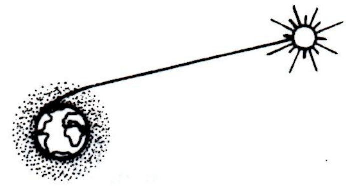
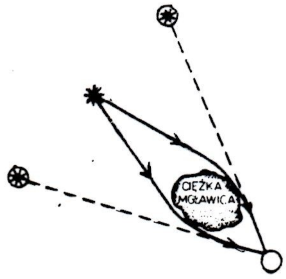
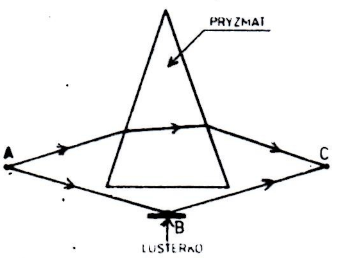
Nierówność trójkąta



Niejednorodność atmosfery powoduje, że widzimy Słońce jeszcze po jego „geometrycznym" zachodzie.

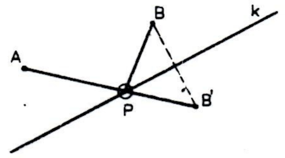


Astronomowie dysponują zdjęciami, na których jeden kwazar widoczny jest w dwóch (a nawet trzech) miejscach. Jest to wynik zaginania się promieni świetlnych w pobliżu dużych mas.

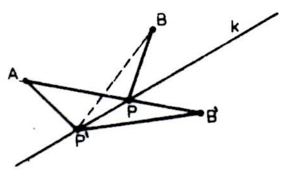


$AB + BC < AC$

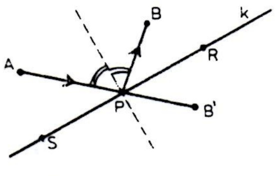
Nawet na zwykłym stole można się przekonać, że światło w przypadku niejednorodności nie spełnia nierówności trójkąta.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

(temat opracowany dla trzyletnich zawodowych studiów nauczycielskich według pracy magisterskiej Tomasza KRAJEWSKIEGO)

czas realizacji – 8 godzin lekcyjnych plus godzinna klasówka.

1. Zwykła odległość punktów, kojarzona na ogół z wędrowaniem najkrótszą drogą, spełnia takie warunki:

1° jest 0 wyłącznie, gdy nigdzie nie wędrujemy – formalnie

$$AB = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad A = B;$$

2° tak samo daleko jest tam, jak z powrotem – formalnie

$$AB = BA;$$

3° jeśli po drodze gdzieś wstąpimy, to na pewno nie skrócimy drogi – formalnie

$$AB + BC \geq AC.$$

Warunek trzeci nazywany jest *nierównością trójkąta.*

2. W praktyce długość drogi określa się przez czas potrzebny do jej przebycia. Taka długość nie ma już na ogół podanych wyżej własności – np. droga pod górę trwa często dłużej, niż w dół. Najnowocześniejszy obecnie sposób mierzenia odległości (miernik laserowy) wykorzystuje *zasadę Fermata:*

promień światła biegnie taką drogą, której przebycie zabiera mu najmniej czasu.

Ale zasada ta daje wyniki zgodne ze zwykłą geometryczną odległością tylko wtedy, gdy przestrzeń, w której biegnie światło, jest jednorodna. Takie zresztą założenie przyjmuje się w wykładach optyki geometrycznej. I my też przyjmiemy takie założenie aby móc korzystać z zasady Fermata.

Zasada Fermata jest szczególnym przypadkiem *zasady minimum* głoszącej, że

zjawiska fizyczne przebiegają w ten sposób, by użytkowana energia była minimalna.

Pozwala nam to, zakładając jednorodność warunków fizycznych, wykorzystywać np. mechaniczne modele dla geometrycznych sytuacji.

Pamiętajmy jednak, że geometryczna odległość, tak jak cała geometria, cała matematyka i wreszcie cała nauka, jest idealizacją sytuacji realnych.

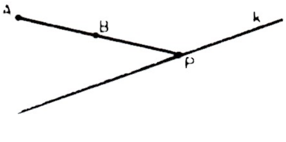
Zadanie 1. *Adaś chce zaświecić latarką w oczy Basi, ale dla niepoznaki nie wprost, lecz wykorzystując odbicie w lustrze. W który punkt lustra powinien zaświecić?*
(Można to zmatematyzować: *dana jest prosta k i dwa punkty A i B leżące po jej jednej stronie; znaleźć taki punkt P na k, by $AP + PB$ miało wartość minimalną* – jest to zastosowanie zasady Fermata.)

Rozwiązanie. Adaś powinien świecić tam, gdzie w lustrze widzi Basię. A gdzie ją widzi? – tam, gdzie i Basia siebie widzi, co już łatwo znaleźć (rys. 1).

Dowód poprawności. Dla dowolnego P' na prostej k jest $BP' = B'P'$ (rys. 2). Dla każdego P' mamy więc

$$AP' + P'B = AP' + P'B' \geq AB' = AP + PB' = AP + PB.$$

Wniosek: *Kąt odbicia równa się kątowi padania.*
Istotnie: $\angle APS = \angle B'PR = \angle BPR$ (pierwsza równość ma miejsce, bo kąty są wierzchołkowe, druga – bo symetryczne). Kąty padania i odbicia dopełniają te kąty do kątów prostych (rys. 3).
Równość tych kątów ma miejsce dla światła, piłki i innych zjawisk spełniających zasadę minimum.



