# Topologiczne układy dynamiczne

*Krzysztof CIESIELSKI, Kraków*

**...and Tigger and Beyore went off together, because Beyore wanted to tell Tigger How to Win at Poohsticks, which you do by letting your stick drop in a twitchy sort of way, if you understand what I mean, Tigger;...**

***The House at Pooh Corner* – A. A. Milne**

**...a Tygrys z Kłapouchym poszli także i to razem, ponieważ Kłapouchy chciał powiedzieć Tygrysowi, jak wygrać w „Misie–patysie", co się łatwo osiąga za pomocą pewnego szarpnięcia – jeśli rozumiesz co mam na myśli, Tygrysie.**

***Chatka Puchatka* – Alan Alexander Milne, przekład Ireny Tuwim**

## 1. Układy dynamiczne

**Załóżmy, że przyszło nam zagrać w „Misie-patysie". Przypomnijmy, że gra ta polega na rzuceniu patyków na wodę potoku z jednej strony mostka i oczekiwaniu, który najwcześniej wyłoni się ze strony drugiej. Rzucając patyki na wodę zdajemy sobie sprawę, że będą one zmieniać swoją pozycję w zależności od tego, gdzie je rzucimy i po jakim czasie będziemy je obserwować ponownie. Oczywiste jest, że spełnione będą dwa warunki. Po pierwsze, po czasie równym zeru patyk nigdzie się nie przemieści. Po drugie, jeśli rozważymy jego pozycję po czasie $t$, a następnie – z nowego położenia – po czasie $s$, to końcowym efektem będzie to samo, co wynik poruszenia się z punktu wyjściowego po czasie $t+s$. Ponadto, możemy założyć, że rozważane przyporządkowanie (parze: czas i punkt przypisujemy punkt otrzymany w wyniku odpowiedniego przesunięcia) jest ciągłe. I w ten sposób otrzymaliśmy prosty i naturalny model układu dynamicznego.**

**Definicja.** ***Układem dynamicznym*** **nazywamy parę $(X,\pi)$, gdzie $X$ jest przestrzenią metryczną, a funkcja $\pi : \mathbb{R}\times X \to X$ spełnia następujące warunki:**
**(1) $\forall\, x\in X:\ \pi(0,x)=x$,**
**(2) $\forall\, x\in X,\ t,s\in\mathbb{R}:\ \pi(s,\pi(t,x))=\pi(t+s,x)$,**
**(3) $\pi$ jest ciągła.**
**Przestrzeń $X$ nazywamy *przestrzenią fazową*.**

**W nasuwającej się i najbardziej naturalnej interpretacji pierwszą zmienną możemy traktować jako czas. Zauważmy, że opisany proces nie zależy od chwili, w której rozważamy ruch. Jeśli dany punkt przesuniemy o jakiś czas, to czy zrobimy to dziś, czy za tysiąc lat, w wyniku otrzymamy to samo.**

**Pojęcie układu dynamicznego, a wraz z nim teoria topologiczna, wyrosły na gruncie jakościowej teorii równań różniczkowych. Chodziło o to, by opisać własności rozwiązań równań oraz pewnych zbiorów, badanych ze względu na przebieg rozwiązań w tych zbiorach lub w ich pobliżu (w szczególności własności topologiczne), niekoniecznie umiejąc rozwiązania te wypisać konkretnymi wzorami. Warunki żądane w definicji układu dynamicznego są spełnione przez rozwiązania autonomicznego (tzn. z prawą stroną niezależną od czasu) równania różniczkowego**

$$x' = f(x),$$

**o ile mamy zagwarantowane istnienie rozwiązań, ich jednoznaczność i możliwość ich przedłużania w czasie do nieskończoności (w obie strony). Sprawdzenie, że rozwiązania te spełniają powyższe aksjomaty, jest bardzo proste i wyłącznie techniczne.**

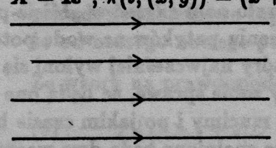
**Skoro więc mamy badać topologiczne własności rozwiązań bez konkretnej znajomości tych rozwiązań, możemy opierać się wyłącznie na podstawowych warunkach, które rozwiązania spełniają, czyli aksjomatach układu dynamicznego. Może to przynieść kilka korzyści. Po pierwsze, przy wykazywaniu twierdzenia okaże się, z czego (z jakich warunków) naprawdę korzystamy – które własności**

są wyłącznie topologiczne, zależą jedynie od podanych aksjomatów, a w których istotną rolę gra struktura różniczkowa. Po drugie, niewykluczone, że rozmaite wyniki uda się wykazać łatwiej (wiadomo, że niejednokrotnie zbyt wiele założonych własności powoduje kłopoty przy dowodzeniu – z czego korzystać?), choć z kolei nieraz większa liczba założeń ułatwia pracę. I po trzecie, powstaje teoria ogólniejsza, obejmująca sobą jakościową teorię autonomicznych równań różniczkowych, które stanowią piękne modele układów dynamicznych.

