O pewnych metodach prowadzenia ćwiczeń z przedmiotów matematycznych na studiach wyższych

Piotr ZARZYCKI, Gdańsk

Wstęp

Wśród wielu matematyków rozpowszechniony jest pogląd, że prowadzenie zajęć praktycznych z matematyki na studiach wyższych to dość prosta sprawa, wystarczy kilka odpowiednio dobranych zadań (najlepiej z dobrego zbioru zadań) i ćwiczenia przebiegają bezproblemowo. Takie stwierdzenie wtedy może miałoby sens, gdyby studentami matematyki byli wyłącznie uzdolnieni matematycznie ludzie. Tak niestety nie jest, świadczą chociażby o tym bardzo kiepscy nauczyciele matematyki, którzy co roku opuszczają mury polskich uczelni.

Zauważmy, że rzadko się zdarza (wyjątek stanowią wybitnie zdolni), aby problem postawiony bardzo formalnie (patrz przykład 1) zainteresował przeciętnego ucznia, studenta. Najczęściej zaciekawienie budzi forma, sposób wyłożenia (patrz przykład 1′). Ta prosta obserwacja skłoniła mnie do napisania tego artykułu.

Niniejsza praca dotyczy pomysłów, sposobów prowadzenia ćwiczeń z przedmiotów matematycznych. Mottem do moich rozważań może być spostrzeżenie Czesława Miłosza, który w jednym z wywiadów zapytany o swoją karierę wykładowcy w Berkeley powiedział, że uczenie przypomina mu wyciąganie królika z cylindra, dobry zaś nauczyciel to taki, który ma w zapasie wiele „magicznych sztuczek". Tak więc w pracy tej zajmuję się problemem jak najatrakcyjniej prowadzić ćwiczenia, zaproponowane zaś rozwiązania stosowane były w czasie zajęć ze średniozdolnymi studentami tj. takimi, którzy w początkowej fazie nie widzą istoty proponowanego problemu, z trudem posługują się zdobytymi wiadomościami w nowych sytuacjach, ale znają podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia.

Definicja średniozdolnego studenta wzorowana jest na bardzo trafnym określeniu ucznia średniego zaproponowanym w [5].

Opiszę teraz osiem metod, które moim zdaniem mogą przyczynić się do większego zainteresowania przedmiotem, nadać tempo ćwiczeniom. Proponowane metody zilustruję przykładami.

Metoda nr 1 „Deformalizacja"

Istota tej metody jest prosta i polega na ujęciu problemu, zadania w atrakcyjnej formie. Chodzi w niej o sformułowanie problemu w sposób bardziej popularyzatorski. Umiejętność deformalizacji jest szczególnie przydatna w szkole średniej, w której dobra lekcja matematyki to lekcja prowadzona w sposób poglądowy, bez nacisku na techniczne szczegóły.

Przykład 1

Dla danej liczby naturalnej n oblicz

$$k(n) = \min\Big\{ l \in \mathrm{N} : \underset{x_1,\ldots,x_l \in \mathrm{N}}{\exists} \ \underset{\substack{i \in \mathrm{N} \\ i \le n}}{\forall} \ \underset{x_{i_1},\ldots,x_{i_j}}{\exists} \ \underset{\varepsilon_{i_1},\ldots,\varepsilon_{i_j} \in \{-1,1\}}{\exists} \ i = \varepsilon_{i_1} x_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_j} x_{i_j} \Big\}$$

Przykład 1′ (deformalizacja przykładu 1)

Jaka jest najmniejsza liczba ciężarków potrzebnych do zważenia na dwuszalkowej wadze dowolnego towaru o wadze 1, 2,...,n dag?

Jako wskazówkę praktyczną dotyczącą deformalizacji, warto polecić [1], [3], [4]. W książkach tych wielu zagadnieniom tzw. matematyki czystej nadaje się bardziej przystępną i często bardzo atrakcyjną postać.

Jest oczywiste, że problem w przykładzie 1 „budzi grozę", jego deformalizacja jest nieodzowna. Szczegóły dotyczące przykładu 1′ można znaleźć w [6].

Metoda nr 2 „Zawody"

Element rywalizacji pełni rolę stymulującą. To jest podstawa prezentowanej metody „Zawody". Należy podkreślić, że nie wszystkie zagadnienia mogą być ćwiczone tym sposobem. Jasne jest, że przy opanowaniu techniki obliczania np. całek nieoznaczonych można wprowadzić element sportowej walki, chociaż trzeba przestrzec, iż daleko posunięte analogie ze sportem powinny być traktowane z przymrużeniem oka („normy czasowe" przy obliczaniu całek typu $\int(P(x)/Q(x))\,dx$, $P(x)$, $Q(x)$ – wielomiany, „rekordy" I roku, uniwersytetu).