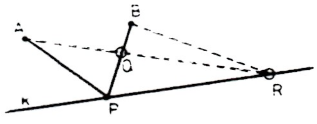
Rys. 4

Zadanie 2. *Znaleźć na prostej k taki punkt P, by różnica $|AP - BP|$ była największa.*

Rozwiązanie. Najpierw uzyskajmy inną postać nierówności trójkąta. Wiemy, że $AB + BC \geq AC$ i $BA + AC \geq BC$, skąd

$$AB = BA \geq |AC - BC|.$$

Rozpatrzmy najpierw sytuację, gdy punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej k (rys. 4).



Rys. 5

W przypadku, gdy prosta AB przecina prostą k, punkt przecięcia jest szukanym punktem P, gdyż dla dowolnego P'

$$|AP' - BP'| \leq AB = |AP - BP|.$$

W przeciwnym przypadku punkt taki nie istnieje, co oznacza, że wartość $|AP - BP|$ może być dowolnie wielka. Przypuśćmy bowiem, że pewien punkt P ma żądaną w zadaniu własność (rys. 5). Załóżmy też, dla zwrócenia uwagi, że $|AP - BP| = AP - BP$. Przez dowolnie obrany na odcinku BP punkt Q prowadzimy z punktu A prostą przecinającą k w punkcie R. W tej sytuacji

$$AQ + QP > AP \quad \text{i} \quad BQ + QR > BR,$$

co daje

$$AR + BP > AP + BR,$$

czyli

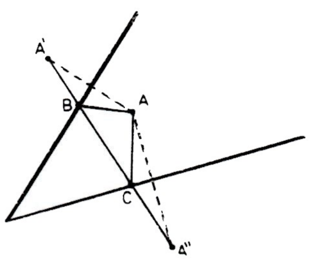
$$AR - BR > AP - BP$$

wbrew założonej własności P.

Do niektórych problemów wraca się w dalszej części zajęć. Będziemy sygnalizowali to odesłaniem do dołączonej na końcu części Powroty. Tu odsyłamy do Powroty 1.

W sytuacji, gdy A i B leżą po przeciwnych stronach k, szukamy rozwiązania dla A i B', gdzie B' to obraz symetryczny B względem k (co łatwo uzasadnić przez analogię do zadania 1).

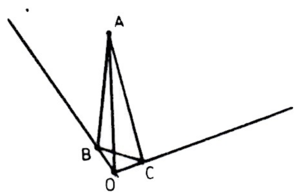
Zadanie 3. *Dany jest kąt ostry i punkt A w jego wnętrzu. Znaleźć takie punkty B i C, po jednym na każdym ramieniu kąta, by trójkąt ABC miał najmniejszy obwód.*



Rys. 6

Rozwiązanie. Odbijamy symetrycznie A względem ramion kąta otrzymując punkty A' i A'' (rys. 6). Odcinek $A'A''$ przecina ramiona kąta w poszukiwanych punktach (dowód poprawności analogiczny jak w zadaniu 1).

Problem. *Jak uzasadnić, że gdy kąt nie jest ostry zadanie nie ma rozwiązania?* Tu brak rozwiązania bierze się z innej przyczyny, niż w jednym z przypadków zadania 2 – obwód jest ograniczony z dołu liczbą $2 \cdot AO$, gdzie O jest wierzchołkiem kąta. Ponieważ jednak AOO nie jest trójkątem, to wystarczy wykazać, że obwód trójkąta ABC może się dowolnie zbliżać do liczby $2 \cdot AO$. Dla znalezienia trójkąta ABC o obwodzie różniącym się od $2 \cdot AO$ mniej niż o (dowolnie ustaloną małą) liczbę ε wystarczy odłożyć na ramionach kąta od jego wierzchołka odcinki o długości $\frac{\varepsilon}{4}$ (rys. 7). Wówczas



Rys. 7

$$AB < AO + \frac{\varepsilon}{4}, \quad AC < AO + \frac{\varepsilon}{4}, \quad BC < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4},$$

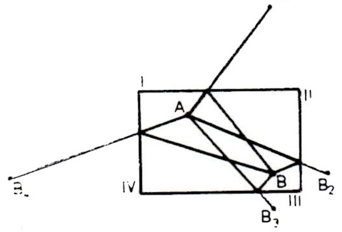
co po zsumowaniu daje żądaną nierówność.

Zadanie 4. (a właściwie cała seria)

Rozważać będziemy prostokątny bilard i ruch po nim niepodkręcanych bil.

a) *Znaleźć taki kierunek uderzenia bili A, by po jednym odbiciu trafiła (centralnie) w bilę B.*

Rozwiązanie a). Posługując się zadaniem 1 z łatwością znajdujemy cztery rozwiązania (rys. 8).

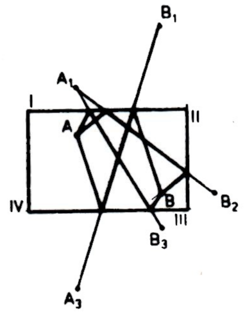


Rys. 8

Uwaga: Otrzymujemy cztery minialne drogi z A przez bandę do B. Są one minimalne, ale mogą być różne. Tu jest miejsce do objaśnienia różnicy między terminami *wartość najmniejsza* i *wartość minimalna* (czyli lokalnie najmniejsza).

b) *Znaleźć taki kierunek uderzenia bili A, by po dwóch odbiciach trafiła w bilę B. Ile jest takich kierunków?*

Roswiązanie b). Analogicsnie jak w sadaniu 3 snajdujemy kolejne minimalne drogi. Na rysunku 9 przedstawione są roswiązania odpowiadające odbiciom w ścianach I II, I III, III I.