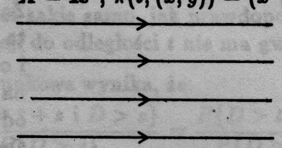
Najwyższy czas podać kilka przykładów. Przyjemną cechą teorii jest, że można tu bardzo wiele rysować, pokazując ów ruch punktów. Rysowane są oczywiście trajektorie punktów (por. def. poniżej), kierunek ruchu zaznaczony jest strzałką.

**Definicja.** *Trajektorię* punktu $x \in X$ (oznaczaną $\pi(x)$) określamy jako zbiór $\pi(\mathbb{R} \times \{x\})$. Analogicznie definiujemy *półtrajektorię* dodatnią ($\pi^+(x)$) i ujemną ($\pi^-(x)$) punktu $x$.

**Przykład 1.**
$X = \mathbb{R}^2$, $\pi(t,(x,y)) = (x+t, y)$.



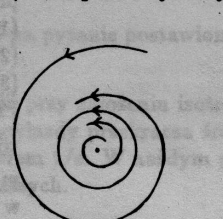
**Przykład 2.**
$X = \mathbb{R}^2$, $\pi(t,(x,y)) = (x+2t, y)$.



Zauważmy, że sam rysunek jeszcze dokładnie nie określa układu dynamicznego! Można bowiem poruszać się po tych samych trajektoriach z różną prędkością. Tak jest np. w dwóch powyższych przykładach. Nie zmienia to jednak faktu, że z reguły układy dające te same trajektorie będą większość interesujących nas własności miały takie same.

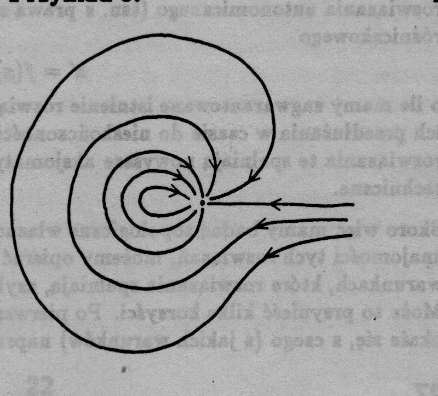
**Przykład 3.**
Rozważmy układ dany w $\mathbb{R}^2$ przez równanie różniczkowe: $r' = 0$, $\phi' = 1$ (we współrzędnych biegunowych). Oto trajektorie układu:

**Przykład 4.**
Następująca modyfikacja poprzedniego równania: $r' = r(1-r)$, $\phi' = 1$ powoduje inny obraz:

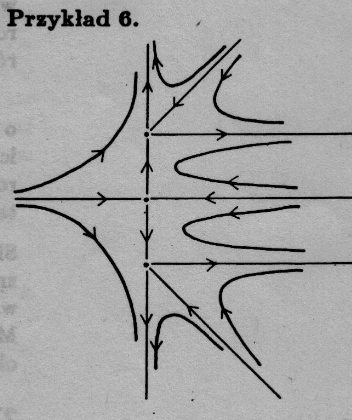


Trajektorie będą „nawijać się" na okrąg jednostkowy. Łatwo to widać z opisu: gdy $r > 1$, to $r' < 0$ i promienie będą maleć (do jedynki), gdy zaś $r \in (0,1)$, to $r' > 0$ i promienie będą rosnąć (również do jedynki). Względem drugiej współrzędnej punkty poruszają się stale z taką samą prędkością (kątową). Często przy przykładach ograniczamy się jedynie do rysunku, z którego widać, jak trajektorie przebiegają.

**Przykład 5.**



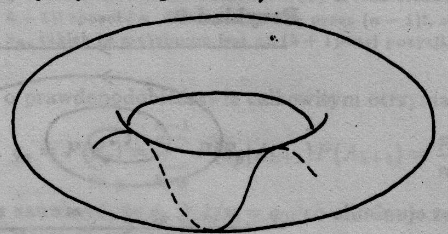
**Przykład 6.**



Na rysunkach – skoro funkcja ma być ciągła – blisko (w odpowiednio małym otoczeniu) danej strzałki, przy zbliżonym do siebie kierunku krzywych, strzałki na pobliskich drogach muszą mieć ten sam zwrot.

Ciekawym jest

**Przykład 7.**
Torus można wypełnić rozłącznymi krzywymi, z których każda nawija się na torus gęsto. Wprowadzając odpowiednio funkcję $\pi$ otrzymujemy interesujący układ dynamiczny na torusie (okresy obrotu „wzdłuż południka" i „wzdłuż równoleżnika" mają być niewspółmierne).



