Matematyka: wewnętrznie sprzeczna jedność ogólności i konkretu

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Babcia i dziadek mają razem 140 lat. Dziadek ma dwa razy tyle lat ile babcia miała wtedy, kiedy on miał tyle, ile ona teraz. Ile mają lat?

Jeśli ktoś przeżywał emocje jakie towarzyszą rozwiązywaniu takich zagadek, to był on matematykiem. Bo matematykiem się bywa, chociaż według innej umowy, matematyk to zawód, który wpisuje się w odpowiednie miejsce w dowodzie osobistym.

Siąpi deszcz. Studenci stojący na przystanku szukają gorączkowo rozwiązania. Nie wsiądą do przejeżdżających tramwajów zanim nie stwierdzą, że dziadek ma (...no, ale może tego nie zdradzimy). Są oni w tej chwili matematykami, mimo że według innych kryteriów stanowią o tym ich prace z rozmaitych probabilistyk, algebr czy topologii. Być może, dopiero to niewymuszone zainteresowanie upewnia, że na poziomie matematyki profesjonalnej przyjmą podobną postawę, bez której i w niej nie da się nic zrobić.

Mało która nauka ma tyle sprzecznych ocen co do jej roli w kulturze stworzonej przez człowieka co matematyka. Jest mało znana i budzi lęk u profanów już przy przekraczaniu pierwszych progów, ale i pewne pobłażanie dla jej adeptów, którzy zajmują się rzeczami tak dalekimi, że trudno pomyśleć, by mogły być użyteczne, a tym bardziej szkodliwe. Przyjrzyjmy się kilku sprawom.

I. Między ciągłością i nieciągłością

Zagadnienia matematyczne powstają z konkretu i dla konkretu. Ale skoro się już pojawią, zaczynają żyć własnym życiem, rodzą pytania przedtem niepostawione, motywując się same przez się, a nie przez konkret.

Mierzenie długości pól dało początek geometrii. Jeszcze zanim matematyka dotarła do Greków wiedziano, że trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jest prostokątny, co łączono z tym, że $3^2+4^2=5^2$. Grecy potwierdzili to dowodem, odkrywając wpierw twierdzenie odwrotne: jeśli trójkąt jest prostokątny, to $a^2+b^2=c^2$ dla jego boków a, b i c, jeśli przez c oznaczyć przeciwprostokątną. Jest to twierdzenie Pitagorasa. Ma ono pewne znaczenie praktyczne. Ale matematycy mają częściej na uwadze inny aspekt tego twierdzenia. Oto Grecy porównywali długości dwu odcinków przez szukanie odcinka, który mieściłby się pewną liczbę razy w jednym i pewną liczbę razy w drugim. Właśnie z twierdzenia Pitagorasa wynika, że nie można w ten sposób porównać ze sobą boku i przekątni kwadratu. Znaczy to, że ułamki liczb całkowitych nie wyczerpują, przy ustalonej jednostce długości, wszystkich możliwych długości odcinków. Można to też i tak wyrazić, że nie wyczerpują wszystkich punktów na prostej. Pitagorejczycy, którzy upatrywali w liczbie całkowitej środek dla zbudowania pojęć o przestrzeni, doznali podobno rozczarowania. Ale nie jako matematycy, bo ten kryzys – tak to nawet określano – właściwie dopiero matematykę stworzył.

Liczby zaczęto widzieć jako ułożone w sposób ciągły. Ale rozumienie tego zwrotu sprawia trudność. Zastanawiali się nad tym jeszcze Grecy, przemyśleli problem scholastycy, matematycy dziewiętnastego wieku dali rozwiązanie. Liczby leżą nie tylko gęsto, co znaczy, że między każdymi dwiema leży jeszcze jedna, ale że położone są w dodatku tak, że jeśli ich zbiór rozdzielić na dwie części tak, by liczby jednej z tych części były, wszystkie, mniejsze od wszystkich liczb drugiej z nich, to jedna z tych części, i tylko jedna, ma w sobie punkt przylegający do drugiej z tych części. Zbudowany w ten sposób zbiór liczb odpowiada naszym wyobrażeniom o ułożeniu ciągłym punktów. Dlatego matematycy, na mocy umowy pozamatematycznej, uznali ten zbiór za prostą. Ale te wyobrażenia

