Liczba e i prawdopodobieństwo

Andrzej DĄBROWSKI, Wrocław

Znakomity popularyzator matematyki, Martin Gardner, zamieścił w *Scientific American* ciekawe eseje o występowaniu liczb n i ϕ w różnych zadaniach matematycznych i sytuacjach praktycznych. W eseju o liczbie e napisał: ***Ten, kto nie zajmuje się ani matematyką ani naukami przyrodniczymi, rzadziej spotyka się z tą liczbą niż z π albo ϕ.*** Tymczasem w rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć ciekawe zadania, których rozwiązanie zawiera liczbę e.

Liczba $\phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ jest związana ze złotym podziałem odcinka.

Zadanie 1. (Montmort, 1708)
Sekretarka przygotowała n listów i zaadresowała n kopert. Niestety, jest roztargniona i nie jest pewna, czy włożyła listy do właściwych kopert. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ani jeden list nie trafi do właściwej koperty?

Rozwiązanie.
Ponumerujmy listy kolejnymi numerami $1, 2, \ldots, n$. Niech $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ oznacza zdarzenie, że listy o numerach $i_1, i_2, \ldots, i_k$ trafiły do właściwych kopert. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi

$$P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

$A_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}$

$\sum'$ oznacza sumowanie po wszystkich k-elementowych podzbiorach zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wzór

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum{}' P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$$

uzyskuje się ze znanej własności prawdopodobieństwa

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H)$$

metodą indukcji matematycznej.

Prawdopodobieństwo zdarzenia B, że co najmniej jeden list trafił do właściwej koperty wynosi

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum{}' P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \simeq 1 - e^{-1}.$$

Korzystamy tu ze wzoru z analizy matematycznej

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Nasze zdarzenie, o którym jest mowa w treści zadania, jest przeciwne do B, stąd poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi w przybliżeniu $e^{-1} = 0{,}367879441\ldots$

Jak szybko ciąg $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$ jest zbieżny do e^{-1} świadczy fakt, że dla $n \geq 7$ różnica między nimi jest mniejsza od 0,00003, czyli z praktycznego punktu widzenia prawdopodobieństwo to nie zależy od n.

Przy okazji otrzymaliśmy ciekawy wynik z kombinatoryki: liczba permutacji, w których żaden wyraz nie pokrywa się ze swoim numerem wynosi w przybliżeniu $n!e^{-1}$.

Zadanie 2.
Zadanie to w literaturze występuje jako zadanie o wyborze męża, zadanie o wyborze największego brylantu, czy jako gra w wybór największej liczby. Przedstawimy to zadanie w ostatniej interpretacji.
Jeden z graczy napisał na n karteczkach $n > 1$ liczb. Drugi gracz, wybiera po kolei karteczki i odczytuje liczby. Zadaniem jego jest wskazanie największej spośród nich, ale wskazać może jedynie liczbę ostatnio czytaną. Jaka jest optymalna strategia zgadującego gracza i jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu dla tej optymalnej strategii?

Optymalna w tym sensie, że gwarantuje największe prawdopodobieństwo wskazania największej liczby.

Rozwiązanie.
Oznaczmy wartości kolejno odczytywanych liczb przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dynkin (Uspiechi Akademii Nauk ZSRR, 1963) wykazał, że wystarczy ograniczyć się do strategii: obejrzeć pierwszych p liczb ($p = 0, 1, \ldots, n-1$) i wskazać pierwszą większą od tych p pierwszych. Gdy $p = 0$ to wskazujemy na x_1, gdy wśród pierwszych p znajduje się największa liczba to wskazujemy x_n. Strategię taką nazwiemy p-tą strategią.

Obliczymy prawdopodobieństwo q_p sukcesu p-tej strategii. Oczywiście, $q_0 = 1/n$.

Niech teraz $p > 0$. Oznaczmy przez S_p, zdarzenie, że p-ta strategia osiągnie sukces, a przez A_k, że największa liczba występuje na k-tej pozycji ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Zauważmy, że $P(A_k) = 1/n$, $P(S_p|A_{k+1}) = 0$ gdy $0 < k < p$ oraz $P(S_p|A_{k+1}) = p/k$, gdy $p \le k < n$.