Nie należy sądzić, że przykłady ograniczają się do podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

**Przykład 8.**
Układ dynamiczny Bebutowa wprowadzony jest na przestrzeni $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (zbiorze funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$). Określmy $\pi(t,f)(s) = f(t+s)$. Łatwo sprawdzić, że warunki (1) i (2) są spełnione. Jeśli w $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wprowadzimy odpowiednio metrykę, to otrzymamy układ dynamiczny o wielu ciekawych własnościach. Kończąc tę wstępną część zauważmy, że dzięki matematyce można poznać metodę wygrywania w Misie-patysie. Wystarczy znać układ dynamiczny opisujący ruch potoku (a w zasadzie tylko część, na terenie pod mostkiem). Za pomocą odpowiedniego szarpnięcia należy rzucić patyk w ten punkt, z którego dochodzi się do drugiego końca najszybciej...

## 2. Podstawowe obiekty i własności

Obiektów i własności, które w teorii są badane, jest bardzo wiele. Poświęcimy nieco uwagi tym najważniejszym i najbardziej podstawowym. Jasne jest, że badane są zbiory określone za pomocą rozwiązań, a w szczególności trajektorie. Wśród punktów przestrzeni fazowej szczególnie interesujące są dwa rodzaje:

**Definicja.** Punkt $x$ jest *stacjonarny*, jeśli $\forall\, t$: $\pi(t,x) = x$.
Punkt $x$ jest *okresowy*, jeśli $\exists\, t \neq 0$: $\pi(t,x) = x$ i $x$ nie jest stacjonarny.

Odpowiadające takim punktom trajektorie noszą nazwę trajektorii stacjonarnych i okresowych.

W przykładzie 3. punkt $(0,0)$ jest punktem stacjonarnym, a wszystkie pozostałe punkty są okresowe. Z kolei w przykładzie 4. dokładnie jedna trajektoria jest okresowa i dokładnie jedna stacjonarna; w przykładzie 7. nie ma żadnej okresowej ani stacjonarnej.

Nie jest trudnym do wykazania, że punkt okresowy musi mieć okres zasadniczy. Interesują nas własności topologiczne; zbiór punktów stacjonarnych jest zawsze domknięty.

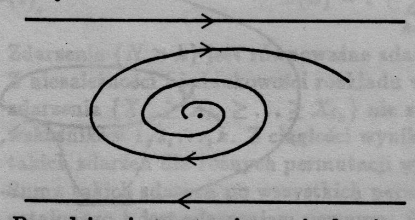
Bardzo ważnym jest pojęcie zbioru granicznego. Do zbioru granicznego dodatniego punktu $x$ należą te punkty, do których możemy się przybliżyć dowolnie blisko po trajektorii punktu $x$ przy czasach dążących do nieskończoności. Formalnie określamy:

**Definicja.** *Zbiór graniczny dodatni* punktu $x$ definiujemy następująco:
$$L^+(x) = \bigcap\{\pi^+(\pi(t,x)) : t \geq 0\}$$
lub (równoważnie): $L^+(x) = \{y \in X : \exists\, t_n \to \infty\colon\ \pi(t_n,x) \to y\}$.

Analogicznie definiujemy *zbiór graniczny ujemny*. Zbiorem granicznym punktu okresowego jest jego trajektoria; podobnie w przypadku punktu stacjonarnego.

W przykładzie 4. okrąg jednostkowy jest zbiorem granicznym dodatnim każdego punktu płaszczyzny oprócz początku układu. Inaczej jest ze zbiorem $L^-(x)$; dla punktów z wnętrza koła jednostkowego jest on zbiorem jednoelementowym $\{(0,0)\}$, dla punktów z zewnątrz – zbiorem pustym. Ciekawy efekt otrzymujemy w przykładzie 7.; tam zbiorem granicznym (tak dodatnim, jak i ujemnym) dowolnego punktu jest cała przestrzeń fazowa. A jak jest w przykładach 5. i 6. ? Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór graniczny jest domknięty. We wszystkich dotychczasowych przykładach był on także zwarty oraz spójny. To jednak ogólnie nie jest prawdą, nawet w bardzo porządnej przestrzeni fazowej, co widać na przykładzie 9.

**Przykład 9.**



Prawdziwe jest natomiast twierdzenie mówiące, że jeśli w przestrzeni lokalnie zwartej zbiór graniczny jest zwarty, to jest spójny.

Zbiór graniczny ma jeszcze jedną, bardzo ważną własność. Zawiera on, wraz z jakimś punktem, także i całą jego trajektorię. Mówimy, że jest on zbiorem niezmienniczym.

**Definicja.** Zbiór $A$ nazywamy *niezmienniczym*, jeśli z tego, że $x \in A$, wynika, że $\pi(x) \subset A$.

Analogicznie definiujemy *dodatni* i *ujemny zbiór niezmienniczy*.

Innym przykładem zbioru niezmienniczego jest trajektoria danego punktu. Podkreślmy: zbiór graniczny jest niezmienniczy zarówno dodatnio, jak i ujemnie!

Ze zbiorami niezmienniczymi wiąże się pojęcie zbioru minimalnego.

