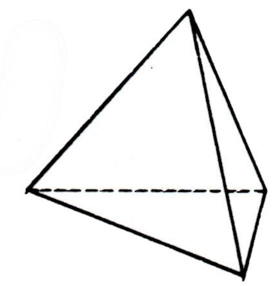
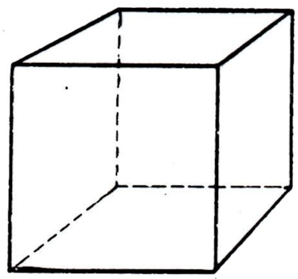
Wielościany regularne, półregularne i równoforemnościenne



Zajmiemy się wielościanami wypukłymi. Wykażemy, że rzeczywiście wielościanów **platońskich** jest pięć (z dokładnością do podobieństwa). Wyliczymy także, ile jest wielościanów **archimedesowych** i **równoforemnościennych**. A wszystko dzięki wzorowi Eulera i odrobinie wyobraźni.

Wielościany platońskie to nazwa wprowadzona przez Pappusa z Aleksandrii w IV wieku (n.e.) dla wielościanów (wypukłych), których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi i w których wierzchołkach zbiega się tyle samo takich wielokątów. Platon przywiązywał do nich znaczenie mistyczne, sądził też, że musi być ich pięć, choć znał ich tylko cztery. Jego uczeń Teaitetos ofiarował mistrzowi piąty taki wielościan i dowód, że więcej ich nie ma.

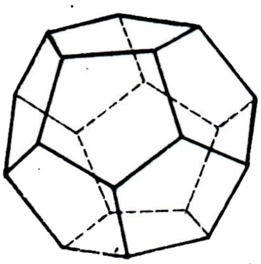


Łatwo powtórzyć dowód Teaitetosa. Kąty n-kąta foremnego są równe $\pi(n-2)/n$. Jeżeli z takich n-kątów można zbudować wielościan, to $3 \cdot \pi(n-2)/n < 2\pi$ (bo w jednym wierzchołku stykają się co najmniej trzy ściany), czyli $n < 6$. Ponieważ także $n > 2$, więc do rozważenia pozostają tylko trójkąty, czworokąty i pięciokąty. Jeśli w wierzchołku spotyka się m wielokątów, to

– dla trójkątów mamy

$$m \cdot \frac{\pi}{3} < 2\pi,$$

czyli m jest równe 3, 4 lub 5,



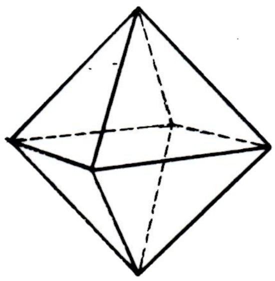
– dla czworokątów i pięciokątów mamy odpowiednio

$$m \cdot \frac{\pi}{2} < 2\pi, \qquad m \cdot \frac{3\pi}{5} < 2\pi,$$

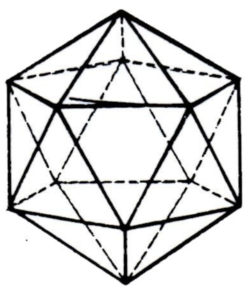
co w obu przypadkach daje $m = 3$.

Wynika stąd, że wielościanów platońskich jest co najwyżej pięć. Skoro jednak pięć umiemy wskazać, to jest ich dokładnie pięć.

Powstaje problem, czy warunek foremności ścian był istotny. Czy, gdybyśmy zainteresowali się wielościanami wypukłymi, których wszystkie ściany są n-kątami, a w każdym wierzchołku zbiega się ich m (n, m ustalone), to czy przypadkiem nie byłoby ich więcej. Aby rozstrzygnąć do końca ten i jemu podobne problemy wprowadzimy ogólniejsze pojęcia.

