O rozpoznawaniu stożkowej opisanej na pięciokącie

Jan FRYDA,
Katowice

Spośród wielu różnych krzywych w geometrii rozważa się głównie linie proste i krzywe stożkowe, czyli krzywe algebraiczne pierwszego i drugiego stopnia. Jedną z przyczyn jest, oczywiście, prostota tych krzywych, jednakże o wiele ważniejszy jest fakt, że są one jednoznacznie wyznaczone przez pewien skończony układ punktów. Przez dwa różne punkty przechodzi bowiem dokładnie jedna prosta, a przez pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, przechodzi dokładnie jedna stożkowa właściwa. Podobnej własności nie posiadają krzywe algebraiczne wyższych stopni (paradoks Cramera) i na przykład przez dziewięć punktów może przechodzić wiele różnych krzywych trzeciego stopnia, a przez dziesięć – żadna.

Skoro na każdym pięciokącie można opisać dokładnie jedną stożkową właściwą, naturalne jest pytanie, czy jest to elipsa, hiperbola, czy też parabola. Jeżeli problem ten rozważalibyśmy w geometrii analitycznej, to mając dane współrzędne $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2), (e_1, e_2)$ punktów a, b, c, d, e otrzymalibyśmy równanie stożkowej przechodzącej przez te punkty w postaci:

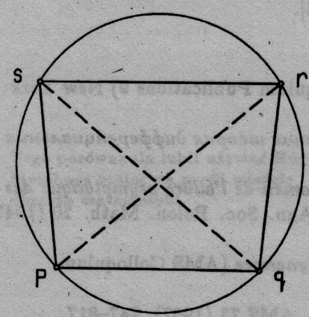
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \\ d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 & d_1 & d_2 & 1 \\ e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 & e_1 & e_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

na podstawie którego łatwo można już stwierdzić (por. np. [3]), jaka to stożkowa. O wiele ciekawiej przedstawia się ten problem, gdy nie korzystamy z aparatu geometrii analitycznej, a posługujemy się zwykłymi przyborami szkolnymi tj. linijką, cyrklem, ekierką, czy też kątomierzem. Znane są na przykład kryteria opisywalności okręgu na czworokącie. Jeśli dany jest czworokąt $pqrs$ (rys. 1), to równoważne są następujące warunki:

(i) na czworokącie $pqrs$ można opisać okrąg,

(ii) suma iloczynów długości boków przeciwległych jest równa iloczynowi długości przekątnych, tj. $(pr)\cdot(qs) = (pq)\cdot(rs) + (ps)\cdot(qr)$ (twierdzenie Ptolemeusza),

(iii) suma przeciwległych kątów czworokąta $pqrs$ jest równa kątowi półpełnemu, tj. $\angle pqr + \angle psr = \pi$.

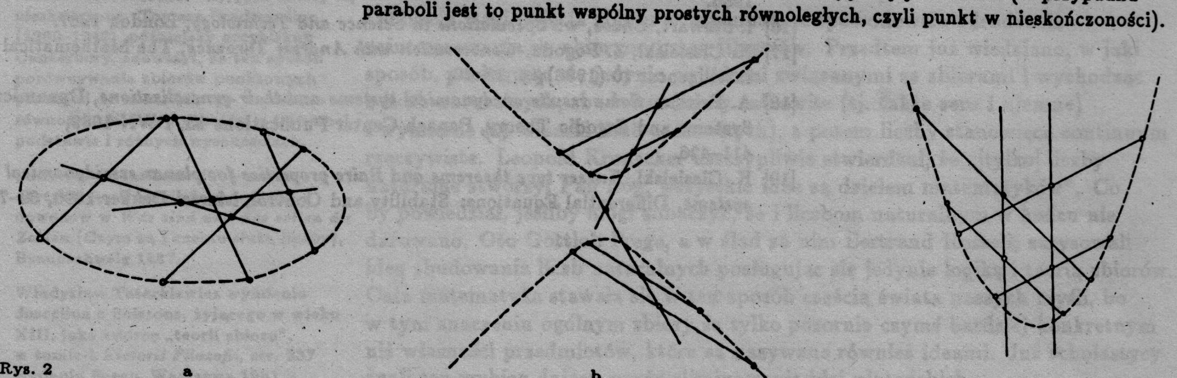


Rys. 1

Niestety, podobne kryteria opisywalności elipsy, hiperboli, czy też paraboli na pięciokącie nie są znane, a jedyne znane autorowi warunki polegają na sprowadzaniu problemu do zagadnienia geometrii analitycznej. Okazuje się jednak, że problem ten ma proste rozwiązanie konstrukcyjne. Zanim jednak przedstawimy to rozwiązanie, przypomnieć musimy kilka podstawowych własności krzywych stożkowych.