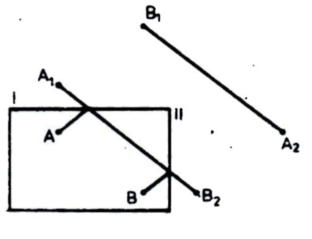
Rys. 9

Uwaga: Ze względu na samazywanie się rysunku słuchacse po snalesieniu trsech–csterech minimów próbują ustalić ich licsbę. Po dyskusji pojawia się tu na ogół licsba 12 – licsba wssystkich uporsądkowanych par ścian. Wynik ten jest błędny, a wyjaśnienie pomyłki bardso poucsające.

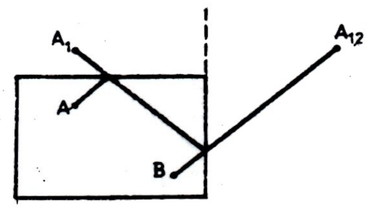
Spostrseżenie. *Jeśli daje się zrealizować odbicie w ścianach I II, to nie daje się zrealizować odbicia w ścianach II I i podobnie dla każdej pary sąsiednich ścian. Co więcej, jeśli nie daje się zrealizować odbicia w ścianach I II, to daje się zrealizować odbicie w ścianach II I.*

Istotnie, odcinki A_1B_2 i A_2B_1 są środkowo symetrycsne wsględem rogu I II (rys. 10). Jeżeli bowiem chcemy przejść od A_1 do A_2, to odbijamy A_1 w I otrsymując A i następnie A w II (podobnie s B_2 otrsymujemy B_1). A ponieważ złożenie symetrii o osiach prostopadłych jest symetrią wsględem punktu ich prsecięcia, więc A_1B_2 i A_2B_1 rsecsywiście są symetrycsne wsględem rogu. Jeśli więc jeden s tych odcinków prsecina (nie prsecina) bandy, to drugi nie prsecina (prsecina).

To spostrseżenie poswala skorygować licsbę roswiązań sadania b) – jest ich osiem: po dwa dla każdej pary ścian prseciwległych i po jednym dla każdej pary sąsiednich.



Rys. 10

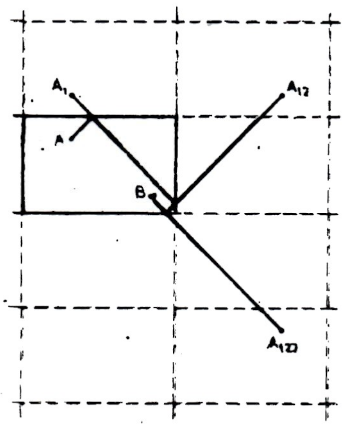


Rys. 11

c) *Znaleźć taki kierunek uderzenia bili A, by po trzech odbiciach (np. w ścianach I II III) trafiła w bilę B.*

Roswiązanie c). Od rasu widać, że dotychcsasowy sposób ssukania roswiązań sawodsi (odbijaliśmy pierwssą bilę w pierwsszej ścianie, drugą w drugiej – a są teras trsy ściany). Spróbujmy najpierw snaleźć

Inne roswiązanie b). Odbijamy A w I otrsymując A_1, następnie A_1 w II otrsymując A_{12} (rys. 11). Proste sprawdsenie pokasuje, że wynik jest ten sam, choć sposób inny. Nadaje się on teras do uogólnienia na większą licsbę odbić.

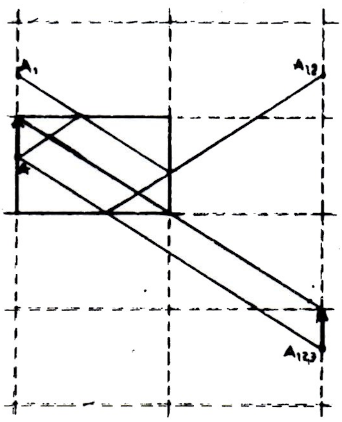


Rys. 12

Ciąg dalssy roswiązania c). Stosując snalesioną metodę otrsymujemy natychmiast wynik (rys. 12).

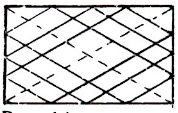
Uwaga: Dla ułatwienia poprawnego wykonania i dla swiększenia csytelności rysunku dobrse jest „pokratkować" tablicę (csy papier) w prostokąty takie, jak bilard. Warto też swrócić uwagę na fakt, że odcinki, po których biegnie bila, representują tylko dwa kierunki.

d) *Znaleźć taki kierunek uderzenia bili, by po odbiciu od każdej ściany wróciła z powrotem na swoje miejsce. Gdzie powinna leżeć bila, aby jej droga była najkrótsza?*



Rys. 13

Roswiązanie d). Jeżeli bilę umieścimy prsy bandsie, to nie smniejssy to ogólności (bila prsecież i tak musi się od band odbijać), a poswoli rosważać tylko trsy odbicia (rys. 13). Stosujemy więc roswiązanie sadania c). Narysowana siatka poswala też snaleźć długość prsebytej drogi – po prsesunięciu otrsymujemy dwie prsekątne prostokąta. Jeśli tak, to długość drogi nie sależy od położenia bili (byle tylko nie leżała w rogu bilardu), a sawsse trseba ją udersyć w kierunku jednej s prsekątnych.