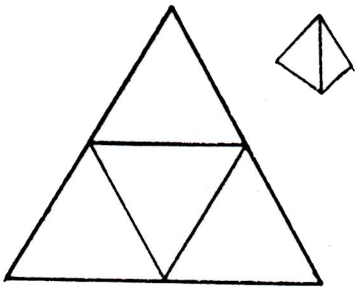


Mówimy, że wielościan ma jednakowe naroża, jeśli obiegając dowolny wierzchołek dookoła mamy taki sam cykl wielokątów, t.j. w każdym wierzchołku po k-kącie występuje l-kąt, po nim m-kąt, po nim n-kąt itd. Wielościany wypukłe o jednakowych narożach nazywamy **półregularnymi**. Jeśli dodatkowo wszystkie ściany mają tyle samo kątów – **regularnymi**. Każdemu wielościanowi półregularnemu odpowiada wielościan półregularny mający tyle samo i tak samo ułożonych ścian będących wielokątami foremnymi, czyli **archimedesowy** (nazwę wielościany archimedesowe również wymyślił Pappus, w tym jednak przypadku nie znamy żadnego powodu, dla którego związał te wielościany akurat z tym starożytnym – również dla niego – uczonym). W szczególności każdemu wielościanowi regularnemu odpowiada wielościan regularny o ścianach foremnych – **platoński**. Jeśli zrezygnujemy z warunku posiadania jednakowych naroży, a będziemy żądali by wszystkie ściany były jednakowymi wielokątami foremnymi, uzyskamy inną klasę wielościanów – **równoforemnościenne**.



Dla wielościanów o w wierzchołkach, k krawędziach i s ścianach spełniony jest wzór Eulera

$$w - k + s = 2.$$



Zacsnijmy od snalesienia róśnych wielościanów regularnych.

Załóśmy, śe mamy do csynienia s wielościanami o ścianach m-kątnych i narośach l ściennych. Poniewaś kaśda krawędś naleśy do dwóch ścian więc

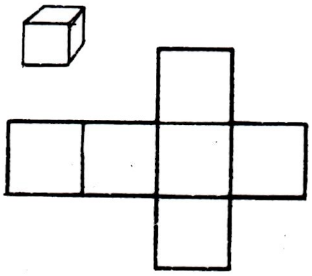
$$m \cdot s = 2k, \quad \text{csyli} \quad s = \frac{2k}{m}.$$

Zarasem w kaśdym wierscholku schodsi się

$$l = \frac{2 \cdot k}{w}$$

krawędsi, skąd wynika, śe

$$w = \frac{2k}{l}.$$



Korsystając teras se wsoru Eulera otrsymujemy

$$\frac{2k}{l} - k + \frac{2k}{m} = 2,$$

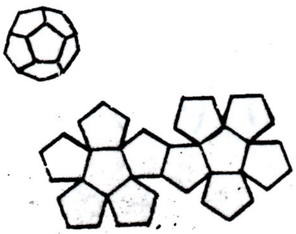
w konsekwencji więc

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

Zauwaśmy, śe poniewaś kaśdy wielościan ma prsynajmniej 6 krawędsi (cstery wierscholki, cstery ściany), więc s ostatniego równania wynika, śe

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Prseanalisujmy teras roswiąsania tej nierówności. Ocsywiście m i l wynossą prsynajmniej 3.



Załóśmy, śe $l = 3$, a wtedy

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{3}, \quad \text{więc} \quad \frac{1}{6} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}.$$

Wynika stąd, śe w narośach trójściennych mogą się stykać trójkąty, csworokąty lub pięciokąty ($3 \leq m < 6$).

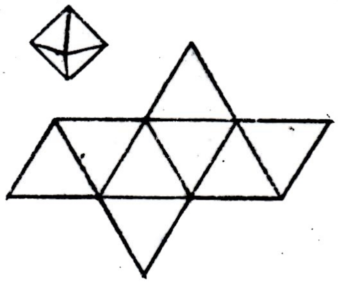
Niech teras $l = 4$. W tym prsypadku

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{3}.$$

Prowadsi to do nierówności

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{m} \leq \frac{5}{12}.$$

Wtedy m musi być równe 3, csyli w narośu csworościennym mogą się stykać tylko trójkąty.



Roswaśmy s kolei $l = 5$. Wtedy

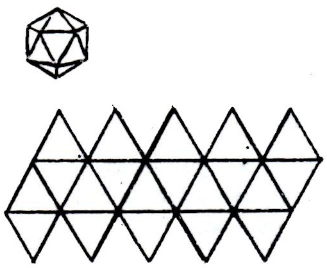
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{3}, \quad \text{skąd} \quad \frac{3}{10} < \frac{1}{m} \leq \frac{7}{15},$$

a więc w narośach pięciościennych wielościany regularnego spotkać się mogą jedynie trójkąty.