Nie docenia się nadal wpływu myśli scholastycznej na rozwój nauk ścisłych, przypisując tę rolę mylnie okresowi, który sam siebie nazwał „Odrodzeniem", mimo że od przewartościowania poglądów na tę sprawę minęło stulecie. Derek J. de Solla Price w książce *Science and suprascience*, Paris, 1972 (str. 19) pisze: *Szkoła ... Merton College (z Suissethem i in.) upadła około roku 1390, uniwersytet paryski zaś po ustąpieniu Nicole Oresme. Nastał okres trwający od 1400 do 1460, w którym nauka wydawała się martwa jak nigdy przedtem.*

Zanim Richard Dedekind ujął w ten sposób ciągłość w swoich wykładach w Zurychu (1858), pojęcie przekroju – bo o tym mowa – miało długą tradycję pozamatematyczną. *Czym mierzyć siłę Sokratesa: najmniejszym ciężarem, którego nie może podnieść, czy największym, który może podnieść?* – pytał Heytesbury z Merton College w Oksfordzie, żyjący w XIV wieku.

nie znajdują pełnego potwierdzenia w obserwacji, np. cienkiego wyprostowanego drutu. Gdy drut rozetniemy, to w miejscu rozcięcia widzimy końce obu kawałków, na które się rozpadł. Skąd się wzięły dwa końce, skoro w miejscu rozcięcia był tylko jeden punkt? A może tylko jeden z kawałków na koniec? Jeśli tak, to który? A może żaden? Ale wtedy musielibyśmy się zapytać, gdzie i w jaki sposób jeden punkt się zgubił. W końcu żadna z możliwości nas nie zadawala i zaczynamy zgadzać się z tym, że prosta matematyczna to nie kawałek drutu, że płaszczyzna matematyczna to nie arkusz blachy, że przestrzeń matematyczną trzeba odróżniać od materii. Mimo że na tej prostej matematycznej jest tak dużo punktów, że nie dla wszystkich starcza miejsca w naszych wyobrażeniach, konwencja ciągłości prostej stanowi uproszczenie wobec prostych „realnych", których budowy w ogóle nie znamy. Uproszczeniem jest uważać bieg czasu za ciągły, ale dopiero to umożliwia sprecyzowanie pojęć związanych z ruchem. Prędkość punktu w danej chwili jest rzeczą niewyobrażalną. Ale matematycznie określić się pozwala, jako stan graniczny prędkości przeciętnych, które są bliższe rozumieniu. W wieku siedemnastym zasługą Newtona było opanowanie przejść granicznych i stworzenie metody w postaci rachunku pochodnych i całek pozwalającej z rejestru stanów granicznych odtwarzać przebieg zjawiska. Nauka o ruchu została wbudowana w matematykę, a wraz z nią cały wielki obszar zjawisk przyrody, która – zdawało się – uległa narzuconej sobie konwencji. Przez prawie całe dwa stulecia matematyka rozwijała się w sposób jakby z góry przewidziany, gdy patrzeć na to z pozycji nam współczesnych, kształtowana przez przyjęte na siebie zadania. Ile w matematyce tych czasów monumentalności uwidaczniającej się w nazwach pojęć i twierdzeń. Weźmy choćby takie słowo jak „integral" – polski odpowiednik „całka" nie oddaje jego powagi, czasem nawet może brzmieć śmiesznie.

Jeden z długiej listy – zapoczątkowanej przez Zenona z Elei – paradoksów związanych z ciągłością.

Ten termin pochodzi od Jana Śniadeckiego. A oto co pisze sam Śniadecki na temat terminologii: „Wyraz nowy powinien być poważny i skromny, nie dający powodu do przeciągania go na znaczenie śmieszne lub wstyd obrażające", *O języku narodowym w matematyce*, str. 37–52 tomu I *Dzieł filozoficznych* Jana Śniadeckiego, Biblioteka Klasyków Filozofii, Warszawa 1958. Dla ścisłości: Śniadecki proponował termin „całkość".