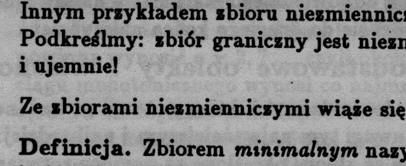
**Definicja.** Zbiorem *minimalnym* nazywamy zbiór niepusty, domknięty i niezmienniczy, który nie zawiera różnego od siebie podzbioru o tych własnościach.

Za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna można wykazać, że dowolny niepusty zwarty zbiór niezmienniczy zawiera zbiór minimalny. W przykładzie 3. każda trajektoria jest zbiorem minimalnym, w przykładzie 4. jedynie okrąg jednostkowy i początek układu. W przykładzie 7. jedynym zbiorem minimalnym jest cała przestrzeń fazowa.

Wspomnijmy jeszcze o jednym ciekawym twierdzeniu. Otóż jeśli dodatnio niezmienniczy zbiór $B$ jest homeomorficzny z kulą jednostkową $n$-wymiarową, to zawiera on punkt stacjonarny. Dowód opiera się na twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym. Z twierdzenia o istnieniu punktu stacjonarnego wynika w szczególności, że na płaszczyźnie, w ograniczonym obszarze wyciętym przez trajektorię okresową, zawiera się trajektoria stacjonarna.

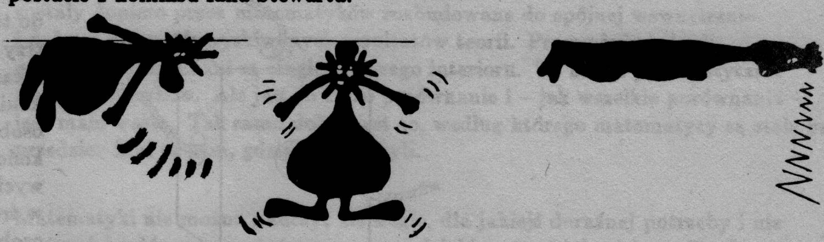
## 3. Stabilność

Fundamentalnym dla całej teorii jest pojęcie zbioru stabilnego. Myśl polega na tym, że jeśli odejdziemy niedaleko od badanego zbioru, to, posuwając się po półtrajektorii dodatniej punktu, do którego odeszliśmy, nie możemy się od naszego zbioru zbytnio oddalić. Łatwo widać, o co chodzi, na modelu przedstawionym na rysunku.



Jeśli umieścimy kulkę w dołku, to – po jej nieznacznym przesunięciu – nie oddali się ona zbytnio, w swej dalszej wędrówce, od pierwotnego położenia; jej pozycja jest stabilna. Natomiast kulka na szczycie wzgórza, lekko pchnięta, spadnie w dół i w okolice szczytu już nie powróci. Podobnie można rozważać stabilne i niestabilne zbiory na „orbicie" zakreślonej przez koniec wahadła.

Na poniższym rysunku widać stabilną i niestabilną pozycję, przyjęte przez postacie z komiksu Iana Stewarta.



**Definicja.** Domknięty zbiór $M$ nazywamy *stabilnym (w sensie Lapunowa)*, jeśli:

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ y \in K(x, \delta) \Rightarrow \pi^+(y) \subset K(M, \varepsilon)$$

($K(x, \delta)$ i $K(M, \varepsilon)$ oznaczają zbiory punktów odległych od $x$ o mniej niż $\delta$ i od $M$ o mniej niż $\varepsilon$).

Z definicji natychmiast wynika, że zbiór stabilny jest dodatnio niezmienniczy. Zbiorami stabilnymi są na przykład, w przedstawionych już konkretnych układach dynamicznych, dowolna trajektoria w przykładzie 3. albo okrąg jednostkowy w przykładzie 4. Zauważmy, że stabilność nie jest równoznaczna z „przyciąganiem" do zbioru trajektorii wszystkich punktów z pewnego otoczenia zbioru! Można to zaobserwować na przykładzie 5. Jedyny punkt stacjonarny układu nie jest zbiorem stabilnym, choć wszystkie (!) trajektorie zbliżają się do niego przy czasie dążącym do nieskończoności – jest on dodatnim zbiorem granicznym dowolnego punktu przestrzeni fazowej.

„Przyciąganie" zostaje sformalizowane za pomocą pojęcia atraktora.

