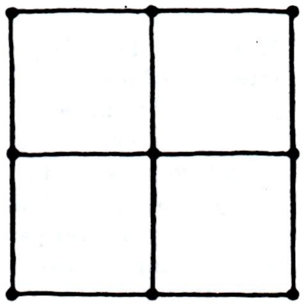
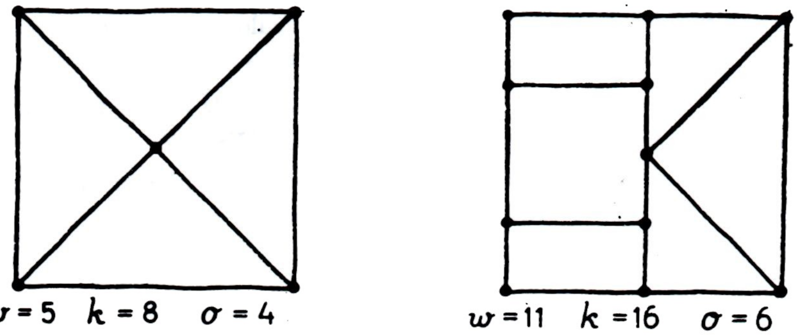
# Wzór Eulera

*Zbigniew MARCINIAK, Warszawa*

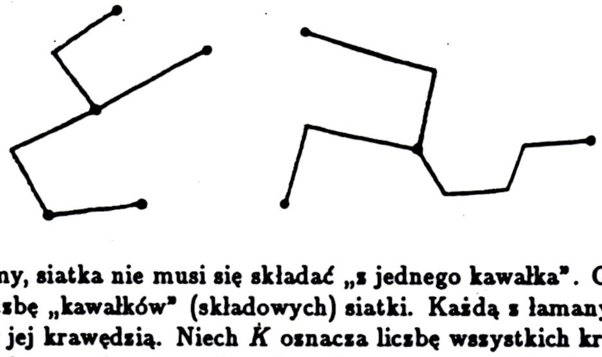
Wyobraźmy sobie świeżo wyprasowaną chusteczkę do nosa. Ślady linii złożeń tworzą regularną siatkę, dzielącą powierzchnię chusteczki na kilka obszarów.



Brseg materiału także będsiemy uważać sa fragment nassej siatki; dsięki temu możemy sgrabnie opisać brseg każdego obssaru: jest to po prostu suma pewnej licsby krawędsi siatki. Punkty, w których różne krawędsie spotykają się naswiemy jej wierscholkami. Na nassej chusteczce widsimy 4 obssary, 12 krawędsi oras 9 wierscholków. Zapissemy to krótko: $O = 4$, $K = 12$, $W = 9$. Spośród wielu możliwych swiąsków międsy licsbami $O, K, W$ jeden jest ssczególnie interesujący: $W - K + O = 1$. Okasuje się bowiem, że sachodsi on dla w dowolny sposób saprasowanej chusteczki!




Dlacsego tak jest? Zanim podamy dowód, sprecysujemy wprowadsone wyżej pojęcia. Po pierwsse, siatką na płasscsyźnie naswiemy dowolną skończoną rodsinę łamanych swycsajnych, niesamkniętych, które mogą się prsecinać jedynie w swoich punktach krańcowych. Oto prsykład siatki:



Jak widsimy, siatka nie musi się składać „s jednego kawałka". Osnacsymy literą $S$ licsbę „kawałków" (składowych) siatki. Każdą s łamanych siatki nasywamy jej krawędsią. Niech $K$ osnacsa licsbę wssystkich krawędsi. Końce wssystkich łamanych występujących w siatce tworzą sbiór wierscholków siatki. Ich licsbę osnacsamy literą $W$. Dalej, jeśli s płasscsysny wyjmiemy siatkę, to otrsymamy jeden obssar nieogranicsony oras skończenie wiele obssarów ogranicsonych (dwa punkty leżą w tym samym obssarse, jeśli można je połącsyć łamaną, która nie prsecina siatki). $O$ jest właśnie licsbą obssarów ogranicsonych.

**Twierdzenie (Wzór Eulera):** *Dla dowolnej siatki na płaszczyźnie zachodzi wzór:*

$$W - K + O = S.$$

**Dowód:** Zauważmy, że dla sieci pustej wzór jest prawdziwy: mamy wtedy $W = K = O = S = 0$. Wykażemy teraz że można niszczyć (modyfikować) dowolną sieć, usuwając z niej po jednej krawędzi, w taki sposób, by wyrażenie $W - K + O - S$ nie zmieniało swej wartości.