Zauwaśmy jesscse, śe dla $l \geq 6$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{l} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

skąd wnioskujemy, śe $m < 3$, co jest niemośliwe.



A oto tabelka, w której sebrane są otrsymane wyniki. Kaśdej posycji odpowiada jeden wielościan platoński o ustalonej długości krawędsi i wiele regularnych. Zatem odrsucenie warunku foremności nie dało śadnych nowych wielościanów.

Nazwa wielościanu	l	m	w	k	s
csworościan	3	3	4	6	4
ssećcian	3	4	8	12	6
dwunastościan	3	5	20	30	12
ośmiościan	4	3	6	12	8
dwudsiestościan	5	3	12	30	20

Zastanowimy się teraz, ile jest wielościanów półregularnych – odrzucimy warunek o jednakowości ścian, a pozostawimy żądanie o takich samych narożach.

Załóżmy, że wielościan ma n rodzajów ścian, a w danym wierzchołku styka się s_i ścian l_i-kątnych. Wtedy w każdym z wierzchołków styka się $\sum_{i=1}^{n} s_i$ ścian i

$$w \cdot \sum_{i=1}^{n} s_i = 2k.$$

Ponieważ każda z s_i ścian ma l_i wierzchołków, więc w całym wielościanie jest ws_i/l_i ścian l_i-kątnych i w konsekwencji

$$s = w \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{l_i}.$$

Korzystając ze wzoru Eulera otrzymujemy

$$w - \frac{w}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} s_i + w \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{l_i} = 2,$$

skąd po przekształceniach

$$(*) \qquad \left(2 - \sum_{i=1}^{n} s_i \left(1 - \frac{2}{l_i}\right)\right) \cdot w = 4.$$

Analiza tego wzoru pozwoli nam ustalić listę wielościanów półregularnych. Ponieważ rozpatrzyliśmy już wielościany regularne, więc przyjmiemy, że $n > 1$. Zauważmy, iż jeśli $n > 3$, to

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \left(1 - \frac{2}{l_i}\right) > \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{2}{6}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{21}{10} > 2,$$

co jest sprzeczne z $(*)$. Będziemy się więc zajmować wielościanami półregularnymi o dwóch lub trzech rodzajach ścian.

Rozpatrzmy najpierw wielościany o dwóch rodzajach ścian. Ze wzoru $(*)$ otrzymujemy

$$\left(2 - (s_1 + s_2) + 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2}\right)\right) \cdot w = 4,$$

a stąd

$$(**) \qquad 2 - (s_1 + s_2) + 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2}\right) > 0.$$

W wierzchołku musi się stykać co najmniej 3, a nie więcej niż 5 ścian, więc $3 \le s_1 + s_2 < 6$. Mamy zatem do analizy trzy przypadki możliwych wartości sumy s_1 i s_2. Rozważmy je po kolei. Przyjmijmy jeszcze, że $s_1 > s_2$.

Załóżmy na początek $s_1 + s_2 = 3$, a więc $s_1 = 2$ i $s_2 = 1$. Wtedy równanie $(**)$ przyjmuje postać

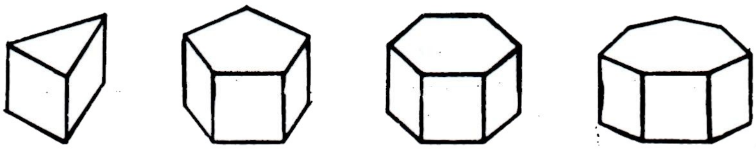
$$\frac{2}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{l_2} > \frac{l_1 - 4}{2l_1}.$$

Ponadto, ponieważ l_i to liczba kątów w wielokącie, więc $l_i > 2$.

Jeśli l_1 jest liczbą nieparzystą, to $s_1 = 2$ powoduje, że $s_2 > 1$ ponieważ w przeciwnym przypadku kolejne boki l_1-kąta musiałyby być wspólne dla na przemian l_1- i l_2-kąta, co jest możliwe tylko, gdy l_1 parzyste.