Oznaki kryzysu ciągłościowego ujmowania matematyki pojawiły się w połowie dziewiętnastego wieku, po tym, kiedy w początku wieku za sprawą Cauchy'ego poszerzono zakres stosowalności tego ujęcia na figury i funkcje pochodzenia pozaalgebraicznego, funkcje zadawane – jak mówiono – „dowolnym ruchem ręki", i zliberalizowano konstrukcje matematyczne. Musiano to zrobić między innymi dlatego, że w pewnym zakresie zjawisk, np. tych które wymagały opisu przez szeregi trygonometryczne, przyroda okazała się wcale nie tak ciągła, jak wydawało się w czasach Newtona. W matematyce, w której do niedawna wszystko było ciągłe, zaciekawienie zaczęła budzić nieciągłość. Ale motywacje wewnątrz samej matematyki były równie silne. Okazało się, że mogą być łuki nie mające długości, funkcje ciągłe nie mające pochodnej w żadnym punkcie, funkcje mające wszędzie pochodną, ale nigdzie nie monotoniczne.

Ta osobliwość jest mniej znana. Odkrył ją A. Köpcke (1889). Zygmunt Zalswasser (1928) doszedł w tej osobliwości do skrajności, budując dla danych dwu przeliczalnych, gęstych i rozłącznych zbiorów A i B na prostej funkcję mającą wszędzie pochodną ograniczoną co do modułu przez 1, równą -1 na A i równą 1 na B.

Dużo później zaczęto mówić w fizyce o kwantach. Ale wtedy matematyka była już po części przygotowana do podjęcia nowego skoku: opanowania świata zjawisk nieciągłych. Ten skok się jeszcze w pełni nie dokonał i nie wiadomo jak się uda. Zilustrujmy trudność na jednym przykładzie. Aby obliczyć pracę wykonaną przez siłę na pewnej drodze, trzeba pomnożyć siłę przez drogę, a jeśli siła nie jest stała, to ją scałkować wzdłuż drogi. Ale co zrobić, jeśli siła działa w jednym miejscu i w jednej chwili, tak jak przy uderzeniu? Przecież nie pomnożymy siły przez zero. I chociaż rzecz jest prosta, opisujemy ją nie najprościej: aproksymujemy siłę chwilową siłami działającymi w sposób ciągły w ciągu pewnego czasu. Nie wiemy, jak można by to ująć inaczej.

Chodzi o funkcję delta Diraca, równą wszędzie 0 z wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość nieskończoność, i z której całka równa się 1. To fizycy. Poprawne rozumienie zapewnia teoria dystrybucji, dla której elementarne ujęcie ciągowe znalazł, niezależnie od innych ujęć, Jan Mikusiński (1955).

W świecie realnym nie ma ani ciągłości, ani nieskończoności, które mimo dumnych nazw są pojęciami upraszczającymi. Być może sposób funkcjonowania naszego myślenia narzuca to uproszczenie. Bo świat skończony jest trudny do uchwycenia bezpośrednio z powodu swego ogromu. Stąd aproksymacja przez nieskończoność i ciągłość. Ciągłościowe pojmowanie zjawisk doprowadziło w ciągu kilku ostatnich stuleci do wielkich rezultatów i do innej skrajności: niemal utożsamienia konwencji matematycznej z naturą rzeczy. Teraz ta konwencja wydaje się matematykę dusić i koło jakby się zamyka.