Uzasadnienie wzoru dla przypadku $p \le k < n$. Podajemy receptę na skonstruowanie ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takiego, że zrealizuje się zdarzenie S_p, gdy wiadomo, że zaszło zdarzenie A_{k+1}:
(1) największą liczbę umieszczamy na miejscu $k+1$,
(2) spośród $n-1$ liczb, różnych od x_{k+1} wybieramy dowolnych k liczb,
(3) największą z nich umieszczamy na jednej z pozycji $1, 2, \ldots, p$,
(4) pozostałych $k-1$ liczb, wybranych w kroku 2, umieszczamy dowolnie na pozycjach $1, 2, \ldots, k$, z wyjątkiem pozycji zajętej w kroku 3,
(5) pozostałych $n-k-1$ liczb umieszczamy dowolnie na pozycjach $k+2, k+3, \ldots, n$.
Kroki 1–5 można wykonać na odpowiednio 1, $\binom{n-1}{k}$, p, $(k-1)!$, $(n-k-1)!$ sposobów.

Zdarzenie S_p, przy założeniu, że zaszło zdarzenie A_{k+1} można zrealizować na $1 \times \binom{n-1}{k} \times p \times$ $\times (k-1)! \times (n-k-1)!$ sposobów. Dzieląc tę liczbę przez $(n-1)!$, co jest liczbą permutacji ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, takich że maksimum jest na $(k+1)$-szej pozycji, otrzymamy pożądany wynik.

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymamy, że dla $p > 0$

$$q_p = P(S_p) = \sum_{k=p}^{n-1} P(S_p|A_{k+1})P(A_{k+1}) = \frac{p}{n}\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Warto od razu zauważyć, że $q_p \ge 1/n = q_0$, co eliminuje zerową strategię (dla $p = 0$) z grona strategii optymalnych.

Oznaczmy przez r_n numer p optymalnej strategii dla danego n, to znaczy takie r_n, że $q_{r_n} \ge q_p$ dla każdego $p = 1, 2, \ldots, n-1$. W przypadku, gdyby takich liczb było więcej, to wybierzemy najmniejszą spośród z nich.

Pokażemy, że r_n jest największą z liczb $p = 1, 2, \ldots, n-1$ spełniającą nierówność $\sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k} \ge 1$.

Dla małych n łatwo z tego warunku wyznaczyć r_n: $r_n = 1$ dla $n = 2, 3, 4$, $r_n = 2$ dla $n = 5, 6, 7$, $r_n = 3$ dla $n = 8, 9, 10$. Prawdopodobieństwo sukcesu dla $n = 2, 3, \ldots, 10$ przy zastosowaniu optymalnej strategii wynosi (z dokładnością do czterech miejsc po przecinku) odpowiednio 0,5, 0,5, 0,4583, 0,4333, 0,4278, 0,4143, 0,4098, 0,4060, 0,3987.

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie przybliżone dla r_n i q_{r_n}. Jak widać z poprzednich rozwiązań, r_n spełnia układ nierówności

$$\sum_{k=r_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ge 1 \quad \text{i} \quad \sum_{k=r_n+1}^{n-1}\frac{1}{k} < 1.$$

Z analizy matematycznej wiadomo, że dla dużych n w przybliżeniu $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \simeq$ $\simeq c + \ln(n)$, gdzie $c = 0,577215664\ldots$ jest stałą Eulera, a ln jest logarytmem naturalnym (czyli logarytmem o podstawie e). Skąd wynika, że w przybliżeniu r_n leży w przedziale $\left(\frac{n-1}{e}, \frac{n-1}{e}+1\right)$. Przyjmuje się, że r_n jest najbliższą liczbie $\frac{n}{e}$ liczbą całkowitą, czyli $r_n\left[\frac{n}{e}+0,5\right]$; wtedy $q_{r_n} \simeq e^{-1}$.

