy przeciwległym boku kwadratu stają się kopiami figury M , ale jej nie pokrywają. Co więcej, nawet przy powiększeniu wszystkich kopii i odpowiednim ich przesunięciu nie udaje się pokryć figury M trzema kopiami, tak aby wierzchołek trójkąta w jednej z tych kopii pokrywał się z odpowiednim wierzchołkiem figury M .

Przyczyna tego faktu jest stosunkowo łatwa do zauważenia, ale na ogół uchodzi uwagi. Mianowicie górna kopia pokrywa tylko wierzchołek górnego trójkąta, więc jedna z dwóch kopii musi wówczas pokryć wierzchołek dolnego trójkąta i jeden z górnych wierzchołków kwadratu. Oba wskazane wierzchołki należą do prostych równoległych zawierających odpowiednie boki trójkątów (górnego i dolnego) figury M . Odległość między obrasami tych boków trójkątów jest w kopii figury M mniejsza niż w M i dlatego, gdy jeden bok w górnym trójkącie kopii pokryje górny wierzchołek kwadratu, to przeciwległy doń bok w dolnym trójkącie kopii nie będzie w stanie pokryć wierzchołka dolnego trójkąta w M (rys. 10).



Rys. 10



Rys. 11

Sytuacja taka nie będzie miała miejsca, gdy od dolnych homotetii zażądamy, aby ich współczynnikiem było $k \geq s/(s + (a/2))$, gdzie $s = (a/2) + 2pa$ jest odległością od środka homotetii do środka dolnego boku kwadratu (sob. rys. 11a); trójkąt $o_i a_i c_i$ dla każdego $i \in \{1, 2\}$ jest bowiem równoramienny, a jego podstawa ma długość $2pa$, bo jest dwukrotnie dłuższa od wysokości części trójkątnej figury M . Wobec tego k może być wyrażony za pomocą tylko p , mianowicie:

$$(2) \quad k \geq \frac{\frac{1}{2} + 2p}{1 + 2p} = \frac{1 + 4p}{2(1 + 2p)}$$

Równocześnie należy sadzać o to, aby górna kopia nie przesunęła się zbyt do góry – mógłby wówczas pojawić się niepokryty obszar w otoczeniu środków górnych boków trójkątnych części figury M (rys. 11b). Aby tego uniknąć, należy zażądać, aby wierzchołek trójkątnej części w górnej kopii należał do boku części trójkątnej dolnej kopii. Jeżeli warunek ten będzie spełniony, to rzut górnej kopii na prostą zawierającą środki homotetii dających obie dolne kopie ma niepustą część wspólną z częścią trójkątną dolnej kopii (por. rys. 11b). Fakt ten może być opisany analitycznie jako

$$k \left(\frac{1}{2} + p \right) + k \cdot 2p \geq \frac{1}{2} + 2p;$$

pierwszy składnik reprezentuje rzut połowy górnej kopii, drugi składnik reprezentuje rzut trójkąta prasy α_i , po prawej stronie jest połowa długości odcinka $\overline{o_1o_2}$. Znak nierówności wskazuje natomiast, że suma dwóch odcinków zawartych w $\overline{o_1o_3}$ jest nie krótsza od $\overline{o_1o_3}$; znaczy to, że górna i dolna kopie mają część wspólną na odcinku części trójkątnej figury M . Z nierówności tej mamy

$$k \geq \frac{\frac{1}{2} + 2p}{\frac{1}{2} + 3p} = \frac{1 + 4p}{1 + 6p}.$$

Najmniejsza liczba spełniająca oba te warunki, tzn. (2) i (3), jest (trzecia) liczbą progową figury M . Porównując ze sobą oba otrzymane wyrażenia, dostaniemy

$$k_2^3(M) = \max \left(\frac{1 + 4p}{1 + 6p}, \frac{1 + 4p}{2(1 + 2p)} \right) = \begin{cases} \frac{1 + 4p}{2(1 + 2p)}, & \text{gdy } p \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1 + 4p}{1 + 6p}, & \text{gdy } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wykres tej funkcji progowej przedstawiony jest na rysunku 8.