Rys. 14

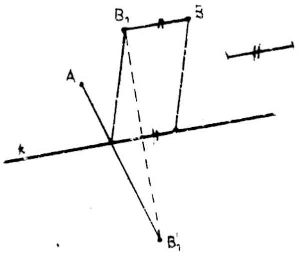
Patrz Powroty 2.

Uzyskany rezultat można przedstawić jako

Twierdzenie. *Czworokątem wpisanym w prostokąt i mającym najmniejszy obwód jest każdy z równoległoboków o bokach równoległych do przekątnych; obwód ten równy jest sumie przekątnych* (rys. 14).

Zadanie domowe. *Dane są dwa punkty A i B leżące po tej samej stronie prostej k. Znaleźć na niej takie dwa punkty P i Q, których odległość jest dana i dla których $AP + BQ$ przyjmuje najmniejszą wartość.*

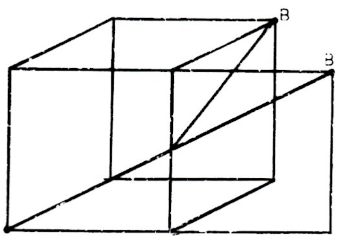
Szkic rozwiązania. Przesuwamy B równolegle do k o odległość poszukiwanych punktów PQ, rozwiązujemy zadanie 1 i wracamy na miejsce (rys. 15). Warto zwrócić uwagę na fakt, że możemy przesunąć w dwie strony.



Rys. 15

Zadanie 5. *Na powierzchni sześcianu znaleźć najkrótszą drogę łączącą przeciwległe wierzchołki. Ile jest takich dróg (przy ustalonych wierzchołkach)?*

Rozwiązanie. „Otwierając" boczną ścianę łączymy wierzchołki odcinkiem (o długości $\sqrt{5}$ razy większej od długości krawędzi) (rys. 16). „Otwierając" kolejno wszystkie ściany zawierające jeden z wierzchołków otrzymujemy... ogromny bałagan. Lepiej zauważyć, że najkrótsza droga prowadzi przez środek krawędzi łączącej ściany w których, odpowiednio, leżą wybrane przeciwległe wierzchołki. Krawędzi tych, a więc i dróg, jest 6 (rys. 17).



Rys. 16

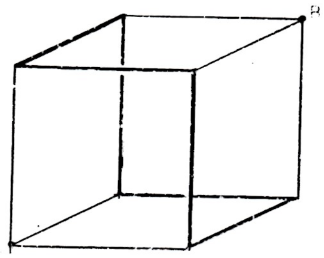
Zadanie domowe. *Na powierzchni sześcianu znaleźć najkrótszą drogę łączącą ustalony wierzchołek ze środkiem ustalonej krawędzi nie należącej do żadnej ze ścian zawierających ten wierzchołek. Ile jest takich dróg?*

Odpowiedź. „Otwieramy" ściany jak poprzednio. Długość najkrótszej drogi jest równa $\sqrt{17}/2$ razy długość krawędzi. Dróg takich jest 4.

Zadanie 6. *Czworokąt jest wypukły gdy odcinki łączące jego przeciwległe wierzchołki przecinają się; znaleźć w czworokącie wypukłym punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.*

Pojęcie wypukłości traktujemy w całym programie intuicyjnie. Nie dowodzimy też równoważności następujących warunków:
odcinek o końcach należących do figury cały się w tej figurze zawiera,
dowolna prosta przecina figurę wzdłuż odcinka, ma z nią punkt wspólny lub jest z nią rozłączna;
podobnie dla wielokątów i wielościanów nie uzasadniamy równoważności tych warunków z warunkiem:
jeśli prosta (płaszczyzna) zawiera bok (ścianę) wielokąta (wielościanu), to cały ten wielokąt (wielościan) zawiera się w jednej z półpłaszczyzn (półprzestrzeni) wyznaczonych przez tę prostą (płaszczyznę).

Pojęcie wypukłości (jak też brzegu, wnętrza itp.) uważamy – na poziomie szkoły podstawowej – za dostatecznie doprecyzowane przez ogląd. Gdy niżej będzie mowa o wypukłości (lub tp.) nie będziemy komentowali sposobu rozumienia tego pojęcia.



Rys. 17

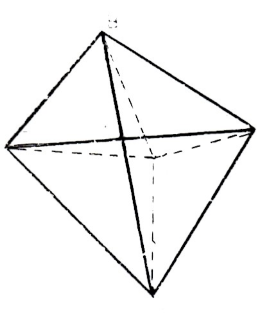
Rozwiązanie. Dla dowolnego punktu Q mamy (rys. 18)

$$(QA + QC) + (QB + QD) \geq AC + BD = PA + PC + PB + PD,$$

a więc szukanym punktem jest punkt przecięcia przekątnych.

Patrz Powroty 3.

3. Podstawowe pojęcia geometryczne można wyrazić za pomocą odległości, np.
odcinek $AB := \{X : AX + XB = AB\}$,
prosta $AB := \{X : AX + XB = AB \text{ lub } AB + BX = AX \text{ lub } BA + AX = BX\}$,
okrąg o środku A i promieniu $r := \{X : AX = r\}$.



Rys. 18

Zadanie 7. *Jak leżą względem siebie punkty A, B, C, jeśli ich odległości wynoszą:*

AB	BC	CA
2,5	3	0,5
3	3	1,5
3	2	6
2,8	13,8	12
$1+3a$	$2+2a$	$5a$
$4b$	$1+2b$	B
$3+2b$	$4+5b$	$1+3b$

(Zadanie to, jak i następne dwa, jest bardzo typowe i wymaga tylko rachunków; nie podajemy więc tutaj rozwiązań. Podobnie należy i dalej rozumieć brak rozwiązań.)