W zadaniu tym znów pojawiła się liczba e jako prawdopodobieństwo sukcesu przy zastosowaniu optymalnej strategii r_n; za pomocą e można również określić tę strategię. Oczywiście, wzory te są przybliżone. Jednak ich zgodność z wartościami dokładnymi jest całkiem zadowalająca – patrz poniższa tabela (przybliżona wartość prawdopodobieństwa sukcesu wynosi $e^{-1} \simeq 0,3679$).

n	r_n	przybl. r_n	prawd. sukcesu
2	1	1	0,5000
3	1	1	0,5000
4	1	1	0,4583
5	2	2	0,4333
10	3	4	0,3987
20	7	7	0,3842
30	11	11	0,3787
40	15	15	0,3757
50	18	18	0,3742
100	37	37	0,3710
200	73	74	0,3703

Procedura wyboru r_n może być opisana tak: tworzymy kolejne sumy $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}, \ldots$ tak długo, aż po raz pierwszy przekroczymy 1. Wskaźnik, dla którego to nastąpiło, jest równy r_n.

Dla $n = 2$ jest $q_2 = 1/2$, $r_2 = 1$, gdyż w tym przypadku mamy tylko jedną możliwą strategię.

Niech teraz $n > 2$. Mamy

$$q_{p+1} - q_p = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=p+1}^{n-1}\frac{1}{k} - 1\right),$$

dla $p = 1, 2, \ldots, n-2$.

Stąd wynika, że różnica ta jest monotonicznie malejącą funkcją p oraz że dla $p = n-2$ różnica ta jest ujemna.

Możliwe są dwa przypadki

1° gdy $q_2 - q_1 < 0$ (tak jest dla $n = 3, 4$).

Wtedy wszystkie różnice $q_{p+1} - q_p$ są ujemne i ciąg q_p jest malejący, a więc $r_3 = r_4 = 1$.

2° gdy $q_2 - q_1 \ge 0$ (tak jest dla $n > 4$, co więcej ta różnica jest zawsze dodatnia dla $n > 4$). Wtedy q_p jest najpierw rosnąca, a potem malejącą funkcją p, a więc ma dokładnie jedno maksimum, skąd wynika, że r_n będzie największą z liczb $p = 1, 2, \ldots, n-1$, spełniających nierówność $\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{k} > 1$.

Z wzoru $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \simeq c + \ln(n)$ otrzymamy, że $\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{k} \simeq \ln(n) - \ln(p)$ oraz $q_p \simeq \frac{p}{n}\ln\frac{n-1}{p-1}$. Stąd przybliżone rozwiązanie układu, definiującego r_n. Rozwiązanie $r_n = \left[\frac{n}{e}\right]$ czasami jest mniejsze o 1 od tego rozwiązania (kiedy?). Łatwo zauważyć, że $\lim q_{r_n} = e^{-1}$, gdy n zmierza do nieskończoności.

Zadanie 3.

Dany jest ciąg zmiennych losowych niezależnych $X_1, X_2, \ldots$ o tym samym rozkładzie ciągłym. Jaka jest wartość oczekiwana „pierwszego momentu odbicia od dna", to znaczy jaka jest wartość oczekiwana zmiennej losowej N, której wartościami są liczby naturalne, określonej przez warunki:

$$X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_{N-1} \text{ i jednocześnie } X_{N-1} < X_N .$$

Rozkład zmiennej losowej X jest ciągły, gdy prawdopodobieństwo, że zaobserwujemy wartość $X = u$ jest równe 0 dla każdego u.

Rozwiązanie.

Skorzystamy tu ze wzoru na wartość oczekiwaną dla zmiennej losowej Z o wartościach naturalnych:

$$(1) \qquad E(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P\{Z > k\}.$$

Niech, dla dowolnej formy zdaniowej f, $[f] = 1$, gdy f jest prawdziwa i $[f] = 0$, gdy f jest fałszywa. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{Z > k\} =$$
$$= \sum_{n,k} [k \geq 1][n > k] P\{Z = n\} =$$
$$= \sum_{n} P\{Z = n\} \sum_{k} [1 \leq k < n] =$$
$$= \sum_{n} P\{Z = n\}(n-1)[n > 1] =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} P\{Z = n\} n - \sum_{n=2}^{\infty} p\{Z = n\} =$$
$$= E(Z) - P\{Z{=}1\} - (1 - P\{Z{=}1\}) =$$
$$= E(Z) - 1.$$