Prezentowany poniżej przykład jest naturalny i wydaje się, że taka forma prowadzenia ćwiczeń ze wstępu do matematyki na pierwszym roku jest korzystna. Zaletą tego przykładu jest również to, że mamy do czynienia z sytuacją odwrotną do opisanej w metodzie nr 1 „Deformalizacja". Teraz chodzi o ważne umiejętności formalizowania i sprawnego operowania symboliką matematyczną.

Przykład 2 „Kwantyfikator"

Dzielimy grupę ćwiczeniową na kilka drużyn (moją 10-osobową grupę podzieliłem na 5 zespołów). Na tablicy wypisujemy następujące polecenie:

„Zapisz, używając kwantyfikatorów, symboli logicznych, symboli operacji arytmetycznych, symboli liczb i symboli zbiorów, następujące funkcje zdaniowe".

Listę funkcji zdaniowych układamy w zależności od poziomu grupy, zespoły mają do wyboru np. 20 pytań. Za poprawne rozwiązanie i prawidłowy zapis (!) zawodnicy uzyskują 1 punkt, jeśli zaś nie potrafią znaleźć właściwego rozwiązania, po 5 minutach mogą prosić o inny „wolny" problem.

Oto przykładowa lista złożona z 10 zadań.

1. x jest liczbą pierwszą.
2. Liczba całkowita x jest wspólną wielokrotnością liczb całkowitych y, z.
3. Liczba naturalna x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb naturalnych y, z,
4. A jest zbiorem dwuelementowym.
5. Nie istnieje największa liczba pierwsza.
6. Liczba naturalna d jest wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a, b, gdzie $b \neq 0$.
7. Liczba naturalna d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a, b, gdzie $b \neq 0$.
8. Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy czterech kwadratów liczb całkowitych.
9. Funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
10. Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$ ma dokładnie trzy punkty skupienia.

Po zakończeniu zawodów i ogłoszeniu, który z zespołów zwyciężył, odbywa się dyskusja nad rozwiązaniami poszczególnych zadań.

Metoda nr 3 „Fałsz czy prawda"

W szkolnictwie wyższym system testów występuje w śladowych ilościach. Metoda nr 3 obejmuje wszelkiego rodzaju testy, od najprostszego typu „Fałsz czy prawda" (przykład 3), po testy bardziej rozbudowane (patrz przykład 4).

Test typu „Fałsz czy prawda" nie może być oczywiście podstawą oceny, ale jest przydatny jako:
– sprawdzenie „elementarza" (z istoty tego testu wynika, że pytania muszą być proste),
– powtórzenie i zebranie wiadomości po przerobieniu większej partii materiału,
– powtórzenie wybranych fragmentów po dłuższym czasie od ich przerobienia.

Prsykład 3

Fałss csy prawda:

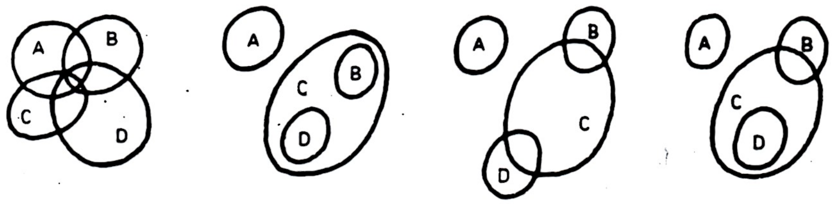
1. Funkcja ciągła $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła.
2. Domknięty ograniczony podsbiór prsestrseni metrycsnej jest swarty.
3. Zbiór licsb rsecsywistych $\mathbf{R}$ jest spójny.
4. Zbiór otwarty jest ograniczony.
5. Zbiór swarty jest domknięty.
6. Funkcja różnicskowalna jest ciągła.
7. Zbiór $[0, \infty)$ jest domknięty.
8. Zbiór $(0, 1)$ jest swarty.
9. Zbiór $\{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ jest ograniczony.

Przykład 4 (algebra, II rok)

Wybiers właściwą odpowiedź:

1. $111\mathbf{Z}$ jest ideałem w $\mathbf{Z}$. Jakim?
a) pierwssym,
b) maksymalnym,
c) głównym,
d) pierwssym i maksymalnym.