**Definicje.** Domknięty zbiór $A$ nazywamy *atraktorem (zbiorem przyciagającym)* jeśli

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in K(M, \varepsilon) : t \to \infty \Rightarrow d(\pi(t, x), A)) \to 0$$

($d$ oznacza odległość punktu od zbioru). Gdy $A$ jest zwarty, a przestrzeń fazowa lokalnie zwarta, to warunek powyższy jest równoważny następującemu:

$$\exists \varepsilon > 0 : K(M, \varepsilon) \subset \{y \in X : \emptyset \neq L^+(y) \subset A\}$$

Przykład 5. pokazuje, że mogą istnieć atraktory niestabilne; z kolei np. dowolna trajektoria w przykładzie 3. jest zbiorem stabilnym, ale nie jest atraktorem. Jeśli porównamy okręgi jednostkowe w przykładzie 3. i 4., to zauważymy, że choć oba są identycznymi trajektoriami (w dwóch różnych układach) i oba są zbiorami stabilnymi, to jednak zachowanie się układów w ich pobliżu jest jakościowo inne – właśnie dlatego, że okrąg z przykładu 4. jest również atraktorem, a okrąg z przykładu 3. – nie. Własność, jaką ma okrąg z przykładu 4., wyrażona jest w kolejnej definicji.

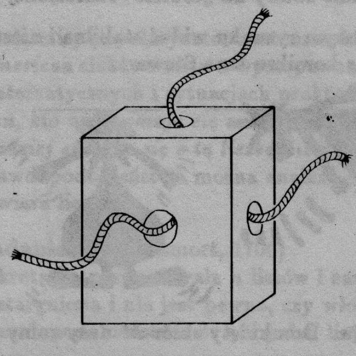
**Definicja.** Zbiór $M$ jest *asymptotycznie stabilny*, jeśli jest stabilny i jest atraktorem.

Na tych podstawowych definicjach bazuje ogromny dział teorii układów dynamicznych; zagadnieniom związanym ze stabilnością poświęcono wiele książek i prac naukowych.

## 4. Twierdzenie retraktowe Ważewskiego

Pięknym twierdzeniem, z którym niewątpliwie warto się zapoznać, jest twierdzenie retraktowe Ważewskiego. Miłośnicy wędrówek tatrzańskich niewątpliwie pamiętają Wywierzysko Kościeliskie. Wygląda ono istotnie niesamowicie – jak potok, który płynie w dwie przeciwne strony jednocześnie.

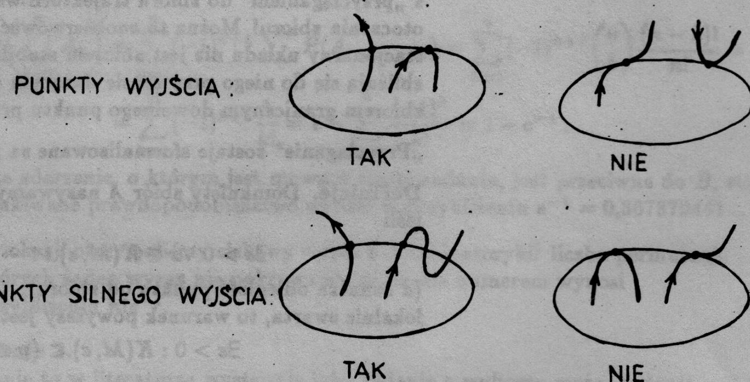
Niejeden, ujrzawszy je po raz pierwszy, reaguje tak, jak w starym dowcipie Mojsze, który po zobaczeniu w ZOO żyrafy powiedział do kolegi: „Icek, ty nie wierz własnym oczom, bo to nie może być!". Matematykowi Wywierzysko Kościeliskie może skojarzyć się z twierdzeniem retraktowym Ważewskiego.



Inną ładną ilustrację stanowi „maszynka retraktowa". Wywierćmy trzy dziury w pudełku i włóżmy do tego pudełka związane ze sobą trzy kawałki sznurka, tak, by z każdej dziury wychodził jeden koniec. Jeśli teraz poprosimy trzy osoby o ciągnięcie poszczególnych końców, to sznurek zostanie w całości wyciągnięty tylko wtedy, jeśli się w środku rozerwie. Z kolei, jeśli dwie osoby puszczą swe końce, to trzecia wyciągnie wszystko.

Najwyższy czas przejść do twierdzenia, na mocy którego uzasadnienie powyższych faktów jest natychmiastowe. Przedtem jednak parę definicji.

Załóżmy, że $U$ jest otwartym podzbiorem przestrzeni fazowej. Punkt $x$, należący do brzegu $U$, nazywany jest *punktem wyjścia*, jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\pi((-\varepsilon, 0) \times \{x\}) \subset U$. Punkt wyjścia jest punktem *silnego wyjścia*, jeśli ponadto istnieje $\varepsilon' > 0$ takie, że $\pi((0, \varepsilon') \times \{x\}) \cap U = \emptyset$ (por. rysunek). Zbiór punktów wyjścia z $U$ oznaczamy przez $U_w$.




Przypomnijmy jeszcze jedno pojęcie topologiczne. Zbiór $Z \subset Y$ jest *retraktem* $Y$, jeśli istnieje funkcja $f : Y \to Z$ ciągła taka, że $f|_Z = id_Z$; funkcję $f$ nazywamy *retrakcją*. Na przykład – niespójny podzbiór zbioru spójnego nie jest jego retraktem.