II. Matematyka głębokiego interioru

Mówi się, że matematyka jest sucha. Opinia ta bierze się może ze zbytniego akcentowania roli dowodu w matematyce. Rzeczywiście, fakty matematyczne zwane twierdzeniami połączone są łańcuchami rozumowań tworzących dowody. Ale przecież nie każde dwa i matematyka, jakkolwiek pod tym względem bardziej spójna niż inne dyscypliny, nie tworzy jednej całości. Dowody nie są jedynym środkiem rozszerzającym matematykę. Nowe idee powstają obok innych. Są takie, które wychodzą spoza matematyki. W chwili wyboru konwencji dla powstającej teorii, matematyk na razie niczego nie dowodzi i musi polegać tu na wcześniej wyrobionej wyobraźni. Szukanie dowodu też nie polega na przesuwaniu się krok po kroku, nawet jeśli prawdziwość hipotezy jest przesądzona: wyobraźnia musi poprzedzać ciąg dowodowy. A jeśli mamy do czynienia z zagadnieniem, kiedy sformułowanie prawdopodobnego rozwiązania jest już trudnością, postępujemy tak, jak to się robi i poza matematyką. Staramy się jak najdokładniej wyobrazić sobie sytuację i utrzymać wyobrażenie po to, by każdy nowy szczegół mógł być do niej szybko dołączony, lub odrzucony, jeśli nie pasuje. Odrzucanie fałszywych tropów jest równie ważne co potwierdzanie poprawnych. Różnica między pracą w matematyce i gdzie indziej polega głównie na tym, że jej obiektem są pojęcia matematyczne, a nie przedmioty konkretne, które mają tę właściwość, że pracując nad nimi możemy pozwolić sobie na wyłączenie wyobraźni: kiedy się do nich wraca, one dalej są.

Tego porównania lubił używać Hugo Steinhaus mając na myśli właśnie obrzeża matematyki.

My wróćmy jednak do matematyki. Chociaż na skraju lasu jest podobno najciekawiej, wstąpmy raczej do matematycznego interioru, który jest szerszemu ogółowi mniej znany.

Zahaczmy o jeden jego fragment: zbiory. Obecnie dzieci w szkole uczą się o zbiorach, bo rzeczywiście początkowo jest to rzecz dla dzieci. Może to dlatego nie zajęli się zbiorami Grecy i może dlatego ważono lekko scholastyków, dla których zmartwieniem było, że oto nie wiedzą w jaki sposób takie nicości jak punkty składają się w końcu na wielkość. Wyjaśnili to matematycy dziewiętnastego wieku, lecz nie dla pustej ciekawości, ale dlatego, że zbiory punktów zaczęły pojawiać się w matematyce w sposób nietrywialny. Georg Cantor zauważył, że w dowiedzionym przez niego twierdzeniu o jednoznaczności rozwinięcia trygonometrycznego założenia dopuszczają pewną tolerancję: nie muszą być spełnione we wszystkich punktach. Zapytywał: w ilu? I okazało się, że należy zapytywać nie o ilość, ale o sposób ułożenia punktów w zbiorze, który może być nawet nieskończony. Rozszerzono pojęcie całki na funkcję niekoniecznie ciągłe, ale dla całkowalności konieczne było, by zbiór punktów nieciągłości – mógł być on nawet nieskończony – spełniał pewne warunki co do swej budowy. Ważną rolę pełniła pewna cecha ilościowa: liczebność zbioru. Dwa zbiory mają tę samą liczebność (używano i używa się nazwy: moc), jeśli można przekształcić wzajemnie jednoznacznie jeden zbiór na drugi. Scholastycy, w tym Galileusz, wiedzieli o tej możliwości, ale bądź nie przywiązywali do niej wagi, bądź odrzucali ją jako nie przydatną.

Georg Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen 5 (1872), 123–132. Na pytanie, czym mogą być zbiory „wyjątkowe" Cantora, nie ma dotąd pełnej odpowiedzi. Aleksander Rajchman (1922) – i niezależnie Nina Bari – wskazał na istnienie zbiorów „wyjątkowych" wśród zbiorów cantorowskich.

Galileusz, przy okazji zajmowania się prawem spadku swobodnego, zauważył, że liczb naturalnych jest tyle samo co ich kwadratów, jeśli je porównać przez przeliczenie. Wyciągnął stąd wniosek, że ten sposób porównywania zbiorów jest niesensowny, jeśli zbiory są nieskończone. Tomasz Bradwardine (1290–1349), późniejszy arcybiskup Canterbury, zauważył, że ten sposób porównywania zbiorów punktowych prowadzi do absurdalnego wniosku o równości pól dwu trójkątów o tej samej podstawie i różnych wysokościach.