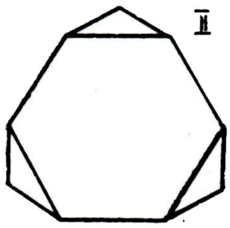
Jeśli $l_1 = 4$, to $1/l_2 > 0$, więc l_2 może być dowolną liczbą naturalną ($l_2 \ge 3$). Otrzymujemy wtedy nieskończoną serię graniastosłupów o podstawach

l_2-kątnych. W przypadku $l_2 = l_1 = 4$ dostajemy bryłę regularną – sześcian.

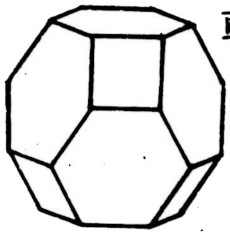


I

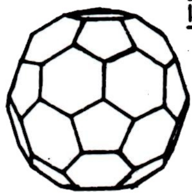
Jeśli $l_1 = 6$, to $\frac{1}{l_2} > \frac{6-4}{12}$, więc $l_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{3, 4, 5\}$.



II

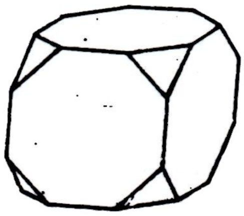


III

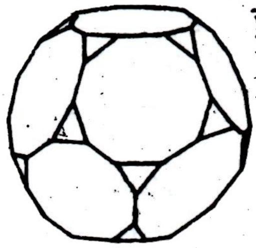


IV

Jeśli $l_1 = 8$, to $\frac{1}{l_2} > \frac{8-4}{16}$, więc $l_2 < 4$, czyli $l_2 = 3$.



V



VI

Jeśli $l_1 = 10$, to $\frac{1}{l_2} > \frac{10-4}{20}$, więc $l_2 < \frac{10}{3}$, czyli ponownie $l_3 = 3$.

Jeśli $l_1 \geq 12$, to $\frac{1}{l_2} > \frac{12-4}{24} = \frac{1}{3}$, czyli $l_1 < 3$, co jest niemożliwe.

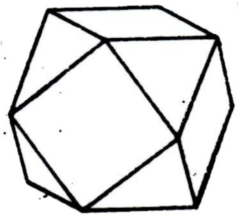
Załóżmy teraz $s_1 + s_2 = 4$. Mamy wtedy $s_1 = s_2 = 2$ lub $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$.

Gdy $s_1 = s_2 = 2$, to z (**)

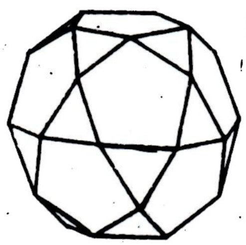
$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad l_2 < \frac{2l_1}{l_1 - 2}.$$

Wtedy mamy następujące możliwości.

Jeśli $l_1 = 3$, to $l_2 < \frac{6}{1}$, czyli $l_2 \in \{4, 5\}$.



VII



VIII

Jeśli $l_1 = 4$ ($l_2 = 5$), to otrzymujemy $l_2 < 4$ ($l_2 < 10/3$), czyli $l_2 = 3$, a więc takie rozwiązanie jak poprzednio.

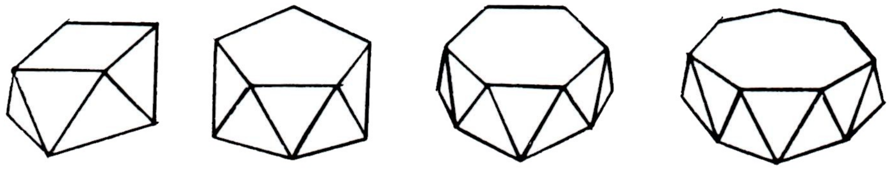
Jeśli $l_1 \geq 6$, to $l_2 < 3$, co jest niemożliwe.

Gdy $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$, to z (**) wynika, że

$$\frac{3}{l_1} + \frac{1}{l_2} > 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{l_2} > \frac{l_1 - 3}{l_1}.$$

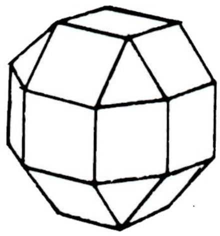
Wtedy mamy następujące roswiązania.

Jeśli $l_1 = 3$, to l_2 może być dowolną licsbą naturalną ($l_2 \geq 3$). Otrsymujemy satem nieskończoną rodsinę antygraniastosłupów o podstawach l_2-kątnych. W przypadku $l_2 = l_1 = 3$ jest to bryła regularna – ośmiościan.