**Twierdzenie retraktowe Ważewskiego.** *Dany jest układ dynamiczny i otwarty podzbiór $U$ przestrzeni fazowej, przy czym każdy punkt wyjścia z $U$ jest punktem silnego wyjścia. Załóżmy, że $S$ jest zbiorem niepustym zawartym w $U \cup U_w$ takim, że $S \cap U_w$ jest retraktem $U_w$ (w szczególności założenie jest spełnione, gdy $S \cap U_w = U_w$), ale nie jest retraktem $S$. Wtedy istnieje $x \in S \cap U$ taki, że $\pi^+(x) \subset U$.*

Łatwo zauważyć, dlaczego opisane przykłady stanowią modele twierdzenia. Wychodzimy przez dwa (lub trzy) kawałki brzegu; z twierdzenia Ważewskiego wynika zatem, że albo któraś trajektoria zostaje w zbiorze, albo ruch nie jest ciągły.

Można też twierdzenie zilustrować jeszcze inaczej. Przypuśćmy, że wszyscy pasażerowie tramwaju chwycili się za ręce, po czym zaczęli z niego wychodzić. Jeśli chcą wyjść dwoma (lub więcej) wyjściami, to albo będą musieli w pewnym momencie przestać się trzymać, albo ktoś zostanie w środku.

Przedstawmy ideę dowodu twierdzenia, nie jest ona bowiem zbyt trudna. Przypuśćmy, że wszystkie punkty z $S \cap U$ po pewnym czasie opuszczą $U$; każdemu $x$ można zatem przypisać czas $\tau(x)$ opuszczenia zbioru ($\pi(0, \tau(x) \times \{x\}) \subset U$, $\pi(\tau(x), x) \notin U$). Jeśli wykażemy, że funkcja $\tau$ jest ciągła, to ciągłe jest także odwzorowanie: $S \ni x \mapsto r(\pi(\tau(x), x)) \in S \cap U_w$, gdzie $r$ jest retrakcją $U_w$ na $S \cap U_w (\pi(\tau(x), x) \in U_w)$. W ten sposób skonstruowaliśmy jednak retrakcję $S$ na $S \cap U_w$, co jest sprzeczne z założeniem.

A dlaczego $\tau$ jest ciągła? Przypuśćmy najpierw, że $x \in U$: $\pi(\tau(x), x)$ jest punktem wyjścia, a więc i punktem silnego wyjścia. Dla odpowiednio małego $\varepsilon$ zatem $\pi([0, \tau(x) - \varepsilon] \times \{x\}) \subset U$, zaś $\pi([\tau(x), \tau(x) + \varepsilon] \times \{x\}) \cap U = \emptyset$. Z ciągłości $\pi$ wynika wobec tego, że $\tau(y)$ należy do przedziału $(\tau(x) - \varepsilon, \tau(x) + \varepsilon)$ dla $y$ z odpowiednio małego otoczenia punktu $x$. Gdy zaś $x \in S \cap U_w$, to $\tau(x) = 0$, $\pi([0, \varepsilon] \times \{x\}) \cap U = \emptyset$ dla pewnego $\varepsilon$ i również znajdziemy otoczenie $V$ punktu $x$ takie, że $\tau(y) < \varepsilon$ dla dowolnego $y \in V \cap S$.

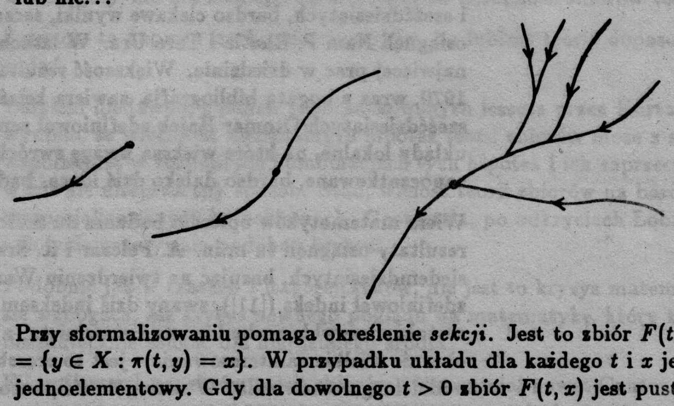
Twierdzenie retraktowe ma wiele wersji, w szczególności dla równań różniczkowych. Najlepiej jednak chyba widać ideę metody w sformułowaniu dla układów dynamicznych. Główna myśl metody topologicznej Ważewskiego polega na wyciąganiu wniosków o zachowaniu się rozwiązań wewnątrz zbioru $U$ jedynie na podstawie zachowania się układu na brzegu $U$.

## 5. Semi-układy

Pojęcie topologicznego układu dynamicznego może być uogólnione na wiele sposobów. Wydaje się, że jednym z najciekawszych uogólnień są semi-układy dynamiczne. Różnica polega tylko na tym, że w definicji zamiast $\mathbb{R}$ bierzemy zbiór liczb nieujemnych $\mathbb{R}_+$.