Zbiory liczb progowych

Liczbą progową dowolnej figury płaskiej różnej od równoległoboku jest $2/3$, dowolnej środkowosymetrycznej takiej figury jest $3/4$, a koła – $\sqrt{3}/2$. Nasuwa się pytanie: Jakie jeszcze liczby mogą być (trzecimi) progowymi? Inaczej: czy istnieją jakieś płaskie figury, których liczba progowa (trzecia) jest równa dowolnie wziętej liczbie $q \in (2/3, 1)$? Okazuje się, że istnieją takie figury płaskie, bo w [4] mamy

Twierdzenie. Dla każdej liczby $q \in (2/3, 1)$ istnieje figura płaska, która (trzecią) liczbą progową jest q .

Dowód tego faktu jest widoczny na rysunku 8 w postaci wykresu funkcji progowej rodziny figur typu D . Funkcja ta przyjmuje bowiem wszystkie wartości od $2/3$ włącznie do 1 (wyłącznie), wobec czego figura, o której mowa w tym twierdzeniu, może być chociażby figura D dla odpowiedniego $p = (1 - q)/(2q - 1)$ (oblicza się to z równości $k_2^3(D) = q$).

Można postawić podobne pytanie o liczby progowe figur środkowosymetrycznych, a odpowiedź równie łatwo może być odczytana z wykresu funkcji $k_2^3(M)$ na rys. 8; sformujemy ją jako

Twierdzenie. Dla każdej liczby $r \in (3/4, 1)$ istnieje płaska figura środkowosymetryczna, której (trzecią) liczbą progową jest r .

Porównanie wykresów funkcji $k_2^3(D)$ i $k_2^3(M)$ na rys. 8 nasuwa pewne spostrzeżenia. Od razu rzuca się w oczy fakt, że dla p bliskiego zera, a więc gdy D i M niewiele różnią się od równoległoboku (i od siebie), liczba progowa zarówno figury D jak i M jest bliska 1, i że wartości obu tych funkcji maleją dla $p < 1/2$; dla $p = 1/2$ wartości obu funkcji są równe i wynoszą $3/4$. Widać też, iż dla p z przedziału $(0, 1/2)$ wartości funkcji $k_2^3(M)$ są mniejsze od wartości funkcji $k_2^3(D)$. Co jest tego przyczyną? Odpowiedzi nie poszukiwałem, więc jej nie znam, ale oczekuję jej prób od ambitniejszych Czytelników; może któryś z nich wpadnie na przekonujące wyjaśnienie tego faktu. To samo pytanie o przyczynę dotyczy również przedziału $(1/2, +\infty)$, w którym wartości $k_2^3(M)$ są większe od wartości $k_2^3(D)$. Interesujące również byłoby objaśnienie przyczyn stałości funkcji $k_2^3(D)$ na przedziale $(1, +\infty)$. Dlaczego tak się dzieje?

Zwłaszcza, że dla tych samych $p > 1$ wartości funkcji $k_2^3(M)$ stale rosną do 1.

Twierdzenie Hochberga-Markusa, przypomniane na wstępie, wskazuje wyraźnie, że zbiór wszystkich figur płaskich można podzielić na dwie rozłączne klasy ze względu na minimalną liczbę kopii niezbędnych do pokrycia figury płaskiej. W jednej z tych klas znajdują się wszystkie figury różne od równoległoboku, a w drugiej – tylko równoległoboki. W związku z możliwością takiego podziału figury należącej do pierwszej z tych klas nazwiemy figurami indeksu 3 (bo dla każdej z nich istnieje 3-członowe pokrycie homotetyczne), a równoległoboki – figurami indeksu 4.