Odkrycie wagi pojęcia zbioru w matematyce spowodowało odrodzenie zainteresowania się zbiorami przez filozofów. Przedtem już wiedziano, w jaki sposób, posługując się jedynie pojęciami związanymi ze zbiorami i wychodząc z liczb naturalnych, zbudować liczby całkowite (tj. także zero i ujemne) i wymierne (tj. ułamki liczb całkowitych), a potem liczby stanowiące continuum rzeczywiste. Leopold Kronecker uszczypliwie stwierdzał, że „[tylko] liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystkie inne są dziełem matematyków". Co by powiedział, jeśliby mógł zobaczyć, że i liczbom naturalnym w końcu nie darowano. Oto Gottlob Frege, a w ślad za nim Bertrand Russell, zarysowali ideę zbudowania liczb naturalnych posługując się jedynie logiką i teorią zbiorów. Cała matematyka stawała się w ten sposób częścią świata naszych myśli, bo w tym znaczeniu ogólnym zbiory są tylko pozornie czymś bardziej konkretnym niż własności przedmiotów, które są nazywane również ideami. Już scholastycy znali ten wybieg dający pozór eliminowania idei platońskich.

„Unseres Gedankenwelt" – zwrot użyty przez Dedekinda w jednym z dowodów w *Was sind und was sollen die Zahlen* (Czym są i czemu służą liczby), Braunschweig 1887.

Władysław Tatarkiewicz wymienia Joscelina z Soissons, żyjącego w wieku XIII, jako twórcę „teorii zbioru", w tomie I *Historii Filozofii*, str. 237 wydania 9–ego, Warszawa 1981.

Skoro cała matematyka miała się sprowadzić do logiki i do zbiorów, należało ustalić czym jest teoria zbiorów. Zrobił to Ernst Zermelo na początku wieku. Sprecyzował między innymi zasady na jakich dopuszcza się do rozważań nowe zbiory, jeśli dopuściliśmy już przedtem jakiś ich zakres. Jedne z tych zasad były banalne, a inne pozornie banalne, jak np. ta, według której mając zbiory bez elementów wspólnych można wprowadzić do rozważań zbiór mający w tych zbiorach po dokładnie jednym elemencie. Jest to słynna zasada wyboru. Bertrand Russell tak tłumaczy w swojej książce jej niebanalność. Wyobraźmy sobie milionera mającego nieskończenie wiele par butów. Nie ma on żadnego kłopotu z wyborem po jednym bucie z każdej pary: weźmie z każdej pary np. lewy but. Ale co zrobi milioner mający nieskończenie wiele par pończoch? Przykład Russella jest bardzo sugestywny, ale widać zeń, że nie milionerzy będą mieć kłopty z zasadą wyboru: nie ma takiego, któryby miał nieskończenie wiele par pończoch. Przyjmijmy, że ma ich milion. Będzie brał po kolei każdą parę i brał z niej jedną sztukę. Po milionie takich czynności wybór z miliona par będzie określony. Inaczej matematyk. W interiorze matematycznym są sytuacje, kiedy ma się nieskończenie wiele zbiorów i w żadnym z nich nie można wyróżnić ani elementu leżącego najbardziej na prawo, ani na lewo, ani najwyżej, ani najniżej, ani w jakikolwiek sposób jakoś wyróżnionego. Zasada wyboru pozwala na utworzenie zbioru, którego elementów nie znamy. Potem tym zbiorem się posługujemy. Posługujemy się czymś i nie wiemy czym to coś jest.

Bertrand Russell, *Wstęp do filozofii matematyki*, wydanie powojenne 1958, Warszawa; na str. 185 i dalszych.

Złe przeczucia się sprawdzają. Posługując się zasadą wyboru, Felix Hausdorff, Stefan Banach i Alfred Tarski pokazali, że kulę można rozbić na skończenie wiele części tak, że te części po pewnym ich przestawieniu utworzą dwie kule o tych samych rozmiarach co pierwotna. Części nie są bryłami znanymi z geometrii: przypisywanie im objętości prowadzi do absurdu. Zasada wyboru stwarza wiele tego rodzaju paradoksów. Była spośród innych jej zasad najbardziej atakowana przez przeciwników teorii zbiorów.

Paradoks Banacha–Tarskiego (1924). Istotną rolę spełniło pewne wcześniejsze, mniej spektakularne twierdzenie Felixa Hausdorffa (1914).