Zadanie 8. *Sformułuj warunki określające wzajemne położenie okręgu o środku A i promieniu a oraz okręgu o środku B i promieniu b, gdy*
- *pierwszy leży wewnątrz drugiego,*
- *są wewnętrznie styczne,*
- *są zewnętrznie styczne,*
- *przecinają się w dwóch punktach,*
- *leżą na zewnątrz siebie,*
- *nie przecinają się.*

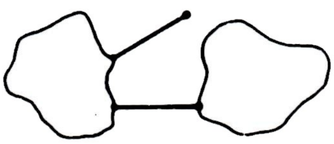
Zadanie 9. *Jak leżą względem siebie okręgi o środkach A i B i, odpowiednio, promieniach a i b, jeśli*

AB	a	b
m	$2m$	$3m$
0	$m-n$	$m+n$
m^2+n^2	$\frac{(m+n)^2}{2}$	$\frac{(m-n)^2}{2}$
$(m+n)^2$	m^2	n^2
$\frac{2m+n}{2}$	m	n

4. W praktyce nigdy nie mamy do czynienia z punktami. Dlatego dobrze jest dysponować również innymi związanymi z odległością pojęciami.

Figury są u nas zawsze domknięte. Gdy potrzebujemy czegoś innego – rozpatrujemy różnicę figur. Stąd np. tutaj nie musimy mówić o kresach.

Odległością punktu od figury nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego ten punkt z jakimś punktem figury. *Odległością dwu figur* nazywamy długość najkrótszego z odcinków łączących punkty tych figur (rys. 19).



Rys. 19

Zadanie 10. *Znaleźć odległość dwu prostych.*

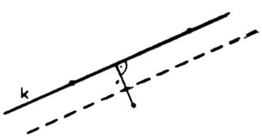
Oczywiście, tylko dla równoległych nie jest to zero.

Zadanie 11. *Wskazać wszystkie proste jednakowo odległe od dwu danych.*

Gdy są równoległe – rozwiązaniem jest to jedna prosta do nich równoległa i wszystkie je przecinające, gdy nie – wszystkie oprócz równoległych do jednej z danych.

Zadanie 12. *Znaleźć odległość dwóch okręgów, dwu kół.*

Zadanie 13. *Znaleźć proste jednakowo odległe od trzech danych punktów (nie leżących na jednej prostej).*



Rys. 20

Patrz Powroty 4.

Rozwiązanie. Rysujemy prostą k przez dwa z tych punktów – dobra jest prosta przechodząca przez środek odcinka realizującego odległość trzeciego punktu od k i równoległa do k (rys. 20). Są trzy rozwiązania.

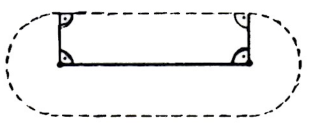
Nie od rzeczy jest zauważyć, że gdy dane punkty są współliniowe, to rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Nazywamy *r-otoczką* figury zbiór punktów, których odległości od tej figury nie przekraczają r.

Zadanie 14. *Znaleźć r-otoczkę okręgu.*

Należy zwrócić uwagę, że czasem jest to pierścień, a czasem koło.

Zadanie 15. *Znaleźć r-otoczkę odcinka.*

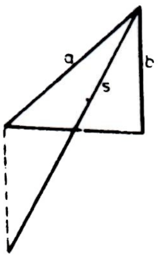


Rys. 21

Należy zwrócić uwagę na dokładne określenie miejsca, w którym brzeg r-otoczki przestaje być częścią prostej, a staje się częścią okręgu (rys. 21).

Zadanie domowe. *Znaleźć r-otoczkę ramion kąta, brzegu wielokąta wypukłego i niewypukłego.*

5. Ważnym zastosowaniem nierówności trójkąta jest szacowanie długości. Oszacować to znaczy podać przedział liczbowy, w którym mieści się interesująca nas liczba. Oszacowanie jest tym lepsze, im przedział ten jest krótszy.



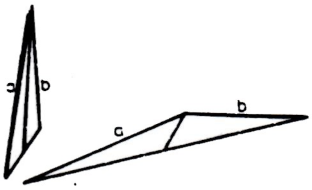
Rys. 22

Zadanie 16. *Oszacować długość środkowej trójkąta za pomocą długości sąsiednich boków.*

Rozwiązanie. Przedłużając dwukrotnie środkową stwierdzamy (za pomocą symetrii środkowej), że mamy do dyspozycji trójkąt o bokach a, b, $2s$ (rys. 22). Stąd zarówno

$$s < \frac{a+b}{2}, \quad \text{jak też} \quad s > \frac{|a-b|}{2}$$

(por. rozwiązanie zadania 2).



Rys. 23

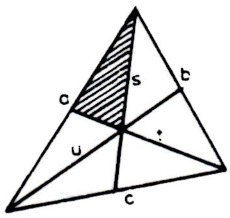
Oszacowania te są najlepsze, gdyż rozważając trójkąty o kątach bardzo ostrych, jak też bardzo rozwartych, między bokami a i b, możemy się do nich dowolnie zbliżyć (rys. 23).