Przyjmując, że hipoteza Hadwigera jest prawdziwa dla każdego n , zauważymy od razu, że zbiór wszystkich n -wymiarowych figur – dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ – można podzielić na $2^n - n$ rozłącznych klas: klasę figur indeksu $n + 1$, figur indeksu $n + 2$, indeksu $n + 3$ itd. i klasę figur indeksu 2^n . Dla klasy figur indeksu $n + 1$ znana jest liczba progowa – jest nią $n/n + 1$, co zostało wykazane w [3] i co stanowi uogólnienie twierdzenia Bielousowa z [1]. Więcej, w [3] mamy też uogólnienie podanego tu wcześniej twierdzenia, mianowicie:

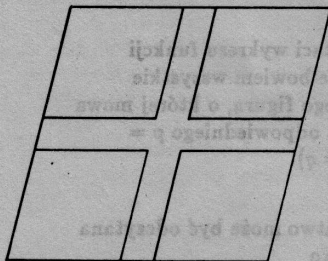
Twierdzenie. Dla każdej liczby $s \in (n/(n + 1), 1)$ istnieje n -wymiarowa figura, której $(n + 1)$ -ą liczbą progową jest s .

Natomiast dla klasy figur indeksu $n + 2, n + 3, \dots, 2^n$ (przy $n \geq 3$) liczba progowa nie jest znana. Znalezienie tej liczby jest zagadnieniem otwartym. Stąd apel do ambitniejszych Czytelników o próby znalezienia tych liczb (na początek dla $n = 3$). Pierwszym krokiem do realizacji tego celu musi być charakteryzacja (tzn. ustalenie kształtu, opis własności itp.) wszystkich figur danego indeksu, co również jest problemem otwartym. Oczywiście, spodziewam się otrzymać od Czytelników próby znalezienia liczb progowych klasy 3-wymiarowych figur odpowiedniego indeksu, tzn. 5, 6, 7, 8, bo dla klasy figur indeksu 4 liczbą tą, zgodnie z twierdzeniem w [3], jest $3/4$.

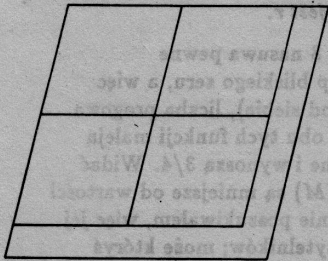
Pokrycia nieminimalne

Oczywiste jest, wobec definicji liczby progowej, że gdy każda kopia figury Q jest uzyskana przez homotetię o współczynniku mniejszym od $k_2^n(Q)$, to figury Q nie można pokryć $s + 1$ kopiami? Okazuje się, że jest z tym różnie dla różnych figur, nawet gdy współczynnik homotetii jest nieznacznie mniejszy od $k_2^n(Q)$. Dla trójkąta T , na przykład, którego liczbą progową jest $k_2^3(T) = \frac{2}{3}$ (zob. [1] lub [5]), trzy przystające kopie o współczynniku $k_0 < 2/3$ nie pokrywają T ; na rys. 1a widać, że nie pokryta w tym wypadku może być część wnętrza trójkąta, którą uda się pokryć czwartą kopią. W zależności od wielkości k_0 nie pokryta część wnętrza trójkąta T może być większa lub mniejsza, a zatem współczynnik k homotetii dla tej czwartej kopii może być dużo mniejszy od k_0 . Sensowne wobec tego jest pytanie o czwartą liczbę progową $k_2^4(T)$ (tzn. o liczbę progową trójkąta T przy pokryciu go czterema kopiami czyli o najmniejszy współczynnik homotetii, przy którym T może być pokryty czterema kopiami). Podał ją J. Bielousow [1] – jest nią $k_2^4(T) = 4/7$. W [5] podane są dalsze kolejne liczby progowe trójkąta (i pokazany sposób ich znajdowania), do piętnastej włącznie; dalsze kolejne nie istnieją. Znaczący to, że trójkąt T jest taką figurą, że jeżeli dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$ nie można jej pokryć p kopiami o współczynniku $k < k_2^p$, to można ją pokryć $p + 1$ kopiami o współczynniku k_2^{p+1} nieco mniejszym od k_2^p . Ale tak jest nie dla każdej figury.