W semi-układach ruch punktu mamy określony tylko w jedną stronę – nic natomiast nie wiadomo o jego zachowaniu się przy czasach przeciwnego znaku. Oczywiście, każdy układ jest semi-układem – jeśli mamy ruch zdefiniowany w obu kierunkach, to także i w jednym z nich.

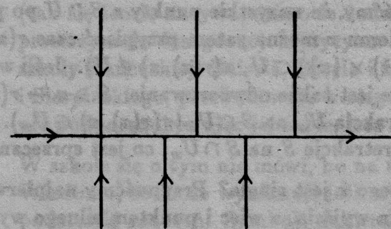
Wiele twierdzeń dotyczących układów można w naturalny sposób uogólnić na semi-układy. Pojawiają się tu jednak także i nowe, w przypadku układów nie istniejące lub trywialne problemy. Ruch mamy określony jedynie dla czasów dodatnich, znamy przyszłość punktu – naturalnym jest pytanie o przeszłość. Do danego punktu możemy przecież „dojść" – czasami tylko jedną drogą, przedłużalną w czasie do minus nieskończoności (jak w układach), w innym przypadku wieloma drogami, możemy też w tym punkcie startować (przeszłość jest zbiorem pustym). Drogi dojścia mogą być ze względu na czas ograniczone lub nie...



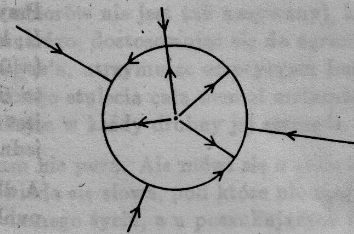
Przy sformalizowaniu pomaga określenie *sekcji*. Jest to zbiór $F(t, x) = \{y \in X : \pi(t, y) = x\}$. W przypadku układu dla każdego $t$ i $x$ jest to zbiór jednoelementowy. Gdy dla dowolnego $t > 0$ zbiór $F(t, x)$ jest pusty, to $x$ nazywany jest *punktem startowym*. Gdy przestrzeń fazowa jest rozmaitością, to semi-układ nie ma punktów startowych (dowód tego wykorzystuje twierdzenie Brouwera o punkcie stałym).

Podajmy jeszcze kilka przykładów. Na płaszczyźnie łatwiej to zrobić za pomocą rysunków.

**Przykład 10.**



**Przykład 11.**



**Przykład 12.**
W zbiorze funkcji ciągłych $C([0,\infty); \mathbf{R})$ (z odpowiednią metryką) możemy określić semi-układ według tego samego przepisu, co w przykładzie 8. (przesuwamy wykres funkcji o $t$ w lewo i ucinamy kawałek leżący na lewo od osi rzędnych).

Ciekawych modeli (w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych) dostarczają równania z opóźnionym argumentem i równania paraboliczne. W przypadku, gdy przestrzeń fazowa jest rozmaitością (w szczególności dwuwymiarową) okazuje się, że semi-układy zachowują się w przestrzeni stosunkowo „porządnie". Jest to jednak temat wykraczający nieco dalej.

## 6. Uwagi historyczne i bibliograficzne

Trudno stwierdzić, kto pierwszy podał topologiczną definicję układu dynamicznego. Niewątpliwie korzenie teorii leżą w pracach Henri Poincarégo z teorii równań różniczkowych zwyczajnych, z końca XIX wieku. Poincaré badał topologiczne własności równań autonomicznych, uzyskał wiele interesujących rezultatów, a jego idee kontynuowane są w badaniach nawet i dzisiaj. Za twórcę teorii należy chyba jednak uznać George'a D. Birkhoffa, którego monografia [1] z roku 1927 była podstawą do większości badań następnych kilkunastu lat. W roku 1947 ukazała się znakomita książka W. W. Niemyckiego i W. W. Stiepanowa [2] (część jej poświęcona jest topologicznym układom), która do dziś (!) jest cytowana w pracach naukowych. Również w roku 1947 opublikowany został w pracy [3] wynik Tadeusza Ważewskiego (wiele informacji dotyczących tej wybitnej postaci polskiej matematyki można znaleźć w [8], [9] i [17]). Jeden z najznakomitszych specjalistów w dziedzinie równań różniczkowych, Solomon Lefschetz, stwierdził w 1961 roku, że metoda retraktowa Ważewskiego jest najoryginalniejszym rezultatem w równaniach różniczkowych po wojnie.

Wśród licznych matematyków, publikujących swe prace w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych, bardzo ciekawe wyniki, szczególnie dotyczące stabilności, osiągnęli Nam P. Bhatia i Taro Ura. W latach 1960–1975 ukazało się chyba najwięcej prac w dziedzinie. Większość rezultatów uzyskanych do roku 1970, wraz z bogatą bibliografią, zawiera książka [7]. Również w latach sześćdziesiątych Otomar Hajek zdefiniował semi-układy; wtedy zaczęto też badać układy lokalne, na które większą uwagę zwróciła książka [6]. Tu właśnie zostały zapoczątkowane, bardzo daleko dziś idące, badania lokalnych semi-układów.