Zadanie 17. *Oszacować sumę długości środkowych za pomocą obwodu trójkąta.*

Rozwiązanie. Sumując górne oszacowania z poprzedniego zadania stwierdzamy, że

$$\text{suma środkowych} < \text{obwód},$$

a rozważając bardzo ostrokątne trójkąty równoramienne stwierdzamy, że oszacowania tego poprawić się nie da.



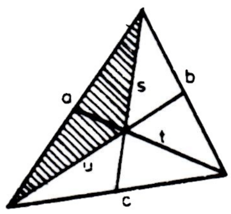
Rys. 24

Oszacowanie dolne można otrzymać np. z trójkątów takich, jak wskazany na rysunku 24. Mamy tam

$$\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t > \frac{1}{2}a.$$

Trójkątów takich jest 6. Po zsumowaniu analogicznych nierówności otrzymujemy

$$\text{suma środkowych} > \frac{1}{2} \cdot \text{obwód}.$$



Rys. 25

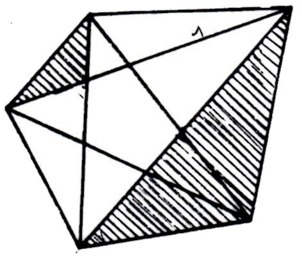
Ale to oszacowanie można poprawić. Rozpatrując inny trójkąt mamy (rys. 25)

$$\frac{2}{3}s + \frac{2}{3}u > a.$$

Trójkątów takich jest 3. Po zsumowaniu otrzymujemy

$$\text{suma środkowych} > \frac{3}{4} \cdot \text{obwód}$$

i tego poprawić się już nie da (co stwierdzamy rozpatrując odpowiednią rodzinę trójkątów).



Rys. 26

Zadanie domowe. *Oszacować sumę przekątnych czworokąta za pomocą obwodu.*

Zgodziliśmy się na oszacowanie

$$\frac{1}{2} \cdot \text{obwód} < \text{suma przekątnych} < \text{obwód},$$

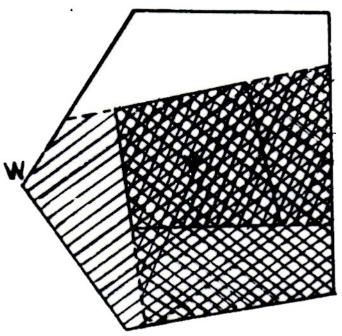
nawet, gdy brakowało dowodu, że jest ono najlepsze.

Zadanie 18. *Oszacować sumę przekątnych pięciokąta za pomocą obwodu.*

Wskazane na rysunku 26 trójkąty prowadzą do oszacowania

$$\text{obwód} < \text{suma przekątnych} < 2 \cdot \text{obwód}.$$

(Dużą trudność dydaktyczną sprawia fakt, że sumując nierówności z „małych" trójkątów nie otrzymuje się po „większej stronie" nierówności całych przekątnych.)



Rys. 27

Zadanie 19. *n-kąt wypukły jest zawarty w m-kącie wypukłym. Wykazać, że n-kąt ma niewiększy obwód.*

Rozwiązanie. Prowadzimy przez jeden z boków n-kąta V prostą. Przecięcie półpłaszczyzny (o brzegu na tej prostej) z m-kątem W daje nam nowy wielokąt W_1, który zawiera V i ma obwód niewiększy od W (łamaną zastąpił odcinek). Powtarzamy tę procedurę dla V i W_1 otrzymując W_2 itd.

Rys. 28

Mamy po n krokach

$$\text{obwód } W \leq \text{obwód } W_1 \leq \text{obwód } W_2 \leq \ldots \leq \text{obwód } W_n = \text{obwód } V\,,$$

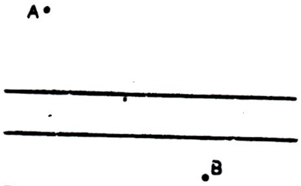
bo $W_n = V$.

(Słuchacze sami wykryli, że założenie wypukłości m-kąta jest zbędne.)

Zadanie 20. *n-ścian wypukły jest zawarty w m-ścianie. Czy prawdą jest, że suma krawędzi n-ścianu jest mniejsza?*

Mimo sugestii w sformułowaniu próbowano dowodzić. Pomocne okazało się pytanie, czy w zadaniu 19 można „obwód" zastąpić przez „sumę obwodu i przekątnych". Przykład dla czworokąta (patrz rysunek 28) został znaleziony – oczywiście, kontrprzykład. Wystarczyło już tylko powiedzieć: „ale to przecież jest rysunek czworościanu".

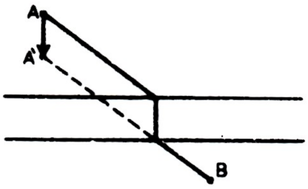
Praca klasowa



Rys. 29

1. Miasto A oddziela od miasta B kanał o równoległych brzegach (rys. 29). Gdzie należy zbudować most na kanale (prostopadły do jego brzegów), by droga przez niego z A do B była najkrótsza?

2. Znaleźć najkrótsze drogi po powierzchni czworościanu foremnego (tj. złożonego z trójkątów równobocznych) łączące środek danej krawędzi ze środkiem krawędzi nie mającej z daną wspólnego wierzchołka. Ile jest takich dróg?



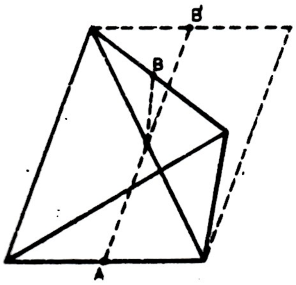
Rys. 30

3. Po dwu równoległych prostych ślizgają się odpowiednio odcinek AB i CD. Kiedy $AC + BD$ jest najmniejsze?

4. Półproste p i q mają wspólny początek A. Znaleźć zbiór punktów jednakowo oddalonych od p i q.

5. Wykazać, że środkowa AD w trójkącie ABC jest krótsza od co najmniej jednego z boków AB i AC.

Szkice rozwiązań.

