Ruchome wielościany

Jeśli z trzech patyczków zbudujemy trójkąt, to nawet, gdy będą połączone przez ruchome przeguby – wierzchołki trójkąta, trójkąt ten będzie sztywny. Oznacza to, że nie będzie można zmienić jego kształtu bez zmiany długości patyczków.

Jeśli jednak zamiast trzech patyczków weźmiemy cztery i zbudujemy z nich czworokąt z przegubami w wierzchołkach, to czworokąt ten będzie ruchomy. To oczywiste. Podobnie, jak oczywiste jest stwierdzenie, że trójkąt jest jedynym wielokątem, w którym sztywność boków pociąga za sobą sztywność całego wielokąta.

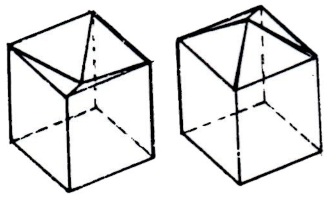
Nie trzeba się też wiele trudzić, by zauważyć, że sztywność krawędzi wielościanu pociąga za sobą sztywność całego wielościanu tylko dla czworościanów.

Naturalnym dalszym problemem jest pytanie, czy sztywność ścian wielościanu (takich płaskich, wielokątnych tabliczek), przy dopuszczeniu zawiasów zamiast krawędzi, pociąga za sobą sztywność całego wielościanu.

Takie pytanie postawił sobie Augustin Cauchy i w 1813 roku udowodnił, że:

dla wielościanów wypukłych sztywność ścian pociąga za sobą sztywność całego wielościanu.

Wielościan wypukły to taki, że dowolna prosta ma z nim wspólny odcinek, punkt, albo go wcale nie przecina.



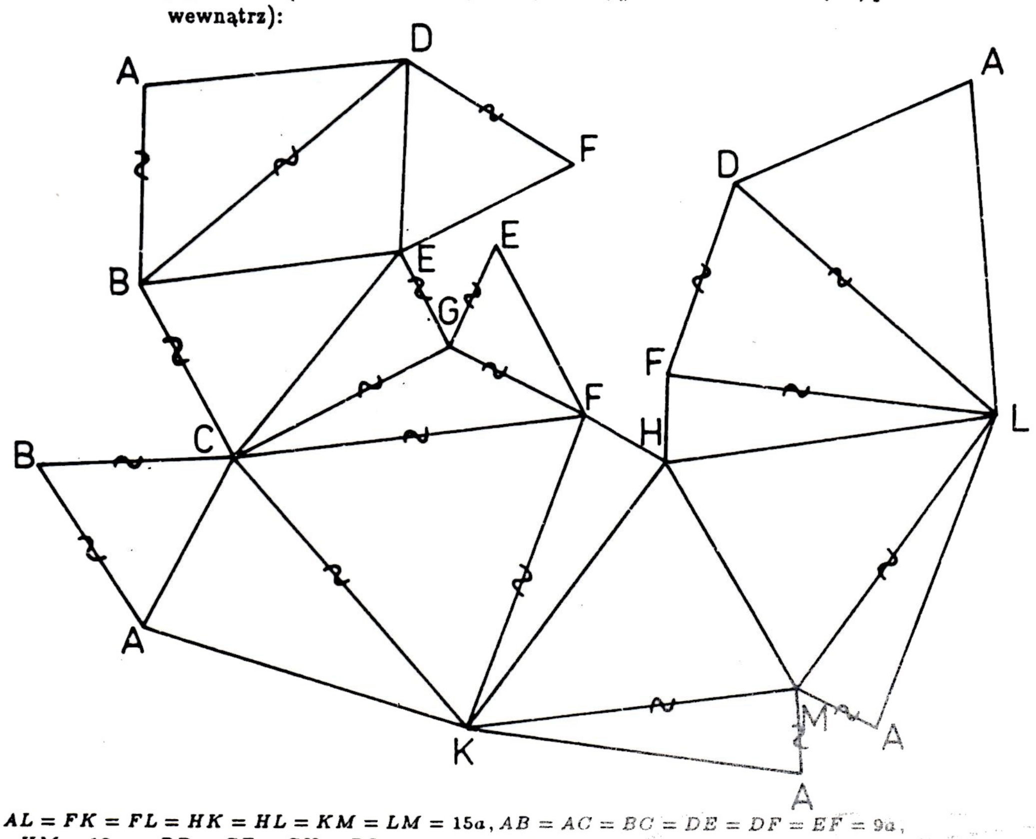
Od razu zrodziło się kolejne pytanie, czy założenie wypukłości jest konieczne. Na odpowiedź trzeba było czekać 165 lat.

Od razu zwróćmy uwagę, że przez zaprzeczenie sztywności rozumiemy tutaj naprawdę ruch. Gdyby chodziło o zbudowanie dwóch różnych wielościanów o takich samych ścianach i zestawionych w tym samym porządku, to nie byłoby z tym kłopotu. Świadczy o tym choćby rysunek obok, gdzie widzimy sześcian z dostawioną i z wyciętą piramidką – ściany mają identyczne i tak samo zestawione. Przejść jednak z jednego ich położenia do drugiego nie można bez złamania sztywności ścian.