Dla równoległoboku R , na przykład, jest $k_2^4(R) = 1/2$, ale gdy weźmiemy kopie tego równoległoboku o współczynniku nieco mniejszym od $1/2$ (np. z przedziału $(1/3, 1/2)$), to pięcioma kopiami w żaden sposób nie uda się pokryć R (rys. 12); wszak piątą kopią R , przy tym o współczynniku $k < 1/2$ (a nawet bliskim 1), nie uda się pokryć pozostałych do pokrycia kawałków przeciwnych boków równoległoboku R (rys. 12a) bądź przeciwnych wierzchołków (rys. 12b).

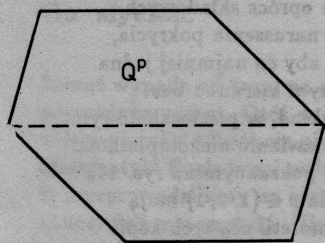


a.



b.

Rys. 12



Rys. 13

Można zauważyć więcej, a mianowicie że R nie może być pokryty sześcioma, ani siedmioma, ani też ośmioma kopiami o współczynniku s przedziału $(1/3, 1/2)$. Dopiero 9 kopii o współczynniku $1/3$ lub większym, ale mniejszym od $1/2$, wystarczy do pokrycia R ; dla R ciąg liczb progowych ma postać: $k_2^4, k_2^5, k_2^{16}, \dots, k_2^{n^2}, \dots$. Mówiąc inaczej, ciąg liczb progowym równoległoboku R nie jest kompletny. Znaczący to, że nie dla każdego $p \in \mathbb{N}$, jeżeli R nie może być pokryty p kopiami, to $p+1$ kopii pokryje go. Właściwość ta, tzn. niekompletność ciągu liczb progowych, nie jest związana z indeksem figury R , bo występuje także u niektórych płaskich figur indeksu 3. Figurą taką jest, na przykład, środkowosymetryczny sześciokąt Q^p o równoległych przeciwległych bokach (rys. 13), w którym jedna para takich boków jest równoległa do jednej z przekątnych, a stosunek długości tych boków do tej przekątnej jest równy $p \in (0, 1)$ (jest to więc nie jeden sześciokąt, ale cała rodzina sześciokątów).
A. Pomianowska pokazała [9], że

$$k_2^3(Q^p) = \begin{cases} \frac{2-p}{2} & \text{dla } p \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2-p}{3-p} & \text{dla } p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, \quad k_2^4(Q^p) = \begin{cases} \frac{1}{2-p} & \text{dla } p \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{1+p} & \text{dla } p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$$\text{ i } k_2^6(Q^p) = \frac{1}{2} \quad \text{dla każdego } p \in (0, 1),$$

i że nie istnieje $k_2^5(Q^p)$, bo z konstrukcyjnych rozważań wynika, że dla Q^p nie istnieje 5-członowe pokrycie progowe. Nie istnieją również progowe pokrycia 8- i 9-członowe sześciokąta Q^p , a tym samym nie istnieją liczby $k_2^8(Q^p)$ i $k_2^9(Q^p)$.

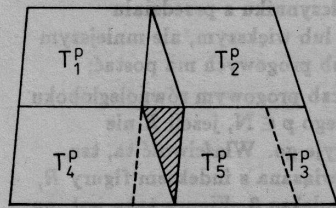
Sześciokąty Q^p nie są jednymi przykładami płaskich figur indeksu 3, dla których ciąg liczb progowych nie jest kompletny. Figurami takimi są również trapezy T^p , o stosunku długości górnej podstawy do dolnej równym p . Dla $p \in (1/2, 1)$, jak podają autorzy w [2], nie istnieją 6-członowe progowe pokrycia trapezu T^p , dla $p \in (11 - \sqrt{73})/4, 1)$ (tzn. dla $p > 0, 6139992 \dots$) nie istnieją 7-członowe pokrycia, zaś dla $p \in (11 - \sqrt{65})/4, 1)$ (tzn. dla $p > 0, 7344357 \dots$) nie istnieją 8-członowe, a tym samym nie dla każdego $p \in (0, 1)$ istnieją liczby $k_2^6(T^p)$, $k_2^7(T^p)$ i $k_2^8(T^p)$.

