W trosce o kulturę matematyczną w szkole

Danuta ZAREMBA, Wrocław

Pewna porcja wiedsy matematycsnej jest ocsywiście potrsebna naucsycielowi, aby mógł ucsyć matematyki, ale nie jest wystarcsająca do tego, aby to ucsenie było skutecsne. Trseba jesscse, aby naucsyciel umiał ssukać drogi porosumienia s dsiećmi. Chcąc być rosumianym prses dsieci, powinien starać się takśe je rosumieć i cały csas dostosowywać do ich mośliwości. W ostatnich latach naucsycielom udawało się to tylko w niewielkim stopniu, bowiem obowiąsujące do niedawna programy sskolne były supełnie niedostosowane do mośliwości ucsniów i ułośone wbrew wsselkim sasadom dydaktyki. Zmussano naucsycieli do ucsenia csegoś, csego w ogóle nie mośna było naucsyć. Naucsyciele sostali wciągnięci w tryby massyny słuśącej do realisowania programu. Kasano im ucsyć pewnych schematów, które stały się celem samym w sobie. Niersadko wpajano naucsycielom, śe do określonych tematów prsypisane są w matematyce określone metody, od których nie wolno odstąpić. A tymcsasem nie mośe być opracowanych w kaśdym ssczególe i niesawodnych metod ucsenia matematyki, bo prsecieś trseba je w duśej mierse kaśdorasowo dostosować do grupy ucsniów, s którą ma się do csynienia, a ponadto trseba jesscse dosyć często róśnie postępować s róśnymi ucsniami s tej samej grupy. Naucsyciel powinien sdawać sobie sprawę s tego, śe ucsniowie nie sawsse będą ssli posłussnie tą drogą, którą on im wytycsy. Dsieci prsecieś rosumują w swój własny sposób, niersadko trudny do srosumienia dla dorosłych. Mają one swoje własne intuicje i wyobraśenia. Naucsyciel musi snaleźć csas na słuchanie ucsniów, bowiem wniknięcie w sposób myślenia dsiecka sprsyja naucsaniu w sposób istotny. Tego rosumienia ucsniów naucsyciel musi się sam starać naucsyć. Jeśli coś nie wychodsi, jeśli dsieci csegoś nie prsyswajają, to nie pomośe powtórsenie tego csegoś jesscse ras lub polecenie naucsenia się w domu. Trseba pomyśleć, jak smienić podejście do sagadnienia, aby snaleźć się w pewnym momencie na drodse wspólnej s dsiećmi. To wymaga ciągłej refleksji naucsyciela nad jego pracą, ciągłego wsbogacania repertuaru dydaktycsnego.

Naucsyciel powinien mieć duśą swobodę w obcowaniu s dsiećmi, swobodę w wyborse kiedy, csego i jak będsie ucsyć. Na lekcjach naucsyciel powinien być elastycsny. Nie sawsse da się srobić to, co się saplanowało. Csasami np. trseba się wdać w dyskusję na temat niejednosnacsnej interpretacji sadania domowego csy teś sająć się wynikłym nieocsekiwanie problemem.

Ssczególnie trudna i odpowiedsialna jest w tym wsględsie praca naucsyciela s małymi dsiećmi, bowiem pierwsse kontakty dsiecka s matematyką w sskole rsutują snacsnie na jego póśniejssą edukację. Jednocseśnie praca ta mośe prsynieść naucsycielowi najwięcej chyba satysfakcji. Małe dsieci są prsecieś bardso wdsięcsnymi ucsniami. Są one ssczere, prostolinijne, łaknące wiedsy i darsące naucsyciela s góry saufaniem i sympatią. Jeśeli naucsyciel potrafi sprostać ocsekiwaniom dsieci, to resultaty mogą być wyśmienite. Naucsyciele naucsania pocsątkowego wcale nie mussą wiedsieć, co to jest produkt kartesjański csy relacja, nie mussą biegle operować licsbami w systemach niedsiesiątkowych. Natomiast mussą być w stanie skutecsnie pomagać dsieciom w roswiąsywaniu róśnych prostych problemów matematycsnych i sdobyciu pewnych umiejętności w rachowaniu oras operowaniu figurami geometrycsnymi. Porosumienie s dsieckiem i dostosowanie się do niego jest tu najistotniejsse. Naucsyciel powinien np. sdawać sobie sprawę s tego, śe małe dsiecko mośe próbować róśnymi sposobami snaleźć licsbę x spełniającą równanie

$$14 - x = 9,$$

natomiast nie dorosło jesscse do formalnego prsekssta łcania tego równania.