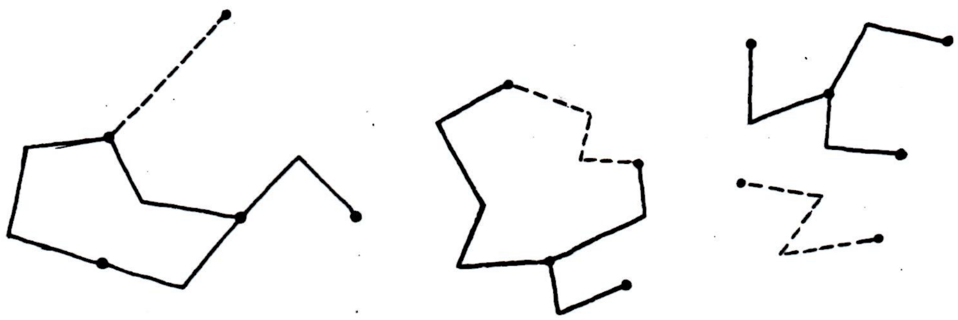
Opiszemy teraz trzy operacje usuwania krawędzi. Niech $W, K, O, S$ oznaczają odpowiednie wielkości przed, a $W', K', O', S'$ – po wykonaniu operacji.

1) Usuwamy krawędź z wolnym końcem. Wtedy $K' = K - 1$, $W' = W - 1$, $O' = O$, $S' = S$, a zatem $W' - K' + O' - S' = W - K + O - S$.

2) Usuwamy krawędź, która jest częścią granicy między dwoma obszarami. Wtedy obszary te łączą się, więc $O' = O - 1$. Ponadto $K' = K - 1$, $W' = W$ i $S' = S$. Zatem $W' - K' + O' - S' = W - K + O - S$.

3) Usuwamy krawędź z dwoma wolnymi końcami. Wtedy $O' = O$, $K' = K - 1$, $S' = S - 1$ i $W' = W - 2$. Mimo to $W' - K' + O' - S' = W - K + O - S$.

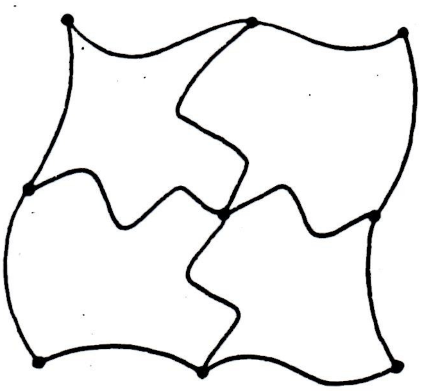
Postępujemy teraz tak. Bierzemy dowolną sieć. Wykonując operacje 1) i 3) usuwamy wszystkie krawędzie z wolnymi końcami. Jeśli zostały jeszcze jakieś krawędzie, to tworzą one łamane zamknięte, ograniczające pewną liczbę obszarów. Stosujemy teraz operację 2), która doprowadza znów do pojawienia się wolnych końców. Kontynuując ten proces, ciągle zmniejszamy liczbę krawędzi, nie zmieniając przy tym $W - K + O - S$. Zatem w końcu otrzymamy sieć pustą, skąd $W - K + O - S = 0$. ■



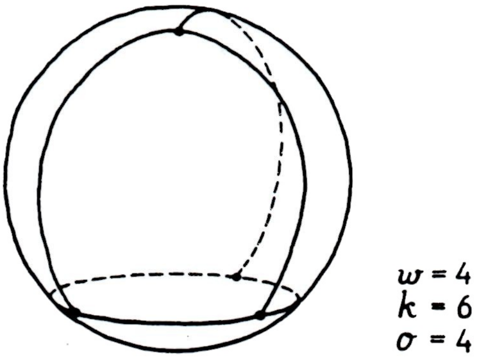
(1) (2) (3)

Ponieważ siatki na naszych chusteczkach były spójne („z jednego kawałka", tj. $S = 1$), to zawsze otrzymywaliśmy $W - K + O = 1$.

Przyjrzyjmy się jeszcze przez chwilkę dowodowi twierdzenia Eulera. Zauważmy, że nic się nie zmieni, gdy siatkę zbudujemy nie z łamanych ale z łuków krzywych zwyczajnych, niezamkniętych. Istotna była jedynie konfiguracja tych linii na płaszczyźnie.



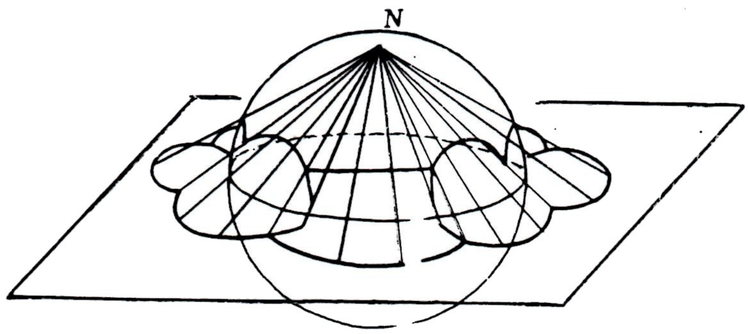
A co otrzymamy ze wzoru $W - K + O$, gdy naszą siatkę umieścimy nie na płaszczyźnie, ale na jakiejś innej powierzchni, np. na sferze?




Eksperymenty podpowiadają, że siatki spójne dają liczbę 2. W istocie jest to prosty wniosek z twierdzenia Eulera.