2. P –pierścień, A – sbiór elementów odwracalnych pierścienia P, B – sbiór elementów nieroskładalnych P, C – sbiór elementów nieodwracalnych P, D – sbiór elementów roskładalnych P. Który s ponissych diagramów jest prawdsiwy?



a) b) c) d)

3. Jeżeli K jest ciałem, to sbiór ideałów sawartych w K ma moc równą
a) 1, b) 2, c) 3, d) ∞.

4. Niech a będsie elementem pierścienia P, będącego dsiedsiną całkowitości; prses (a) osnacsamy ideał główny generowany prses element a. Element a jest nieroskładalny wtedy i tylko wtedy, gdy
a) $(a) \neq P$ i $(a) \neq \{0\}$,
b) $(a) \neq P$ i istnieje $b \in P$ taki, że $(a) \subsetneq (b) \subsetneq P$,
c) $(a) \neq P$ i dla każdego $b \in P$ jeśli $(a) \subset (b)$, to $(a) = (b)$ lub $(b) = P$,
d) $(a) \neq P$ i $P/(a)$ jest dsiedsiną całkowitości.

5. W pierścieniu $\mathbf{Z}_{47}[x]$
a) $r(f) < \deg f$, b) $r(f) > \deg f$, c) $r(f) \leq \deg f$, d) $r(f) = \deg f$
($f \in \mathbf{Z}_{47}[x]$, $r(f)$ –ilość pierwiastków wielomianu f,
$\deg f$ – stopień wielomianu f).

Metoda nr 4 „Aukcja"

Presentowana metoda jest wariantem metody „Fałss csy prawda". Każdy se studentów grupy ćwicseniowej dysponuje pewną, ustaloną ilością „pieniędsy". Na aukcji sprsedawane są twierdsenia (wśród nich są też fałssywe, na prawdsiwych aukcjach sdarsają się csasami falsyfikaty). Reguły „kupowania" twierdseń są takie, jak w csasie prawdsiwej aukcji: „... po ras pierwssy, ... po ras drugi, sprsedane". Po sakońcseniu aukcji „twierdsenia" fałssywe są ujawniane i mają wartość ujemną, twierdsenia prawdsiwe mają wartość dodatnią (wycena następuje według katalogu sporządsonego prses prowadsącego ćwicsenia, cena sależy od słożoności twierdsenia, saś im większa bsdura, tym większy minus). Swój stan posiadania można poprawić dowodząc twierdzenia (podwojenie jego ceny) lub podając kontrprzykład (ocena ujemna razy 1/2); w czasie i po aukcji można tworzyć spółki.

Przykład 5 (analiza matematyczna, I rok)

Przykładowy zestaw stwierdzeń „sprzedawany" na aukcji jest następujący:

1. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest ciągła, to osiąga wartość najmniejszą i wartość największą.
2. Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbf{Q}$ spełnia warunek Cauchy'ego, to ciąg ten jest w $\mathbf{Q}$ zbieżny.
3. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to $a_n\to 0$.
4. Zbiór liczb $\{n/2^k : n\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{N}\}$ jest gęsty w $\mathbf{R}$.
5. Każda funkcja ciągła $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła.
6. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ są rozbieżne wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ jest rozbieżny.
7. Każdy nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ ma punkt skupienia.
8. Istnieje funkcja $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, która jest ciągła tylko w zbiorze liczb wymiernych $\mathbf{Q}$.
9. Istnieje funkcja $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, która jest ciągła tylko w zbiorze liczb niewymiernych $\mathbf{IQ}$.
10. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{\alpha}$, $\alpha>1$, jest zbieżny.

Metoda nr 5 „Stare i nowe"

Umiejętność dostrzegania analogii to jedna z najbardziej pożądanych cech dobrego studenta matematyki. Zamierzeniem prezentowanej metody „Stare i nowe" jest doskonalenie właśnie tej cechy. Zajęcia tym sposobem powinny być prowadzone przede wszystkim na wyższych latach. W przykładzie ilustrującym tę metodę, na bazie wiadomości z analizy matematycznej na drugim roku badano funkcje wielu zmiennych (ciągłość a różniczkowalność, twierdzenia o ekstremach, twierdzenie o wartości średniej).

Przykład 6 (analiza matematyczna, II rok)

$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^n$
1. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.	I. Jeżeli funkcja $f:E\to\mathbf{R}^n$, E otwarty podzbiór $\mathbf{R}^n$, jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.
1'. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Kontrprzykład: $f(x)=\lvert x\rvert$.	I'. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Kontrprzykład: $f(x)=\lVert x\rVert$.
2. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest różniczkowalna i ma lokalne ekstremum w x_0, to $f'(x_0)=0$.	II. Jeżeli funkcja $f:E\to\mathbf{R}^n$ jest różniczkowalna i ma lokalne ekstremum w x_0, to $f'(x_0)=0$.
3. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest różniczkowalna oraz $f'(x)=0$ dla $x\in(a,b)$, to $f=\mathrm{const}$.	III. Jeżeli funkcja $f:E\to\mathbf{R}^n$ jest różniczkowalna oraz $f'(x)=0$ dla $x\in E$, to $f=\mathrm{const}$.
4. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ jest różniczkowalna oraz $f'(x_0)=$ $=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, to f nie ma w x_0 lokalnego ekstremum.	IV. Jeżeli funkcja $f:E\to\mathbf{R}^n$ jest różniczkowalna oraz $f'(x_0)=$ $=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, to f nie ma w x_0 lokalnego ekstremum.