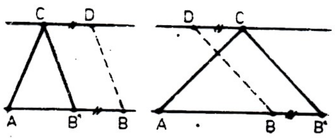


Rys. 31

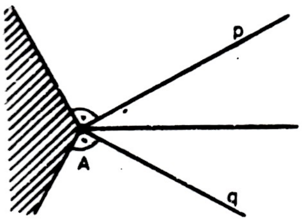
1. Przesuwamy A w kierunku kanału o jego szerokość otrzymując A' (rys. 30). Rozwiązaniem jest droga równoległa do $A'B$.

2. „Otwierając" ścianę otrzymujemy drogę równą krawędzi (rys. 31). Dróg takich jest cztery.

3. W zależności od orientacji AB i CD dodajemy lub odejmujemy odcinki i rozwiązujemy zadanie 1 (rys. 32).



Rys. 32

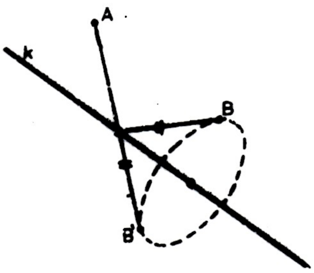


Rys. 33

4. Półprosta leżąca na dwusiecznej i kąt (tam, gdzie odległość do obu półprostych mierzy się do ich wspólnego początku – rys. 33).

5. Skoro $s < \frac{a+b}{2}$, to musi być $s < a$ lub $s < b$.

Powroty



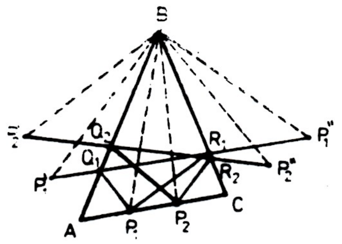
Rys. 34

1. (przy okazji omawiania położenia prostych w przestrzeni)

Zadanie. *Dana jest prosta k i dwa punkty A i B. Znaleźć taki punkt P na k, by $AP + PB$ miało wartość minimalną.*

Rozwiązanie. Jeśli A, B, k leżą na jednej płaszczyźnie, to rozwiązanie można odtworzyć z rozwiązania zadania 1. Jeśli nie – należy B obrócić wokół k o taki kąt, by znalazł się na płaszczyźnie wyznaczonej przez A i k, po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A (rys. 34). Dalszy ciąg oczywisty.

Jak widać, w zadaniu 1 nie chodziło wcale o symetrię względem k, lecz o obrót względem k. Gdy wszystko „dzieje się" na płaszczyźnie, obracać trzeba o kąt półpełny, co „z punktu widzenia płaszczyzny" jest symetrią osiową.



Rys. 35

2. (przy okazji tzw. cech podobieństwa)

Zadanie (problem Fagnano). *Znaleźć trójkąt wpisany w dany trójkąt ostrokątny i mający najmniejszy obwód.*

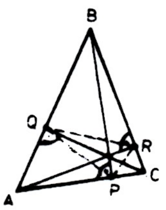
Rozwiązanie. Postępując na wzór zadania 3 obieramy dowolny punkt P_1 na boku AC i znajdujemy trójkąt $P_1Q_1R_1$ mający najmniejszy obwód ze wszystkich wpisanych w ABC i mających wierzchołek P_1 (rys. 35). Znajdujemy teraz trójkąt $P_2Q_2R_2$ wpisany w ABC mający wierzchołek w P_2 i najmniejszy (wśród takich) obwód. Porównujemy wyniki. Trójkąty $P_1'BP_1''$ i $P_2'BP_2''$ są podobne, a to dlatego, że są równoramienne:

$$(*) \qquad P_1'B = P_1B = P_1''B \quad \text{i} \quad P_2'B = P_2B = P_2''B$$

oraz mają równe kąty między ramionami:

$$\angle P_1'BP_1'' = \angle P_1'BP_1 + \angle P_1BP_1'' = 2\angle ABP_1 + 2\angle P_1BC =$$
$$= 2\angle ABC =$$
$$= 2\angle ABP_2 + 2\angle P_2BC = \angle P_2'BP_2 + \angle P_2BP_2'' = \angle P_2'BP_2''.$$

Obwód trójkąta $P_1Q_1R_1$ jest równy $P_1'P_1''$, a obwód $P_2Q_2R_2$ – $P_2'P_2''$. Ponieważ w trójkątach podobnych stosunek podstaw jest równy stosunkowi ramion, więc wobec $(*)$ mniejszy obwód ma ten, dla którego odległość wierzchołka trójkąta wpisanego leżącego na boku AC od B jest mniejsza (na rysunku jest to $P_2Q_2R_2$). Najmniejsza będzie wtedy, gdy wierzchołek leżący na boku AC będzie spodkiem wysokości. Ze względu na symetrię założeń otrzymaliśmy wynik: *trójkątem o najmniejszym obwodzie wpisanym w dany trójkąt ostrokątny jest jego trójkąt spodkowy* (rys. 36).