Zdarzenie $\{N > k\}$ jest równoważne zdarzeniu $\{X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_k\}$. Z niezależności i jednakowości rozkładu wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia $\{X_{i_1} \geq X_{i_2} \geq \ldots \geq X_{i_k}\}$ nie zależy od permutacji $i_1, i_2, \ldots, i_k$ wskaźników $1, 2, \ldots, k$. Z ciągłości wynika również, że część wspólna dwóch takich zdarzeń dla różnych permutacji wskaźników ma prawdopodobieństwo 0. Suma takich zdarzeń po wszystkich permutacjach wskaźników $1, 2, \ldots, k$ dla ustalonego k jest zdarzeniem pewnym. Stąd wynika, że

$$P\{X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_k\} = \frac{1}{k!}.$$

Mamy więc gotowy wzór na wartość oczekiwaną N:

$$E(N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Zauważmy, że z symetrii wynika, że dla zmiennej losowej M, określonej warunkami $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_{M-1}$ i jednocześnie $X_{M-1} > X_M$, mamy $E(M) = \mathrm{e}$.

Wynik tego zadania może służyć do oceny, czy zadany ciąg liczb jest ciągiem niezależnych od siebie liczb losowych o tym samym rozkładzie. Wystarczy obliczyć, ile kolejnych elementów ciągu tworzy ciąg monotoniczny i dodać 1 (będzie to wartość zmiennej N, gdy jest to ciąg nierosnący i wartość zmiennej M, gdy jest to ciąg niemalejący). Wartość przeciętna tak otrzymanej liczby powinna wynosić $\mathrm{e} \simeq 2,7\ldots$ czyli około 3. Prawdopodobieństwo, że długość ciągu monotonicznego wynosi co najmniej 3 jest równa 1/3! czyli około 0,167, a analogiczne prawdopodobieństwo, że długość ciągu monotonicznego wynosi co najmniej 4 jest równa 1/4! czyli około 0,042. Oznacza to, że jeśli zaobserwujemy, że w danym ciągu trzy kolejne wyrazy tworzą ciąg monotoniczny, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia przy założeniu losowości (to znaczy, że zadany ciąg liczb jest ciągiem niezależnych od siebie liczb losowych o tym samym rozkładzie) jest małe co każe podejrzewać, że założenia o losowości nie są spełnione. Bardziej jeszcze te podejrzenia będą uzasadnione, gdy zaobserwujemy, że 4 kolejne wyrazy tworzą ciąg monotoniczny.

Na przykład, w rozwinięciu liczby e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku: $\mathrm{e} \simeq 2,7182818285$ obserwując kolejne cyfry, począwszy od pierwszej, otrzymamy ciągi monotoniczne cyfr o długościach równych 2, co nie przeczy znanej skądinąd tezie o losowości występowania cyfr w rozwinięciu e; podobny efekt uzyskamy obserwując pary cyfr.

Zadanie 4.

Dany jest ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Jaka jest wartość oczekiwana zmiennej losowej N będącej pierwszym momentem k, kiedy suma zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ osiągnie lub przekroczy wartość 1?

Inaczej: produkujemy losowe odcinki wg rozkładu jednostajnego; ile średnio należy dodać takich odcinków, aby suma ich długości osiągnęła lub przekroczyła 1?

Rozwiązanie.

Podobnie, jak w zadaniu 3, skorzystamy ze wzoru (1). W tym celu zauważmy, że $P\{N > k\} = P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_k < 1\}$.

Oznaczmy przez U_k dystrubuantę sumy $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, a przez u_k jej gęstość.

Wtedy $P\{N > k\} = U_k(1)$. Zachodzi wzór rekurencyjny

$$u_k(t) = \int_0^1 u_{k-1}(t-z)\, dz = U_{k-1}(t) - U_{k-1}(t-1) \quad \text{oraz}$$

$$U_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(z)\, dz \quad \text{i} \quad U_1(t) = t_+ - (t-1)_+ .$$

Zachodzi wzór: $S_k = S_{k-1} + X_k$. Zmienne S_{k-1} i X_k są niezależne, więc ze wzoru na gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych mamy, że $u_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{k-1}(t-z) f(z)\, dz$, gdzie f jest gęstością X_k czyli $f(z) = 1$ dla $0 \leq z \leq 1$ i 0 poza tym przedziałem.

Definiujemy $t_+ = t$, gdy $t \geq 0$ i 0, gdy $t < 0$.

Uogólniając, wartość oczekiwana zmiennej losowej N będącej pierwszym momentem, kiedy suma zmiennych losowych $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ osiągnie lub przekroczy wartość a, spełniającą nierówność $0 < a \leq 1$ wynosi $E(N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$.