Wielu matematyków opierało badania na metodzie Ważewskiego; interesujące rezultaty osiągnęli tu m.in. A. Pelczar i R. Srzednicki. W połowie lat siedemdziesiątych, bazując na twierdzeniu Ważewskiego, Charles Conley zdefiniował indeks ([11]), zwany dziś indeksem Conley'a. Teoria Conleya została niezwykle rozbudowana i rozwinięta, a prace z nią związane budzą obecnie wielkie zainteresowanie – jest to zresztą niewątpliwie temat wart oddzielnego omówienia. W szczególności, autorami bardzo ciekawych wyników są K. Rybakowski i M. Mrozek. Dodajmy, że w latach osiemdziesiątych zaczęto coraz częściej stosować w układach dynamicznych metody topologii algebraicznej, co niejednokrotnie przynosiło niebanalne efekty.

Semi-układy i układy lokalne nie są, rzecz jasna, jedynymi możliwymi uogólnieniami. Rozważane są układy wielowartościowe, o przestrzeni fazowej zakłada się jedynie, że jest topologiczna, ciągłość zastępowana jest warunkami słabszymi, zamiast R badane są inne grupy ([4]). Ponadto należy niewątpliwie jeszcze jedną rzecz zasygnalizować. Pojęcie „układ dynamiczny" zawiera w sobie wiele rozmaitych treści. Niezwykle ważną teorią jest teoria gładkich układów, przy której badaną przestrzenią fazową jest gładka rozmaitość, zaś określająca układ funkcja spełnia pewne warunki związane z różniczkowalnością. Gdy zamiast R rozważany jest zbiór liczb całkowitych Z, układ dany jest przez iteracje jednej funkcji (z reguły odpowiednio regularnej). Główny nacisk w badaniach kładzie się na zupełnie inne problemy, niż w teorii topologicznych układów dynamicznych ([5], [14], [15]). W efekcie stwierdzenie „zajmuję się układami dynamicznymi" może mieć kilka, jeśli nie kilkanaście rozmaitych znaczeń; dziedziny te są wprawdzie ze sobą związane, niekiedy jednak dosyć luźno. W *Mathematical Reviews* prace z układów dynamicznych recenzowane są w bardzo wielu miejscach. Z działu opisanego w tym artykule, najczęściej w punkcie 54H20 (choć także i w co najmniej kilku innych, wcale nie zaczynających się od 54). W cytowanej poniżej literaturze podane są także pozycje zawierające niektóre rezultaty dotyczące zasygnalizowanych tu zagadnień. Dokładniej zapoznać się z podstawami i bardziej zawansowanymi wynikami teorii można np. z książek [6], [7] i [12].

## Literatura


[1] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems* (AMS Colloquium Publications 9) New York 1927.

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Moskwa 1947.

[3] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des integrals des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 279–313.

[4] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, *Topological dynamics* (AMS Colloquium Publications 36), Providence 1955.

[5] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. AMS 73 (1967), 747–817.

[6] N. P. Bhatia, O. Hajek, *Local semi-dynamical systems*, (Lecture Notes in Mathematics 90), Springer 1969.

[7] N. P. Bhatia, G. P. Szego, *Stability theory of dynamical systems*, Springer 1970.

[8] C. Olech, J. Szarski, Z. Szmydt, *Tadeusz Ważewski (1896-1972)*, Wiadomości Matematyczne XX (1976), 55–62.

[9] J. Szarski, *Przemówienie na Sesji Naukowej poświęconej pamięci Prof. Ważewskiego*, Wiadomości Matematyczne XX (1976), 64–65.

[10] A. Pliś, *Metoda topologiczna przebiegu rozwiązań równań różniczkowych*, Wiadomości Matematyczne XX (1976), 70–71.

[11] C. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index* (CBMS Regional Conf. Ser. 38, AMS), 1978.

[12] A. Pelczar, *Ogólne układy dynamiczne*, skrypt uczelniany UJ 293, Kraków 1978.

[13] S. H. Saperstone, *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*, Springer 1981.

[14] W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, Biblioteka Matematyczna 56, PWN 1982.

[15] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin-Cummings, 1986.

[16] I. Stewart, *Chaos*, w: *Speculations in Science and Technology*, London 1987.

[17] K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Conversation with Andrzej Turowicz*, The Mathematical Intelligencer 10 (1988)#4, 13–20.

[18] A. Pelczar, *Some results on dynamical systems and their generalizations*, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publications 23, PWN 1989, 411–426.

[19] K. Ciesielski, *Kneser type theorems and Baire properties for planar semidynamical systems*, Differential Equations: Stability and Control, Marcel Dekker 1990, 69–78.