Niesłusznie. Bo wątpliwe miejsce ujęcia Zermeli leży gdzie indziej: w dopuszczeniu do rozważań wraz z danym zbiorem zbioru, którego elementami są wszystkie podzbiory tego zbioru. Żeby tę wątpliwość unaocznić, przypomnijmy, że pojęcie zbioru – w tym przypadku, podzbioru – to wybieg, by nie mówić o własnościach elementów danego zbioru. A własności powinny być wyrażane zdaniami, do budowy których środki powinny być z góry ustalone. Wkraczamy więc w sferę języka, a to już trochę za daleko, by matematyk mógł się czuć pewnie. Zdradliwie pozorna banalność zasady dopuszczającej rozważanie zbioru wszystkich podzbiorów danego zbioru wzbogaciła teorię zbiorów tak, że tego bogactwa nie sposób wykorzystać. Nie wchodząc w szczegóły, nie ma żadnego ograniczenia na liczebność zbiorów teorii Zermeli.

Sytuacja ta napawa troską matematyków, bo lubimy teorie dopasowane do zadań.

Oto co pisze Abraham Fraenkel: *Teoria mnogości wyposażona jest w wetestragende wielce niebezpieczną metodę tworzenia zbioru wszystkich podzbiorów danego zbioru*; str 221 książki *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer 1928.

Całkiem niedawno, z badań zapoczątkowanych jeszcze przez Kurta Gödla, wynikło, że większość niebanalnych hipotez teorii zbiorów może z sobą współistnieć w rozmaitych kombinacjach tych hipotez i ich zaprzeczeń w równie niesprzeczny sposób. Stąd, wielość teorii zbiorów na bardziej wyspecjalizowanych jej poziomach. Geometria, po odkryciach Łobaczewskiego i Bolyaia przeżywała podobny kryzys.

Podobnie jak w czasach Pitagorejczyków, nie jest to kryzys matematyki, bo ta się wzbogaca, ale kryzys pewnego poglądu na matematykę, który każe jak dotąd bezskutecznie szukać dla niej jednego źródła.

Filozoficznych aspektów teorii zbiorów nie rozumiał nawet Cantor. Źródło matematyczne – szeregi trygonometryczne – przestały być z czasem dlań dostateczną motywacją. Szukał więc oparcia u teologów i filozofów, a tych ostatnich w rozbudzonym filozoficznie wieku dziewiętnastym nie brakowało. Nadzieje filozofów uwidoczniały się w terminologii: nie mówiono zbiór lecz mnogość i nie odwzorowanie lecz odpowiedniość, symbole czerpano z alfabetu hebrajskiego, a z alfabetu greckiego powodzeniem cieszyły się ω i Ω.

Wacław Sierpiński (1882–1969), jeden z twórców teorii mnogości, do końca nie przestał być sceptyczny wobec jej ujęcia aksjomatycznego, stawiającego teorię mnogości ponad matematyką. Świadczą o tym przede wszystkim przemilczenia, a poza tym liczne przypisy i komentarze w jego pracach i książkach, w których przedstawia poglądy, niewątpliwie swoje, zasłaniając się zazwyczaj autorytetem Mikołaja Łuzina.

Coś z tego jeszcze zostało. Tymczasem linia matematyczna teorii mnogości (tak się teorię nazywa, mimo że żaden ze zbiorów nie jest tak nazywany), która przetrzymała druzgocący krytycyzm Poincarégo, dostosowując się do ograniczeń szkoły francuskiej, Baire'a, Borela i Lebesgue'a, utrzymując sceptycyzm Łuzina i Sierpińskiego, przebudowała w ciągu jednego stulecia całą niemal matematykę, nie podporządkowując jej sobie, lecz wnikając w każdy drobny jej szczegół.

W szkole się o tym nie mówi, bo na to tam nie pora. Ale mówi się o zbiorach. Wiadomo, co może wyniknąć, jeśli wypowiada się słowa, pod które nie można podstawić znaczeń. Symbole nabierają własnego życia, a u poszukujących sensu rodzi się mistycyzm.