Można w tym miejscu zapytać się o przyczyny nieistnienia pewnych kolejnych liczb progowych dla niektórych figur indeksu 3. Otóż, jeżeli przyjąć za naturalny fakt niekompletność ciągu liczb progowych figury indeksu 4 (która jest równoległobok), to niekompletność ciągu liczb progowych figury indeksu 3 wydaje się być skutkiem zbliżonego do równoległoboku kształtu tych figur. Ale jest to jedynie przypuszczenie, nie poparte śladnym dowodem, a oparte jedynie na obserwacji niektórych tylko przykładów. Należałoby natomiast rozważyć wszystkie możliwe przykłady – może w tym jakoś pomogą Czytelnicy? Całkowicie otwarta jest bowiem sprawa charakteryzacji n -wymiarowych figur indeksu $n+1$, ciąg liczb progowych których jest niekompletny. Chodziłoby o wydzielenie podzbioru takich figur w zbiorze figur indeksu $n+1$. Zagadnienie to jest otwarte nawet dla $n=2$, a więc jest tu pole do działania. Wszystkie listy na ten temat i na temat poprzedni (znalezienie $(n+j)$ -tej liczby progowej dla klasy figur indeksu $n+j$ dla $j \in \{2, \dots, 2^n - n\}$ i dla każdego $n \geq 3$), przesłane do redakcji będą czytał i przesłał swoją opinię.

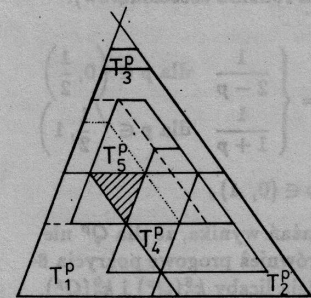
Niesztywne pokrycia progowe

W jakimś związku z liczbami progowymi figury pozostają pewne zjawiska konstrukcyjne. Chodzi o to, że w pokryciu progowym dowolnej figury Q , a na pewno w 3-członowym pokryciu progowym płaskiej figury różnej od równoległoboku i – ogólnej – w $(n+1)$ -członowym progowym pokryciu n -wymiarowej figury indeksu $n+1$, położenie poszczególnych składowych jest „sztywne” – jakiegokolwiek przesunięcie którejkolwiek składowej nieuchronnie prowadzi do odsłonięcia części pokrywanej figury Q .

Dla większości n -wymiarowych figur indeksu $n+1$ pokrycie progowe składające się z pewnej liczby $n+s$ składowych nie jest „sztywne”.



a. $p = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}$



b. $p = \frac{1}{6}, k = \frac{6}{11}$

Rys. 14

„Niesztynność” progowego pokrycia polega na tym, że oprócz składowych, których w żadnym wypadku nie można przesunąć bez naruszenia pokrycia, istnieje składowa (nie koniecznie jedna, ale wystarczy, aby co najmniej jedna była taka), którą można przesunąć co najmniej w jednym kierunku bez odsłaniania figury pokrywanej. Dzieje się tak, na przykład, w pięciocłonowym pokryciu trapezu T^p , który był przywoływany przy omawianiu niekompletności ciągu liczb progowych. Przy pewnym trybie pokrycia, pokazanym na rys. 14a i w [2] nazywanym typem C, kopie $T_1^p, T_2^p, T_3^p, T_4^p$ dla $p \in (1/2, 1)$ mają współczynnik $K_2^5(T^p) = 1/2$ (środki odpowiednich homotetii dla tych kopii znajdują się w wierzchołkach trapezu T^p) i nie pokrywają T^p . Nie jest nimi pokryty trójkąt (zakreskowany na rys. 14) o wysokości równej połowie wysokości trapezu i zawarty wewnątrz T^p , który trzeba pokryć piątą kopią T_5^p o tym samym współczynniku równym $1/2$.