Praca zorganizowana była w sposób następujący: po wypisaniu na tablicy stwierdzeń 1, 1', 2, 3, 4 studenci wypisywali na sąsiedniej tablicy stwierdzenia I, I', II, III, IV, będące analogami poprzednio wypisanych faktów. Po interpretacji „nowych" twierdzeń, studenci próbowali, wzorując się na dowodach 1, 1', 2, 3, 4, przeprowadzić dowody I, I', II, III, IV.

Metoda nr 6 „Antykolokwia"

Redagowanie tekstów matematycsnych, „wypracowań" typu kolokwia jest trudnym sadaniem. Bardso często na słabe wyniki kolokwiów, egsaminów pisemnych nie składają się brak wiedsy csy kiepskie opanowanie materiału, lecs niedostatki w sposobie sapisu, organisacji roswiąsania. Uwaga ta dotycsy różnych posiomów ksstałcenia. Zauważmy, że praca kolokwialna, to takie matematycsne wypracowanie, ale podcsas, gdy na przykład w wypracowaniu s języka polskiego bardso przestrsega się sasady podsiału tekstu na wstęp, roswinięcie i sakońcsenie, to w pracach studentów matematyki w tym wsględsie panuje chaos, nie ma bowiem swycsaju ucsenia redagowania tekstów matematycsnych. Celem stosowania metody nr 6 jest swrócenie uwagi na sposób organisacji pracy matematycsnej, prsy csym cel ten osiąga się poprses pokasanie „słych" prsykładów.

Oto jeden se sposobów prowadsenia sajęć metodą „Antykolokwia": w roku akademickim 1984/85 prowadsiłem ćwicsenia s analisy matematycsnej na drugim roku matematyki. Prace s kilku kolokwiów satrsymałem jako *corpus delicti*. W następnych latach, w csasie podobnych sajęć saproponowałem grupie roswiąsanie sadań s kolokwiów 1984/85, a następnie prsedstawiłem wybrane prace studenckie s owego okresu s prośbą o wychwycenie błędów merytorycsnych, błędów w organisacji sapisu i napisanie mini recensji.

Metoda nr 7 „Plakaty"

Proponowana metoda dotycsy sposobu powtarsania wiadomości prsed kolokwiami. Wyrobienie umiejętności właściwej selekcji powtarsanego materiału, a także obniżenie „stresu egsaminacyjnego" to podstawowe cele stosowania metody nr 7 (prsygotowane prses studentów plakaty były wykorsystane w csasie kolokwium).

Prsed kolokwium s sseregów Fouriera saproponowałem studentom wykonanie w csasie ćwicseń plakatów se wsorami, ważniejssymi twierdseniami.

Metoda nr 8 „Gazetka"

Prsygotowanie gasetki matematycsnej jest wyjątkowo atrakcyjnym sposobem prowadsenia ćwicseń. W gasetce można umieścić ciekawe sadania, ładne roswiąsania saproponowane prses studentów, komentars do twierdseń, które pojawiły się na wykładsie itd. Gasetka może być prsesnacsona dla sskoły podstawowej, sskoły średniej, równoległej grupy ćwicseniowej lub całego roku.

Uwagi końcowe

Zapresentowałem osiem sposobów prowadsenia ćwicseń s prsedmiotów matematycsnych. Stosując te pomysły, starałem się, aby „forma nie prseważyła nad treścią", bowiem we wssystkich tych eksperymentach matematyka jest najważniejssa. Prsedstawione metody, swłasscsa 2, 3, 4, 8, s powodseniem mogą być stosowane w sskołach podstawowych i średnich.

Bibliografia

[1] M. Gardner, 1983, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York.

[2] Cs. Kosniowski, 1987, *Zanimatielnaja matiematika i piersonalnyj kompjutier*. Mir, Moskwa (tłumacsenie s języka angielskiego na język rosyjski).

[3] H. Steinhaus, 1956, *Kalejdoskop matematyczny*, PZWS, Warssawa.

[4] H. Steinhaus, 1974, *Zadaci i razmyslenija*, Mir, Moskwa (po rosyjsku).

[5] S. Ssymański, 1969, *Jak aktywizować ucznia średniego?*, Matematyka 4–6, 199–203.

[6] P. Zarsycki, 1981, *O ważeniu za pomocą najmniejszej liczby ciężarków*, Matematyka 3, 181–182.