III. Czyj jest matematyczny brzeg?

Korzystamy z matematyki wszyscy. Ale korzystanie z osiągnięć techniki może polegać np. na podnoszeniu słuchawki telefonicznej i wykręcaniu numeru. Zdajemy sobie sprawę, że z matematyki korzystamy inaczej. Korzyść z matematyki polega zwykle na wyjaśnieniu problemu. Korzystając z matematyki musimy ją więc rozumieć. Bywa, że rzecz sprowadza się do rachunku. Ten może za nas wykonać nawet maszyna. Ale już wynik musimy zrozumieć sami. Wyręczanie się kimś – wołanie fachowca – po prostu nie istnieje. Każdy musi się znać na tym fragmencie matematyki, który mu jest potrzebny. Nie musi być to fragment duży, niezbędną cechą jest wszakże spójność wewnętrzna, bo ma być rozumiany. Ten sposób korzystania z matematyki jest oczywisty i sprawdzony.

Tymczasem często lansuje się model inny: właśnie wołanie fachowca! Nie tędy droga. Na styku matematyki z jej zastosowaniem role matematyka i specjalisty-niematematyka są nierówne. Z prawdziwym rozeznaniem celu pracuje specjalista-niematematyk, on ma inicjatywę i satysfakcję, matematykowi może przypadać co najwyżej rola katalizatora pomysłów i wykonawcy rachunków. Są przykłady przeczące temu, nawet bardzo efektowne, ale przez to uwidaczniające ich wyjątkowość. Kiedy Norbert Wiener tworzył zarys cybernetyki – teorii bardzo nieostrej, dzięki której stał się sławny – oderwał się od matematyki, w czym pomogła mu wojna. Podobnie było ze Stanisławem Ulamem.

Specjalista-niematematyk jest w korzystniejszej sytuacji psychologicznej. Koncentruje się na określonym celu i stara się znaleźć środki ku temu wiodące. Jest to sytuacja naturalna towarzysząca każdej twórczej pracy. Matematyk, mając nawet najbardziej genialny środek, może rozpraszać uwagę na wielość jego zastosowań. Jedno przypadkowe zastosowanie nie daje satysfakcji, podobnie, jak nie daje satysfakcji matematycznej podstawianie do wzoru. Metoda taksomonii – pewna metoda klasyfikacji elementów danego zbiorowiska biorąca pod uwagę pewną ilość cech – była odkryta na przykładzie próby połączenia miast w Polsce siecią dróg tworzących dendryt (drzewo) z możliwie małą sumą długości dróg. Metoda może być stosowana dla celów klasyfikacji botanicznej, klasyfikacji drzewostanów, w lingwistyce porównawczej, ale tylko odkrycie metody na pierwszym przykładzie dało satysfakcję matematykom, mimo że dla specjalistów każde z zastosowań było w jakimś sensie interesujące. W sytuacji twórczej matematyk może się znaleźć jedynie poprzez całkowite skupienie się na zadaniu, nie tylko na aspekcie matematycznym. Ale lepiej, jeśli pozostawi zastosowanie komu należy, a sam zajmie się doskonaleniem narzędzia matematycznego, którym z kolei specjalista-niematematyk posłuży się z pełnym wyczuciem szczegółu. A może jeszcze lepiej, jeśli specjalista-niematematyk, skoro już narzędzie znajdzie się w jego ręku, sam zacznie je doskonalić dla osiągania znanych sobie celów. Na szczęście tak właśnie jest, a poprzednie wywody to jakby wyważanie otwartych drzwi.

Hugo Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa 1989, wydanie 4, str. 118 i dalsze.

Weźmy przykłady. Nie brak ich na samych szczytach. Są całe gałęzie matematyki, takie jak teoria reprezentacji grup, teoria tensorów, pewne działy topologii różniczkowej, które są bardziej rozwijane obecnie przez fizyków niż przez matematyków. Teoria grup jest w pewnych aspektach lepiej znana