(Zauważmy, że $U_k(a) = \frac{a^k}{k!}$).

Przez indukcję można udowodnić, że

$$U_k(t) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(t-i)_+^k,$$

co daje natychmiast, że $U_k(1) = \frac{1}{k!}$.

Ze wzoru (1) otrzymamy natychmiast, że $E(N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Zadanie 5.

Tu losowo oznacza: jednostajnie na $(0,1)$.

Na odcinku $(0,1)$ wybieramy losowo i niezależnie n punktów, które go rozbijają na $n+1$ odcinków. Czy podział ten jest sprawiedliwy?

Rozwiązanie.

Co to znaczy, że podział jest sprawiedliwy? Nie jest to matematycznie precyzyjne pojęcie. Zastanowimy się nad dwiema możliwymi interpretacjami terminu „sprawiedliwy podział".

1. Podział jest sprawiedliwy, gdy rozkład długości każdego z $n+1$ odcinków jest taki sam.

W przypadku podziału deterministycznego podział byłby sprawiedliwy, gdyby długość każdego odcinka była równa $1/(n+1)$.

2. Podział jest sprawiedliwy, gdy dla każdego z odcinków prawdopodobieństwo, że ma on długość, większą niż $1/(n+1)$, jest takie samo jak prawdopodobieństwo, że ma on długość, mniejszą niż $1/(n+1)$.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$, a $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ będą uporządkowanymi rosnąco zmiennymi $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Wykażemy, że długości odcinków mają ten sam rozkład. Utwórzmy jeszcze jedną zmienną losową X_{n+1}, niezależną od poprzednich i o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$. Zwińmy teraz odcinek $(0,1)$ tak, by powstał okrąg o obwodzie 1, na którym wybierzmy dowolnie punkt O. Od punktu O, zgodnie z wybraną orientacją, na przykład zgodnie z ruchem wskazówek zegara, odkładamy łuki odpowiadające wartościom zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Ze względu na symetrię (wszystkie zmienne mają ten sam rozkład i są niezależne), długości $n+1$ łuków okręgu, powstałych z podziału punktami $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ (wykluczamy punkt O) mają jednakowy rozkład. Rozetnijmy teraz okrąg w punkcie X_{n+1} i otrzymamy wyjściowy odcinek $(0,1)$. Tym samym udowodniliśmy, że podział jest sprawiedliwy według interpretacji 1.

Z jednakowości rozkładu wynika bez żadnych rachunków, że oczekiwana długość każdego z tych odcinków wynosi $1/(n+1)$.

Jaki to jest rozkład? Wystarczy obliczyć dystrybuantę $F(t)$ długości odcinka $(0, X_{(1)})$ dla t z przedziału $(0,1)$.

$$\begin{aligned}1 - F(t) &= P\{X_{(1)} > t\} = P\{X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_n > t\} = \\ &= P\{X_1 > t\}P\{X_2 > t\}\ldots P\{X_n > t\} \text{ (niezależność!)}.\end{aligned}$$

Stąd $1 - F(t) = (1-t)^n$.

Wykażemy, że podział jest niesprawiedliwy według drugiej interpretacji. Skoro dystrubuanta długości każdego odcinka jest taka sama, więc prawdopodobieństwo, że długość dowolnego, wybranego przez nas odcinka jest większa niż $1/(n+1)$ wynosi $1 - F(1/(n+1)) = (1 - 1/(n+1))^n$. Liczba ta jest zawsze mniejsza od 1/2 z wyjątkiem przypadku $n = 1$, co więcej, prawdopodobieństwa te maleją wraz ze wzrostem n. Oznacza to, że dla $n > 1$ prawdopodobieństwo uzyskania dłuższego odcinka, niż nam by się należało, jest mniejsze (!) niż prawdopodobieństwo uzyskania niesprawiedliwie krótszego odcinka. Wraz ze wzrostem n ta „niesprawiedliwość" staje się jeszcze drastyczniejsza.

Dziwny to podział, w którym bardziej prawdopodobne jest, że wszyscy dostają mniej niż powinni, a odcinek zostaje w całości wyczerpany. Tak nie mogłoby się przydarzyć w przypadku deterministycznego podziału.