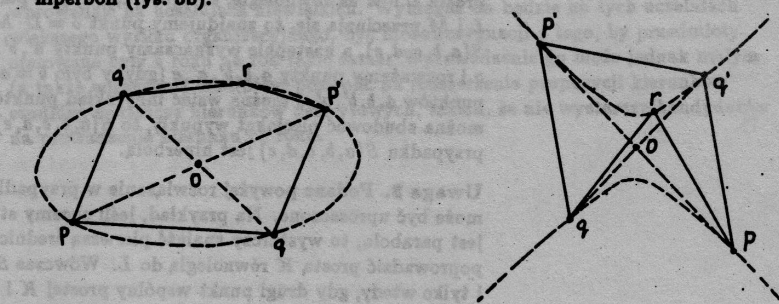
Środek symetrii stożkowej nazywamy jej środkiem, a zatem środek posiada tylko elipsa i hiperbola, natomiast parabola środka nie posiada. Przyjmuje się jednak, że środkiem paraboli jest punkt w nieskończoności należący do jej osi symetrii i każdej prostej równoległej do tej osi. Pozwala to na jednolite określenie średnic jako prostych przechodzących przez jej środek. Średnicami paraboli są zatem proste równoległe do jej osi symetrii i oczywiście sama oś.

Istnieje prosta metoda wyznaczania średnic i środka stożkowej (rys. 2). Prosta łącząca środki równoległych cięciw stożkowej jest bowiem jej średnicą sprzężoną z kierunkiem tych cięciw (kierunkiem prostej L nazywamy zbiór prostych równoległych do L), a punkt przecięcia dwóch różnych średnic stożkowej jest jej środkiem (w przypadku paraboli jest to punkt wspólny prostych równoległych, czyli punkt w nieskończoności).

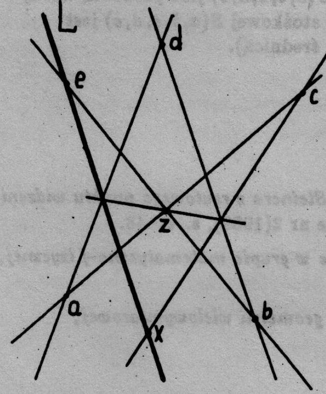


Rys. 2

Zauważmy z kolei, że jeżeli w stożkową można wpisać równoległobok, to stożkowa ta jest elipsą lub hiperbolą, a środek symetrii tego równoległoboku jest środkiem stożkowej. Ponadto, biorąc jakiekolwiek trzy punkty elipsy lub hiperboli i punkty symetryczne do dwóch z nich względem środka stożkowej, otrzymujemy pięciokąt wpisany w nią, który jest wypukły, gdy jest to elipsa (rys. 3a), i wklęsły w przypadku hiperboli (rys. 3b).



Rys. 3 a b



Rys. 4

Powyższe wiadomości uzupełnić jeszcze musimy pewną metodą konstruowania dowolnego punktu stożkowej opisanej na pięciokącie. Mamy zatem następujące

Zadanie 1. Dane są punkty a, b, c, d, e, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, i prosta L przechodząca przez punkt e. Skonstruować (o ile istnieje) drugi (różny od e) punkt wspólny prostej L i stożkowej opisanej na pięciokącie $abcde$.

Zanim podamy rozwiązanie naszego zadania, przyjmiemy dwie umowy.

Umowa 1. Punkt wspólny dwóch różnych prostych L, M oznaczać będziemy symbolem $L \cdot M$. Jeżeli proste L, M są równoległe, to punkt $z = L \cdot M$ jest punktem w nieskończoności i dla dowolnego punktu p prosta pz jest przechodzącą przez p prostą równoległą do prostych L, M.

Umowa 2. Stożkową opisaną na pięciokącie $abcde$ (przechodzącą przez punkty a, b, c, d, e) oznaczać będziemy symbolem $S(a, b, c, d, e)$.

Rozwiązanie zadania 1 (konstrukcja Newtona–Maclaurina). Prowadzimy (rys. 4) proste ad, bd, ac, be i znajdujemy kolejno punkty: $z = ac \cdot be$, $p = L \cdot ad$, $q = pz \cdot bd$, $x = L \cdot cq$. Jeżeli punkt x nie jest punktem w nieskończoności, to x leży na stożkowej $S(a, b, c, d, e)$ (jeżeli x jest punktem w nieskończoności, to jest punktem niewłaściwym tej stożkowej). Ponadto, jeżeli $x = e$, to prosta L jest styczną (w punkcie e) do stożkowej $S(a, b, c, d, e)$.