Ujęcie algebraiczne rachunkowi operatorów, jako pewnego rodzaju ułamków, dał Jan Mikusiński: *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

i rozwijana przez chemików niż matematyków, i to samo dotyczy pewnych partii teorii rozmaitości mających znaczenie dla budowy modeli cząsteczek białek. Na szczeblach klasycznych jest już regułą, że pewne działy matematyki, np. teoria sprężystości, hydromechanika, rachunki macierzowe, są opanowane niemal w całości przez niematematyków. Jest już tak, że jeśli dział matematyki dojrzeje do zastosowań, opanowują go inni. Z rzadka udaje się rewanż. Pewne nieumotywowane rachunki Olivera Heaviside'a, fizyka i elektrotechnika, zostały dopiero przez matematyków rozbudowane do spójnej wewnętrznie i dającej pewność uzyskiwanych rezultatów teorii. Przeważnie jednak matematycy spychani są ciągle do swego interioru. To brzmi pesymistycznie dla matematyków. Ale jest to tylko porównanie i – jak wszelkie porównania – jest mało warte. Tak samo dobre jest to, według którego matematycy są stale na przedzie: inni są tam, gdzie oni już byli.

*

Matematyki nie można nauczyć się nagle, dla jakiejś doraźnej potrzeby i nie można jej sobie przyswajać począwszy od jakiegoś w niej miejsca. Trzeba być w niej wychowanym. O innych dyscyplinach nie da się tego powiedzieć z taką ostrością. Nie można przestać zajmować się matematyką, a potem zacząć. Wzrastanie w matematyce wymaga dużej troskliwości. Oczywiście są jednostki silne, ale miejmy na uwadze tych, którym pozostaje jedynie później często spotykany gest obronny, jakim jest przyznawanie się, z rozbrajającą szczerością do tego, że nigdy matematyki nie rozumieli. To nigdy nie jest pełna prawda. Po prostu w pewnym momencie się w matematyce zagubili. Bo obiekty matematyczne nie narzucają się ze swoim istnieniem. Istnieją w naszym umyśle i trzeba pewnego wysiłku, żeby je zakorzenić, i wysiłku by je tam utrzymać. Niezmienność właściwości myślenia matematycznego sprawiła, że pewne zasady kształcenia w matematyce weszły do kanonu: stopniowanie trudności, ćwiczenie sprawności, sprzyjanie tworzeniu się wyobrażeń i poddawanie ich potem rygorowi logiki. Mniej znaną zasadą jest nienarzucanie się z całościową strukturą, która powinna pozostać indywidualna. W liście zasad łatwiej o sformułowania negatywne, bo najczęściej wiemy przede wszystkim o tym, jak nie należy czegoś robić.

Sprzyjamy rozwojowi naturalnych zdolności poprzez ich obserwację. Nie przez eksperyment, który w przypadku nauczania może być okrutny. Eksperyment cieszy się w naukach wielką estymą. Dlaczego? Przecież eksperymentujemy przeważnie wtedy, kiedy nie wiemy jak robi się to, co mamy zrobić.

Eksperymenty ostatnich dziesiątków lat zagnały nauczanie matematyki w pedantyczność i werbalizm. Bo suchość przedmiotu matematyki często zachęca do prób opanowania jej werbalnie. Pedantyczność daje zaś namiastkę rozumienia, wygodne samooszukanie. Inny skutek ostatnich eksperymentów, to zastąpienie umiejętności wiedzą, bo tę da się przyswajać w sposób ilościowy. A przecież rozwiązanie samodzielne zadania czy problemu posuwa nas w matematyce niepomiernie dalej, niż przyswojenie sobie gotowych rozwiązań, nawet jeśli jest ich tak wiele, że mogłyby starczyć na każdą okazję życia.

Bo potem i tak z tego nic się nie przyda, jak mówią później ci, którzy tego spróbowali i znają całą daremność wysiłku. Ci, którzy poszli inną drogą (a nie chodzi tu o późniejszych zawodowych matematyków) nie uskarżają się, że na próżno rozwiązali jakieś zadanie. Oni już wiedzą, ile dziadek ma lat i szukaliby chętnie dalszych emocji. Ale była akurat mowa o matematyce poważnej, a nie np. cały czas o pięciu panach w białych i czarnych kapeluszach, o golibrodzie, który goli wszystkich tych, którzy sami się nie golą, o tym jak podzielić tort na dwie części tak, by każdy z obu dzielących dostał więcej niż połowę. Nici łączące oba te gatunki matematyki wszakże istnieją.