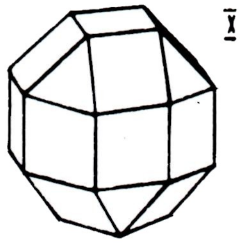


IX

Jeśli $l_1 = 4$, to $1/l_2 > 1/4$, csyli $l_2 = 3$.



X



X

Jeśli $l_1 \geq 5$, to $1/l_2 > 2/5$, a więc $l_2 < 3$, co jest niemożliwe.

Załóżmy teras $s_1 + s_2 = 5$. Mamy wtedy dwa prsypadki: $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$ lub $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$.

Gdy $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$, to s (**) otrsymujemy

$$\frac{3}{l_1} + \frac{2}{l_2} > \frac{3}{2}, \quad \text{csyli} \quad l_2 < \frac{4l_1}{3(l_1 - 2)}.$$

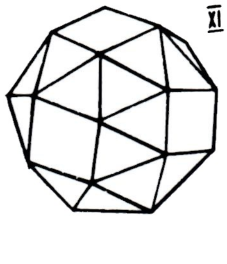
Wtedy, jeśli $l_1 = 3$, to $l_2 < 12/3$, csyli $l_1 = l_2$ i roswiązaniem jest bryła regularna – dwudsiestościan.

Jeśli saś $l_1 \geq 4$, to $l_2 < 8/3$, co jest niemożliwe.

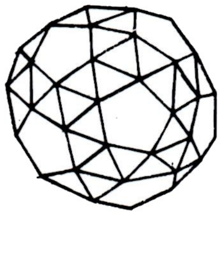
Posostaje prsypadek, gdy $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$. Wtedy s (**) dostajemy

$$\frac{4}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{3}{2}, \quad \text{csyli} \quad l_2 < \frac{2l_1}{3l_1 - 8}.$$

Jeśli $l_1 = 3$, to $l_2 < \frac{6}{9-8}$, csyli $l_2 \in \{4, 5\}$.



XI



XII

Jeśli $l_1 \geq 4$, to $l_2 < \frac{8}{12-8}$, csyli $l_2 < 2$, co jest niemożliwe.

Łatwo sauważyć, że nasse rachunki doprowadsiły jedyne do ustalenia licsby l_1- i l_2-kątów stykających się w jednym wierscholku. Nie mówią one natomiast nic o kolejności w jakiej tę l_1- i l_2-kąty tworsą cykl. Problem ten jest istotny, ocsywiście, tylko gdy licsba ścian stykających się w wierscholku jest większa niż 3. Sprawdsanie metodami geometrycsnymi daje nam jednak dla każdego roswiązania licsbowego tylko jeden możliwy rodsaj cyklu i, co więcej, posa roswiązaniem X tylko jeden możliwy rodsaj wielościanu półregularnego (w ssczególności jeden wielościan archimedesowy o ustalonej długości krawędsi).

A oto tabela zawierająca dane dotyczące wszystkich wielościanów półregularnych o jednakowych narożach. Zostały one już wyżej narysowane z odpowiednim numerem wiersza w tabeli.

	s_1+s_2	s_1	s_2	l_1	l_2	Liczba ścian l_1- i l_2- -kątnych		w	k	s
I	3	2	1	4	$n\neq 4$	n	2	$2n$	$3n$	$n+2$
II	3	2	1	6	3	4	4	12	18	8
III	3	2	1	6	4	8	6	24	36	14
IV	3	2	1	6	5	20	12	60	90	32
V	3	2	1	8	3	6	8	24	36	14
VI	3	2	1	10	3	12	20	60	90	32
VII	4	2	2	3	4	8	6	12	24	14
VIII	4	2	2	3	5	20	12	30	60	32
IX	4	3	1	3	$n\neq 3$	$2n$	2	$2n$	$4n$	$2n+2$
X	4	3	1	4	3	18	8	24	48	26
XI	5	4	1	3	4	32	6	24	60	38
XII	5	4	1	3	5	80	12	60	150	92

Zajmijmy się teraz znalezieniem wielościanów półregularnych o trzech rodzajach ścian. Wzór (*) przyjmuje teraz postać

$$\left(2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right)\right)\quad w=4,$$

a więc musi zachodzić nierówność

$$(***)\qquad 2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right)>0.$$

Tak jak poprzednio $3\leq s_1+s_2+s_3<6$ i mamy do rozpatrzenia trzy przypadki wartości sumy s_i. Przyjmijmy, że $s_1\geq s_2\geq s_3$.