Podstawa tego trójkąta ma długość $((1-p)/2)a < (1/4)a$ (bo $p \in (1/2, 1)$), gdzie a jest długością dolnej podstawy trapezu, natomiast górna podstawa kopii T_5^p ma długość $(1/2)pa > (1/4)a$ (bo $p > 1/2$). Wobec tego położenie kopii T_5^p nie jest jednoznaczne. Może ona być przesuwana równoległe do podstaw trapezu o wektor długości nie większej niż $((1/2)p - (1-p)/2)a = (p - 1/2)a$. Ustalwszy natomiast położenie T_5^p można przesunąć T_4^p bądź T_3^p , też równoległe do podstawy trapezu T_p o wektor odpowiedniej długości.

Dla $p \in (1/8, (3 - \sqrt{7})/2)$ progowe 5-członowe pokrycie trapezu T^p również jest niesztynne a kopia T_5^p może mieć znacznie mniejszy współczynnik od liczby progowej, która dla tych wartości p jest wartością funkcji $p \rightarrow 1/(2-p)$ (rys. 14b). Dla takich p trapes T^p ma inny kształt i inny jest typ pokrycia progowego (w [2] nazywany typem A, a polegający na tym, że środki homotetii dla uzyskania dwóch dolnych kopii obrane są w końcach dolnej podstawy, środek trzeciej homotetii (dla górnej kopii) – w przecięciu przedłużenia ramion trapezu, środek czwartej – wewnątrz T_p tak, aby dolna podstawa kopii T_4^p przechodziła przez punkt przecięcia ramion kopii T_1^p i T_2^p , a ramię kopii T_4^p – przez punkt przecięcia dolnej podstawy górnej kopii T_3^p z ramieniem jednej z dolnych kopii, T_1^p lub T_2^p ; podobnie obrany jest środek piątej homotetii). Niepomniejszoną kopię T_5^p można, jak widać na rys. 14b, przesunąć w dowolnych kierunkach o odpowiedni wektor, a nie tylko równoległe do podstaw trapezu T^p jak w poprzednio omawianym wypadku.

Niesztynność progowego pokrycia trapezu T^p obserwuje się również dla różnych wartości p przy innej liczbie członów pokrywających – w 4-członowym, 7-, 8- i 9-członowym, co jest dokładnie podane w [2]. Inny przykład niesztynnego progowego pokrycia podany jest w [9], a dotyczy 10-członowego pokrycia sześciokąta foremnego. Można przypuszczać, że Czytelnicy potrafią znaleźć jeszcze inne przykłady niesztynnych pokryć progowych.

Literatura cytowana

- [1] Ю. Ф. Белоусов, Теоремы о покрытии плоских фигур, Украинский Геометр. Сборник, 20 (1977), 10–17.
- [2] H. Brzozowska, S. Fudali, Homothetic coverings of trapezoids, Demonstratio Mathematica 16, no 2 (1983), 329–356.
- [3] S. Fudali, Two remarks about homothetic coverings, Demonstratio Math. 21, no 2 (1988), 387–392.
- [4] S. Fudali, O pokryciach homotetycznych figur wypukłych, Matematyka 34 (1981), no 4, 221–228.
- [5] S. Fudali, Homotetyczne pokrycie trójkąta, Matematyka 35 (1982), no 2, 94–109.
- [6] И. П. Гохберг, А. С. Маркус, Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Изв. Молдовского филиала АН СССР 10 (76) (1960), 87–90.
- [7] M. Lassak, Solution of Hadwiger's covering problem for centrally symmetric convex bodies in E^3 , J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), 501–511.
- [8] M. Lassak, M. Martini, Hipoteza Hadwigera o pokryciu brył wypukłych zmniejszonymi obrazami jednokładnymi, Delta 3/1987, 4–5.
- [9] A. Pomianowska, Homotetyczne pokrycie sześciokąta o równoległych przeciwległych bokach, Acta Math. Pomeranica 1 (1991) (w druku).