Matematyzacja takiego ciągłego ruchu, o jaki tu chodzi, była już za czasów Cauchy'ego wykonana – zrobiono to w ramach rachunku wariacyjnego. Nie brakowało więc narzędzi do badania problemu. Ale wyników nie było.

Pod koniec ubiegłego stulecia problem pozornie rozwiązano – zbudowano mianowicie ruchome wielościany niewypukłe, ale ... o przenikających się ścianach. Rzecz jasna, nikt nie uważał tego rezultatu za odpowiedź na problem Cauchy'ego.

Aż wreszcie, w 1978 roku, Robert Connelly zbudował ruchomy wielościan. Oto jego siatka (zaznaczone falką krawędzie są „ostrzem" na zewnątrz, pozostałe – do wewnątrz):

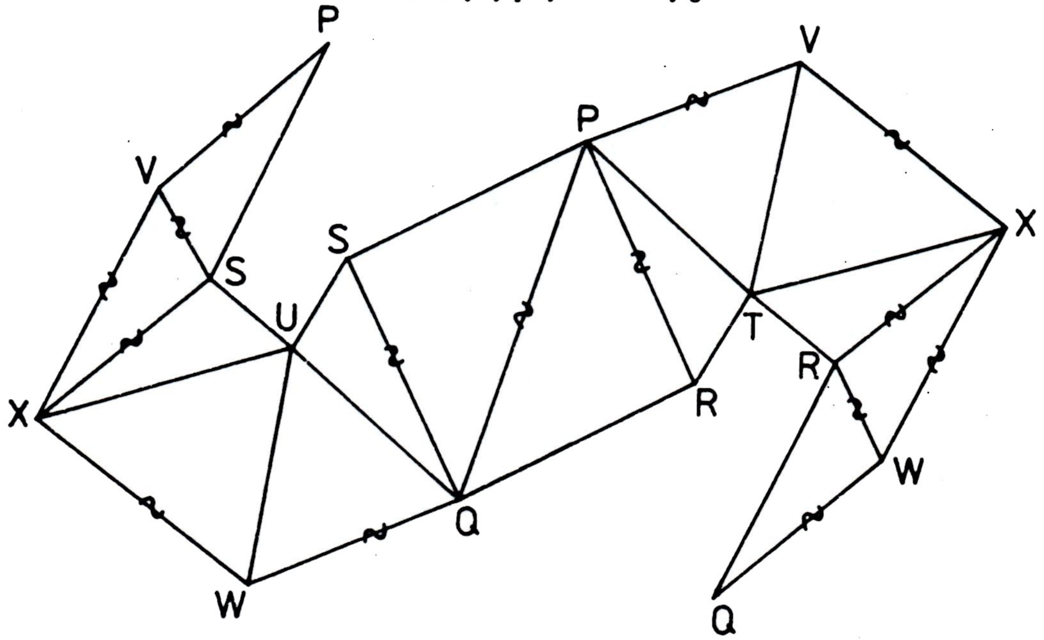


$$AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15a,\ AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9a,$$
$$AD = BE = CE = HM = 12a,\quad BD = CF = CK = DL = 16a,\quad AM = FH = 4a,\quad CG = 11a,\quad EG = 5a,\quad FG = 7a.$$

Każdy może sprawdzić, że faktycznie się rusza – wystarczy wyciąć ściany z grubej tekturki, a krawędzie połączyć np. taśmą klejącą. Można też wykonać tylko model krawędziowy – ponieważ wszystkie jego ściany są trójkątami, to sztywność krawędzi jest równoważna sztywności ścian (patrz początek tego tekstu).

Pierwsze, co się rzuca w oczy, to nieregularność tego wielościanu, duża rozmaitość kształtu ścian. Wiadomo zresztą, skąd się to wzięło. Connelly zaczął od przytoczonego wyniku o istnieniu ruchomego wielościanu o przenikających się ścianach, wyjął jedną ze ścian i zastąpił ją kilkoma innymi tak, by uniknąć przenikania (te nowe ściany zbiegają się w wierzchołku L). Ten sposób rozwiązywania dał właśnie nieregularny kształt i aż osiem różnych długości krawędzi. Wielościan Connellego ma 18 ścian, 11 wierzchołków i 27 krawędzi.

Gdy już było wiadomo, że konstruowanie ruchomych wielościanów może się powieść, Klaus Steffen zbudował ładniejszy przykład. Oto jego siatka:



$PR = QR = PS = QS = TX = UX = VX = WX = 12b$, $PT = QU = PV = QW = RX = SX = 10b$,
$RT = SU = RW = SV = 5b$, $TV = UW = 11b$, $PQ = 17b$.

Teraz jest już tylko 14 ścian (9 wierzchołków, 21 krawędzi) i są one tylko czterech rodzajów. Co więcej, siatka ma środek symetrii (jest nim środek odcinka PQ), a sam wielościan – w jednej z możliwych dla niego sytuacji – oś symetrii.

Sposób uzyskania tego przykładu jest jednak artystyczny – przyszło natchnienie i udało się. Sprawa ogólnego sposobu konstruowania wielościanów ruchomych pozostaje nadal otwarta. Nie wiadomo np. czy przykład Steffena jest najoszczędniejszy, jeśli chodzi o liczbę ścian.

Opr. M. K.