Załóżmy najpierw, że $s_1+s_2+s_3=3$. Wtedy $s_1=s_2=s_3=1$ i wobec (***) mamy

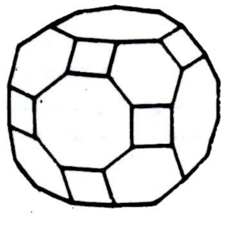
$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>\frac{1}{2}.$$

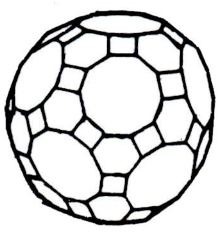
Wszystkie liczby l_i muszą być parzyste ponieważ gdyby jedna z nich, np. l_1 była nieparzysta, to w którymś z wierzchołków l_1-kąta musiałyby się spotkać dwa takie same wielokąty (różne wielokąty powinny stykać się na przemian z kolejnymi bokami l_1-kąta).

Rozważmy $l_1=4$. Wtedy $l_2\geq 6$ ($l_3\geq 6$) oraz

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>\frac{1}{4},\qquad \text{czyli}\quad l_3<\frac{4l_2}{l_2-4}.$$

Jeśli więc $l_2=6$, to $l_3<24/2$, czyli $l_3\in\{8,10\}$.





Jeśli zaś $l_2=8$ ($l_3=10$), to $l_3<32/4$ ($l_3<40/6$), czyli $l_3=6$, skąd otrzymujemy takie rozwiązania jak poprzednio.

Dla $l_2\geq 12$ mamy $l_3<6$, co jest niemożliwe.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $l_i\geq 6$ dla $i=1,2,3$. Wtedy suma odwrotności l_i nie przekroczy 1/2 wbrew temu, co wynika z (***).

Załóżmy teras, że $s_1 + s_2 + s_3 = 4$. Wtedy $s_1 = 2$ i $s_2 = s_3 = 1$ i wobec (***) dostajemy

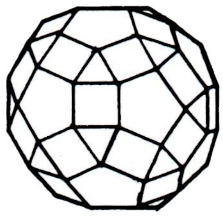
$$\frac{2}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} > 1.$$

Jeśli l_1 jest nieparsysta, to l_1-kąt styka się (tsn. ma wspólny wierscholek lub krawędź) s parsystą licsbą wielokątów. Wśród nich l_1 to l_1-kąty. Licsba l_2- i l_3-kątów stykających się s danym l_1-kątem jest więc nieparsysta, a więc licsba któregoś rodsaju wielokatów musi być parsysta. A wtedy w którymś s wierscholków l_1-kąt nie setknie się wcale albo będsie się stykał s co najmniej dwoma takimi wielokątami. Ponieważ jest to sprsecsne s nassymi sałożeniami, więc l_1 musi być parsysta.

Roswaźmy najpierw $l_1 = 4$. Wtedy

$$\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} > \frac{1}{2}, \quad \text{csyli} \quad l_3 < \frac{2l_2}{l_2 - 2}.$$

Jeśli $l_2 = 3$, to $l_3 < 6/1$ skąd $l_3 = 5$ ponieważ l_1, l_2 i l_3 są różne.



Jeśli $l_2 = 5$ to $l_3 < 10/3$, csyli $l_3 = 3$ i mamy powtórsenie poprsedniego roswiąsania.

Jeśli $l_2 \geq 6$, to $l_3 < 12/4$, csyli $l_3 < 3$, co jest niemożliwe.

Roswaźmy teras $l_1 \geq 6$. Wtedy

$$\frac{2}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} < \frac{2}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} < 1$$

wbrew wcseśniejssym konklusjom.

Wresscie sałóżmy, że $s_1 + s_2 + s_3 = 5$. Wtedy wobec (***)

$$\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} + \frac{s_3}{l_3} > \frac{3}{2},$$

a więc także

$$\frac{s_1}{3} + \frac{5 - s_1}{4} > \frac{3}{2},$$

skąd $s_1 > 3$, co jest niemożliwe wobec $s_1 + s_2 > 2$.