Uzasadnienie powyższej konstrukcji (por. [1]) wymaga użycia geometrii rzutowej i opiera się na twierdzeniu Steinera dotyczącym stożkowych. Z pomocą tej konstrukcji rozwiązać już możemy nasze

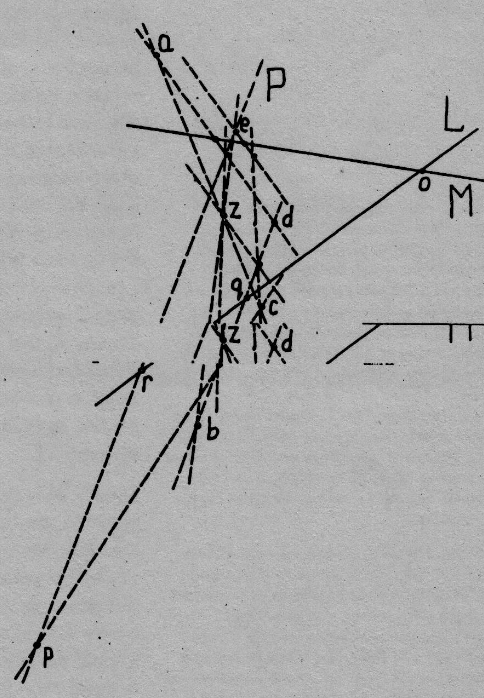
Zadanie 2. Dane są punkty a, b, c, d, e, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Rozstrzygnąć, czy $S(a, b, c, d, e)$ jest elipsą, hiperbolą, czy parabolą.

Rozwiązanie. Rozważmy trzy przypadki:

I. Z punktów a, b, c, d, e nie można zbudować pięciokąta wypukłego (każdy pięciokąt o wierzchołkach a, b, c, d, e jest wklęsły). Wówczas $S(a, b, c, d, e)$ jest hiperbolą.

II. Pięciokąt $abcde$ jest wypukły i cztery spośród punktów a, b, c, d, e są wierzchołkami równoległoboku. Wówczas $S(a, b, c, d, e)$ jest elipsą.

III. Pięciokąt $abcde$ jest wypukły i żadne cztery spośród punktów a, b, c, d, e nie są wierzchołkami równoległoboku. Wówczas (rys. 5) przez punkt e prowadzimy prostą P równoległą do prostej bd i wyznaczamy na niej drugi punkt p wspólny z $S(a, b, c, d, e)$ (punkt p nie może być punktem w nieskończoności, bo leży na prostej



Rys. 5

równoległej do prostej przecinającej stożkową w dwóch punktach), a następnie znajdujemy środki q, r odcinków bd i pe, i prowadzimy prostą $L = qr$. Prosta L jest średnicą stożkowej $S(a,b,c,d,e)$ sprzężoną z kierunkiem prostych bd, P.

Analogicznie wyznaczamy średnicę M sprzężoną z kierunkiem prostej ad. Jeżeli proste L i M są równoległe, to $S(a,b,c,d,e)$ jest parabolą. Jeżeli natomiast proste L i M przecinają się, to znajdujemy punkt $o = L \cdot M$, który jest środkiem stożkowej $S(a,b,c,d,e)$, a następnie wyznaczamy punkty a', b' symetryczne do a, b względem o i rozważamy punkty a, b, b', a', e (gdyby było $b = a'$, $e = a'$ lub $e = b'$, to zamiast punktów a, b, b', a', e można wziąć inny układ punktów). Jeżeli z punktów a, b, b', a', e można zbudować pięciokąt wypukły, to $S(a,b,c,d,e)$ jest elipsą. W przeciwnym przypadku $S(a,b,c,d,e)$ jest hiperbolą.

Uwaga 3. Podane powyżej rozwiązanie w przypadku III w szczególnych przypadkach może być uproszczone. Na przykład, jeśli chcemy stwierdzić, czy $S(a,b,c,d,e)$ jest parabolą, to wystarczy znaleźć pierwszą średnicę L, a następnie z punktu e poprowadzić prostą K równoległą do L. Wówczas $S(a,b,c,d,e)$ jest parabolą wtedy i tylko wtedy, gdy drugi punkt wspólny prostej K i stożkowej $S(a,b,c,d,e)$ jest punktem w nieskończoności (K jest wówczas drugą średnicą).

Literatura

[1] J. Fryda, E. Kasparek, *Stożkowe i konstrukcje Steinera z rzutowego punktu widzenia (część I)*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie nr 2(1989), s. 41–48.

[2] E. Otto, *Krzywe stożkowe. Zajęcia fakultatywne w grupie matematyczno-fizycznej*, Warszawa 1971.

[3] M. Stark, *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*, Warszawa 1974 (wydanie VI).