A gdzie tu liczba e? Wystarczy zauważyć, że $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1})^n = 1/e$. Oznacza to, że dla dużych n prawdopodobieństwo uzyskania odcinka dłuższego, niż by to wynikało ze sprawiedliwego, podziału wynosi w przybliżeniu 1/e, czyli około 0,368.

Przez jednorodność rozmieszczenia gwiazd będziemy rozumieć taką własność, że rozkład odległości do najbliższej gwiazdy nie zależy od punktu obserwacji. Izotropowość oznaczać będzie, że rozkład odległości do najbliższej gwiazdy nie zależy od kierunku patrzenia.

Istnienie średniej to na ogół mocne założenie. Nie każda zmienna losowa musi mieć wartość oczekiwaną. Z założenia izotropowości i jednorodności wynika, że $E(D)$ istnieje (!) (patrz równanie funkcyjne na $G(t)$ i jego rozwiązanie), gdyż $a < 0$ ($G(t)$ jest funkcją malejącą.

Zdarzenie $\{D > u\}$ oznacza, że na odcinku od naszego punktu obserwacji do odległości u nie ma gwiazd.

Zadanie 6.
Załóżmy, że gwiazdy rozmieszczone są w kosmosie izotropowo i jednorodnie ze średnią odległością gwiazd równą d. Załóżmy, że takie d istnieje choć nie musimy znać tej liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że patrząc w dowolnym kierunku zobaczymy najbliższą gwiazdę w odległości większej niż d?

Rozwiązanie.
Niech $F(t)$ oznacza dystrybuantę odległości do najbliższej gwiazdy, to znaczy prawdopodobieństwo, że zmienna losowa D oznaczająca odległość do najbliższej gwiazdy przyjmie wartości mniejsze od t. Oczywistym jest, że $F(t) = 0$ dla $t \leq 0$.
Niech $G(t) = P\{D > t\} = 1 - F(t)$.

Z założenia jednorodności wynika, że dla każdego $t, s \geq 0$

(2) $$P\{D > t + s | D > s\} = P\{D > t\}.$$

Lewa strona powyższej równości oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że do odległości $t + s$ nie ma gwiazd, gdy wiemy, że do odległości s nie ma gwiazd. Przenosząc swój punkt obserwacji o s jednostek widzimy, iż prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest takie samo, jak prawdopodobieństwo, że od naszego nowego punktu obserwacji do odległości t nie ma gwiazd.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika, że

Jeśli do odległości $t + s$ nie ma gwiazd to i do odległości s nie ma gwiazd, czyli zdarzenie $\{D > t + s\}$ pociąga za sobą zdarzenie $\{D > s\}$.

(3) $$P\{D > t + s | D > s\} = \frac{P\{D > t + s \text{ i } D > s\}}{P\{D > s\}} = \frac{P\{D > t + s\}}{P\{D > s\}}$$

Ze wzorów (2) i (3) otrzymamy równanie funkcyjne na G: $G(t + s) = G(t)G(s)$, którego jedynym mierzalnym rozwiązaniem jest funkcja $G(t) = e^{at}$.

Wyznaczymy wartość parametru a. Wiemy, że $E(D) = d$. Ale $E(D) = \int_0^\infty t f(t)\, dt$, gdzie $f(t)$ jest gęstością D, czyli pochodną $F(t)$.

Widać też, że $f(t) = -G'(t) = -ae^{at}$, skąd wynika, że $\int_0^\infty t f(t)\, dt = -1/a$ oraz $a < 0$. Stąd mamy $a = -1/d$.

Natychmiast otrzymamy też odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu: $P\{D > d\} = G(d) = e^{-1}$.

Możemy więc sformułować odpowiedź, że przy założeniu izotropowości i jednorodności, odległość do najbliższej gwiazdy przekracza średnią odległość między gwiazdami z prawdopodobieństwem $1/e$. W każdym punkcie kosmosu więcej jest więc gwiazd bliższych niż dalszych.

Literatura

M. H. De Groot, *Optimal statistical decisions*, Mc Graw-Hill Comp., New York 1970.
W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom 2, Warszawa 1969.
M. Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon and Shuster, 1966 (jest rosyjski przekład).
M. Gardner, *Mathematical Puzzles and Diversions*, Bell and Sons, London 1968.