Rys. 36

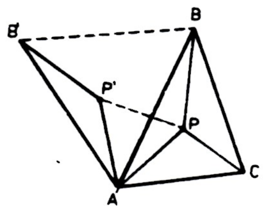
3. (przy okazji izometrii płaszczyzny)

Zadanie (problem Fermata). *W trójkącie ostrokątnym znaleźć punkt, dla którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.*

Rozwiązanie. Obieramy dowolny punkt P i obracamy trójkąt APB wokół A o 60° otrzymując $AP'B'$ (rys. 37). Ponieważ trójkąty APP' i ABB' są równoboczne, więc

$$PA + PB + PC = PP' + P'B' + PC =$$
$$= B'P' + P'P + PC \geq B'C$$

Stąd minimum będzie osiągnięte, gdy punkty P i P' będą leżały na odcinku $B'C$ (B' nie zależy od wyboru P). Aby odcinki $B'P'$ i $P'P$ się przedłużały, kąt $AP'B'$ – a więc i kąt APB – musi mieć 120°. Podobnie, aby odcinki $P'P$ i PC się przedłużały, kąt APC musi też mieć 120°. Tak więc rozwiązaniem jest punkt, z którego widać każdy z boków trójkąta pod kątem 120° – *punkt Torricellego.*

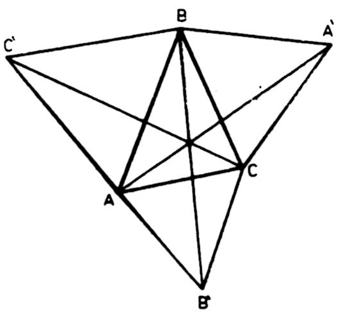


Rys. 37

Wniosek. *Jeżeli na każdym boku trójkąta ostrokątnego ABC zbudujemy na zewnątrz trójkąty równoboczne ABC', $AB'C$ i $A'BC$, to odcinki AA', BB', CC' będą równej długości i przetną się w jednym punkcie dzieląc płaszczyznę na sześć kątów 60°* (rys. 38).

Wynika to z symetrii zadania względem wierzchołków trójkąta.

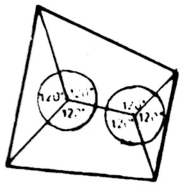
Uwaga. Oczywiście i w zadaniu i we wniosku można warunek ostrokątności zastąpić warunkiem, by żaden z kątów nie przekraczał 120°.



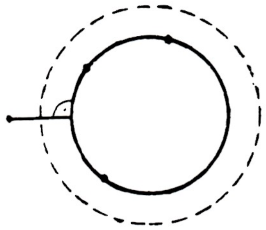
Rys. 38

Problem minimalnej sieci dróg. *Dla danego układu punktów $A_1, \ldots, A_n$ wskazać układ krzywych o minimalnej sumie długości, po których można przejść od dowolnego z nich do dowolnego innego.*

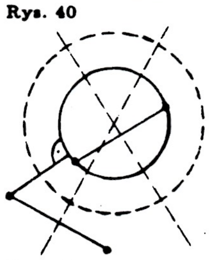
Łatwo dostrzec, że szukana sieć dróg będzie sumą pewnej liczby odcinków. Dla $n = 3$ problem ten jest identyczny z problemem Fermata i jego rozwiązanie stanowią odcinki łączące punkt Torricellego z wierzchołkami trójkąta.



Rys. 39



Rys. 40



Rys. 41

Dla $n = 4$ mamy jednak zupełnie inne rozwiązanie (rys. 39), niż rozwiązanie zadania 6 – nie jest bowiem korzystne, by istniał punkt, w którym zbiegają się wszystkie drogi (nie dowodzimy poprawności tego rozwiązania, tylko informujemy o nim i sprawdzamy, że jest lepsze, na przykładzie kwadratu).

4. a) (przy okazji tematu: Czworokąty i okręgi)

Zadanie. *Znaleźć okręgi jednakowo odległe od czterech danych punktów.*

Rozwiązanie. Gdy punkty te nie są trójkami współliniowe, opisujemy na trzech z nich okrąg o. Jeśli o przechodzi przez czwarty z nich, to rozwiązań jest nieskończenie wiele – każdy okrąg koncentryczny z o jest dobry. Jeśli nie – dobry jest okrąg przechodzący przez środek odcinka realizującego odległość czwartego punktu od o i koncentryczny z o (rys. 40). Takich rozwiązań jest cztery. Mogą być jednak i inne. Uzyskujemy je przecinając symetralne odcinków wyznaczonych przez pary danych punktów i prowadząc okrąg o, mający środek w otrzymanym punkcie, przez dwa z nich – dobry będzie okrąg przechodzący przez środek odcinka realizującego odległość jednego z pozostałych punktów od o i koncentryczny z o (rys. 41). Takich rozwiązań może być trzy.

Należy, oczywiście, rozważyć również przypadki, gdy mają miejsce jakieś współliniowości.

Ważne jest w tym rozwiązaniu spostrzeżenie, że po jednej stronie szukanego okręgu są albo wszystkie punkty, albo trzy, albo dwa z nich.

b) (przy okazji omawiania położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni)

Zadanie. *Znaleźć płaszczyzny jednakowo odległe od czterech danych punktów.*

Rozwiązanie jest analogiczne do poprzedniego i do rozwiązania zadania 13. Największa skończona liczba rozwiązań to 7.

Problem. *Znaleźć proste jednakowo odległe od czterech danych punktów nie leżących w jednej płaszczyźnie.*

Tu należy się zadowolić „gadanym" rozwiązaniem jakościowym.

Opracowali Jerzy BEDNARCZUK i Marek KORDOS