I tak możemy sporsądsić już listę wielościanów półregularnych o trsech rodsajach ścian. Podobnie jak poprsednio każdemu roswiąsaniu licsbowemu odpowiada jeden rodsaj wielościanu półregularnego (w sscsególności jeden wielościan archimedesowy o ustalonej długości krawędsi).

$s_1+s_2+s_3$	s_1	s_2	s_3	l_1	l_2	l_3	Licsba ścian l_1- l_2- i l_3- -kątnych			w	k	s
3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	72	26
3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	72	26
4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	120	62

Zajmimy się teraz **wielościanami równoforemnościennymi.** Przypomnijmy, że wszystkie ściany takiego wielościanu są takimi samymi wielokątami foremnymi. Wiemy już ile jest takich o jednakowych narożach – są to zbudowane z trójkątów: czworościan, ośmiościan i dwudziestościan, z kwadratów sześcian i z pięciokątów dwudziestościan. Odrzucamy założenie o jednakowych narożach. Ponieważ w jednym narożu mogą się spotkać tylko 3 kwadraty lub 3 pięciokąty foremne, więc nowe wielościany równoforemnościenne mogą mieć jedynie ściany trójkątne. W jednym narożu może się stykać 3, 4 lub 5 trójkątów. Oznaczmy przez w_j liczbę wierzchołków, w których zbiega się j ścian. Wtedy

$$w = w_3 + w_4 + w_5\,.$$

Korzystając ze wzoru Eulera i pamiętając, że ściany są trójkątami ($2k = 3s$) oraz zliczając krawędzie stykające się w jednym narożu ($2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5$) dostajemy

$$6(w_3 + w_4 + w_5) - 3(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) + 2(w_3 + 4w_4 + 5w_5) = 12\,,$$

co jest równoważne równaniu

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12\,,$$

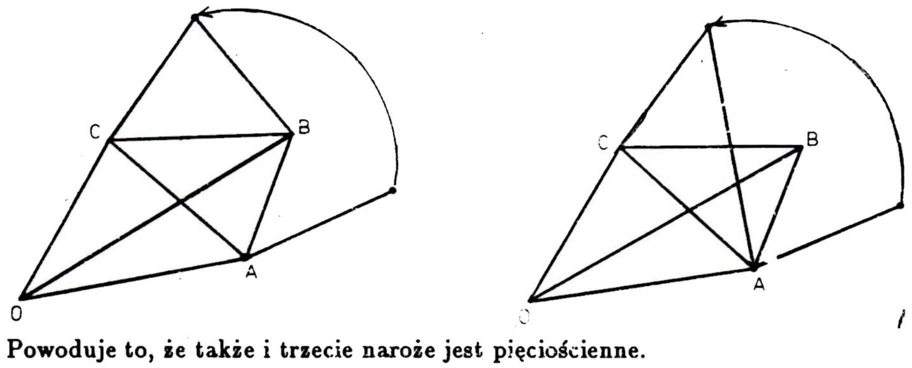
które ma 19 rozwiązań będących liczbami całkowitymi nieujemnymi:

(4,0,0), (3,1,1), (3,0,3), **(2,3,0)**, (2,2,2), (2,1,4), (2,0,6), (1,4,1), (1,3,3), (1,2,5) (1,1,7), (1,0,9), **(0,6,0)**, **(0,5,2)**, **(0,4,4)**, **(0,3,6)**, **(0,2,8)**, (0,1,10), **(0,0,12)**.

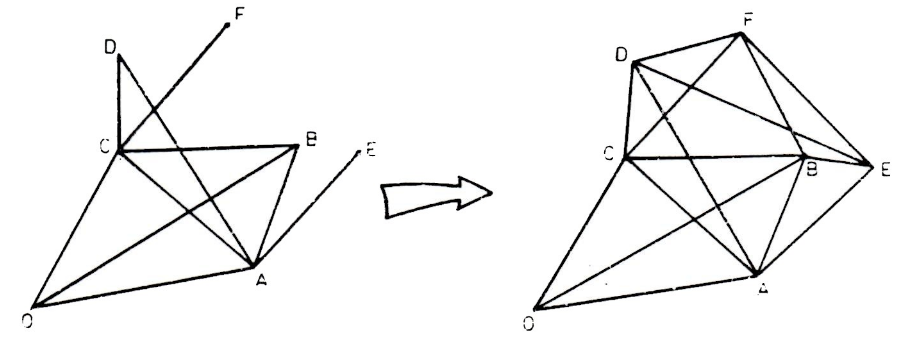
Okazuje się, że zaledwie ośmiu z tych rozwiązań (wyróżnionym grubą czcionką) odpowiadają wielościany równoforemnościenne.