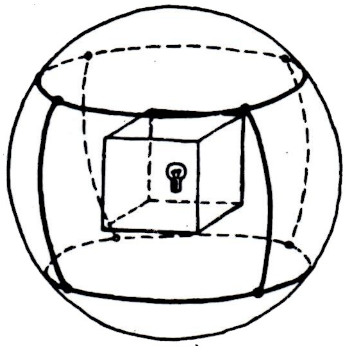
**Wniosek:** *Dla dowolnej spójnej siatki na sferze mamy* $W - K + O = 2$.

**Dowód:** Wytnijmy ze sfery na chwilkę jeden z obszarów. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że usunęliśmy okolicę bieguna północnego $N$. Rzutujemy teraz to, co zostało ze sfery, z punktu $N$ na płaszczyznę równika.




Powstanie w ten sposób spójna siatka na płaszczyźnie. Jej wierzchołkami, krawędziami i obszarami są rzuty ich odpowiedników na sferze. Wobec tego mamy na płaszczyźnie $W$ wierzchołków, $K$ krawędzi oraz $O - 1$ obszarów (nie mamy odpowiednika otoczenia bieguna $N$). Ale $W - K + (O - 1)$ można obliczyć na płaszczyźnie ze wzoru Eulera – wychodzi 1. Wobec tego $W - K + O = 2$. ■

Istnieją proste sposoby na wyprodukowanie mnóstwa spójnych siatek na sferze. Można np. umieścić wewnątrz sfery dowolny wielościan wypukły, wykonany z przezroczystego materiału. Jeśli we wnętrzu tego wielościanu zapalimy żarówkę, cienie jego krawędzi utworzą na sferze siatkę spójną.



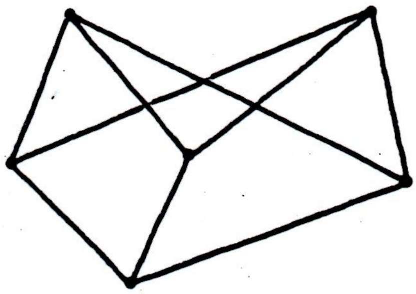
Oczywiście $W$ = liczba wierzchołków wielościanu, $K$ = liczba jego krawędzi i $Ś$ = liczba ścian. Otrzymujemy więc kolejny

**Wniosek:** *Dla dowolnego wielościanu wypukłego mamy $W - K + Ś = 2$, gdzie $W, K, Ś$ oznaczają odpowiednio liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian.*

Powyższa informacja wystarcza do tego, aby wyznaczyć wszystkie możliwe układy liczb $(W, K, Ś)$ dla wielościanów foremnych.

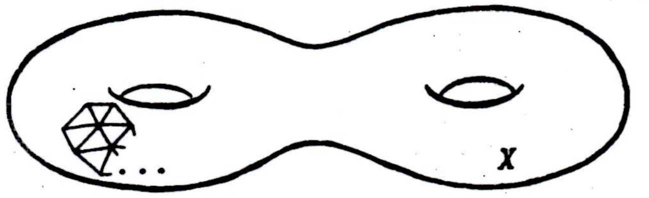
Wzór Eulera ma wiele innych, interesujących zastosowań. Wynika z niego nietrudno twierdzenie o 5 barwach: każdą mapę na globusie można pomalować 5 kolorami tak, by żadne dwa kraje sąsiednie nie były pomalowane tym samym kolorem.

Innym znanym zastosowaniem są dowody niezanurzalności pewnych grafów w płaszczyznę, lub równoważnie – w sferę. Na przykład, łatwo jest udowodnić, że graf



nie może być narysowany (bez samoprzecięć) na sferze. Istotnie, gdyby taki rysunek był możliwy, to dawałby on siatkę z $W = 6$ i $K = 9$. Ze wzoru Eulera wyliczamy $O$: $6 - 9 + O = 2$, tj. $O = 5$. Ponieważ każdy z obszarów musi tu być conajmniej czworokątem, więc sumując liczby krawędzi brzegowych po wszystkich obszarach dostajemy $18 = 2K \geq 4O = 20$ – sprzeczność. Dowód ten stanowi rozwiązanie popularnej łamigłówki: czy można połączyć domy trzech zwaśnionych gospodarzy z trzema studniami nieprzecinającymi się ścieżkami?

Podsumujmy: liczba $W - K + O$ dla spójnych siatek na płaszczyźnie daje zawsze 1, na sferze – zawsze 2. W istocie, liczba $W - K + O$ nie zależy od wyboru siatki dla dowolnej powierzchni, posiadającej skończoną triangulację (czyli „rozbicie na trójkąciki, które nie zachodzą na siebie").




$\chi(X) = -2$

Tę wspólną wartość nazywamy charakterystyką Eulera powierzchni $X$ i oznaczamy ją $\chi(X)$. Liczba ta jest ważnym niezmiennikiem topologicznym powierzchni. Istnieją odpowiedniki $\chi(X)$ dla przestrzeni wyższego wymiaru, a nawet dla takich, które nie posiadają triangulacji – ale to już jest zupełnie inna historia.