Na początku wykażemy, że jeśli wielościan równoforemnościenny ma co najmniej jedno naroże trójścienne, to jest czworościanem lub sześciościanem (złączeniem dwóch czworościanów jedną wspólną ścianą).

Rozpatrzmy jedno z jego naroży trójściennych $OABC$. Załóżmy, że wielościan $OABC$ nie jest czworościanem ani częścią sześciościanu. Wtedy co najmniej dwa z naroży A, B, C muszą być pięciościenne.



Powoduje to, że także i trzecie naroże jest pięciościenne.

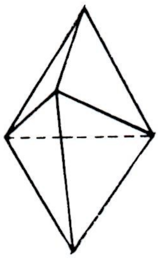


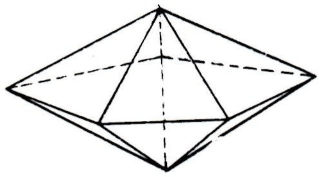
Wtedy wielościan $ABCDEF$ jest ośmiościanem, więc nie mieści się we wnętrzu naroża $OABC$. Wynikałoby stąd, że wielościan $OABCDEF$ nie jest wypukły.

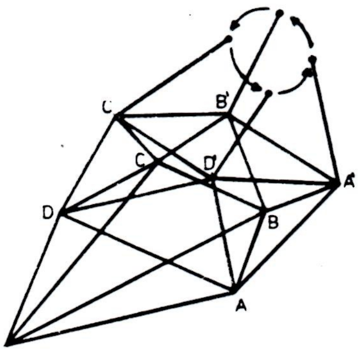
Wyeliminowaliśmy w ten sposób 10 rozwiązań (wśród tych, dla których $w_3 \geq 1$ dobre są tylko dwa (4,0,0) i (2,3,0)).

Wykażemy teraz, że złe jest rozwiązanie (0,1,10).

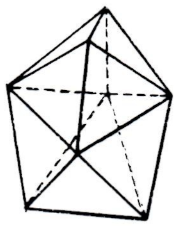
Zastanówmy się nad wielościanem równoforemnościennym o jednym narożu czterościennym. W każdym z wierzchołków A, B, C, D musi więc zbiegać się po co najmniej 5 ścian.





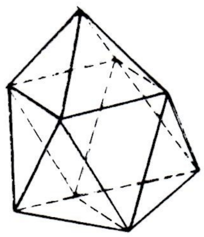


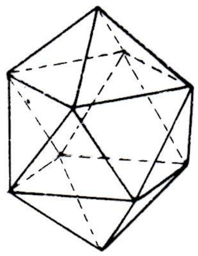
Musi więc wtedy istnieć drugi wierzchołek (o'), w którym stykają się 4 ściany, co jest sprzeczne z założeniem, że rozważany wielościan ma dokładnie jedno naroże czterościenne.



A oto tabelka przedstawiająca dane dotyczące wielościanów równoforemnościennych o ścianach trójkątnych.

w_3	w_4	w_5	w	k	s
4	0	0	4	6	4
2	3	0	5	9	6
0	6	0	6	12	8
0	5	2	7	15	10
0	4	4	8	18	12
0	3	6	9	21	14
0	2	8	10	24	16
0	0	12	12	30	20





W istocie cały ten tekst został oparty o wykorzystanie wzoru Eulera. Można jednak zauważyć, że kilka razy musieliśmy się odwołać do zupełnie innych środków (np. przy stwierdzeniu, że rozwiązaniom liczbowym – z jednym wyjątkiem – odpowiada tylko jedna realizacja oraz przy eliminacji „złych" rozwiązań przy poszukiwaniu wielościanów równoforemnościennych). Każdy musi więc sam ocenić na ile wzór Eulera jest silnym narzędziem przy badaniu wielościanów.

Opracowała Anna RUDNIK