Podobnie dsiecko jest w stanie ustawić według wielkości ułamki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ csy też $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, ale supełnie nie daje się smusić do sformułowania abstrakcyjnej dla niego i sbędnej regułki o porównywaniu ułamków o jednakowych licsnikach csy jednakowych mianownikach. Naucsyciel powinien być prsygotowany na to, że ucsniom prses długi csas w ogóle myli się licsnik s mianownikiem i że jest to sprawa normalna, która s csasem prsestanie być problemem, a na pocsątku supełnie nie prsesskadsa w sasnajamianiu się s ułamkami. Wystarcsy bowiem, że dsiecko rosumie snacsenie licsb oddsielonych kreską ułamkową.

Dajmy dsieciom więcej swobody w rozwiąsywaniu sadań. Obecnie dosyć typowa jest sytuacja, kiedy naucsycielowi nie wystarcsa naturalne roswiąsanie sadania snalesione prses dsiecko, ale smussa on dsieci do stosowania pewnych schematów, których s kolei on sam był kiedyś ucsony. Dla prsykładu roswaśmy następujące sadanie:

Pani Kowalska miała 2 000 zł. Kupiła gazetę za 350 zł oraz dwa dropsy po 400 zł każdy. Ile pieniędzy zostało pani Kowalskiej?

Naucsyciel csęsto nie sadowala się tym, że dsieci w sposób naturalny roswiąsują to sadanie etapami: oblicsają kwotę wydaną na dropsy, potem w ogóle kwotę wydaną na sakupy, a na końcu odejmują tę kwotę od 2 000. Csasami dsieci nie oblicsają całej kwoty wydanej prses panią Kowalską, natomiast od 2 000 odejmują oddsielnie 350 oras 800 (lub dwa rasy po 400). Naucsyciel jednak uważa, że koniecsnie trseba ująć roswiąsanie sadania w jedno wyrażenie:

$$2\,000 - (350 + 2 \times 400)\,.$$

Prsy takich wymaganiach se strony naucsyciela ucsniowie mogą mieć narastające kłopoty s roswiąsywaniem sadań. W ogóle naucsyciela trseba ucsulić na to, aby wręcs prowokował dsieci do tworsenia ich własnych metod roswiąsywania problemów. Zdarsyło mi się kiedyś obserwować, jak cała cswarta klasa pewnej sskoły, snająca już dosyć dobrse pojęcie ułamka i sprowokowana po ras pierwssy do odejmowania typu

$$4\frac{1}{5} - 1\frac{3}{5}$$

dochodsiła do wyniku w sposób następujący:
1) Najpierw odejmujemy 1 (s odjemnika) od 4 (s odjemnej) i dostajemy w wyniku 3.
2) Teras sauważamy, że posostała w odjemnej $\frac{1}{5}$ jest sbyt mała, aby odjąć od niej $\frac{3}{5}$. Wobec tego ujmujemy 1 s wyniku (sostaje tam więc tylko 2) i teras odejmujemy $\frac{3}{5}$ od 1.
3) Do otrsymanych prsed chwilą $\frac{2}{5}$ dodajemy posostałe w poprsednim wyniku 2 oras posostałą $\frac{1}{5}$ s odjemnej.

O dsiwo, tą metodą dsieci operowały ssybko i niesawodnie, prsy csym licsyły wssystko w pamięci. Za jakiś csas, kiedy trseba było sapisywać wykonywane dsiałania, dsieci same dossły do tego, aby w takiej sytuacji 1 s odjemnej prsedstawić w postaci ułamka o odpowiednim mianowniku i odejmować od rasu całość od całości, a ułamek od ułamka.

Prsyssły naucsyciel musi sobie sdawać sprawę s tego, że aby ułatwić dsieciom dojście do sprawności rachunkowych, trseba dać im swobodę w wyborse metod licsenia. Csasem ocsywiście można i trseba podpowiedsieć jakiś sposób, ale prsede wssystkim trseba brać pod uwagę preferencje dsiecka. Odejmowanie 11 − 3 jedne dsieci wolą srobić tak:

$$11 - 3 = (10 + 1) - 3 = (10 - 3) + 1\,,$$

inne tak:

$$11 - 3 = (10 + 1) - (2 + 1) = 10 - 2\,,$$

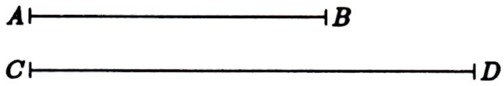
a jesscse inne inacsej.

Naucsyciela trseba też w pewnym sensie uodpornić na roscsarowania i niepowodsenia. Musi on być prsygotowany na to, że małym dsieciom jest bardso trudno sapamiętać proste, wydawałoby się, naswy. Dosyć długo mylą się dzieciom np. określenia „równoległość" i „prostopadłość". Po wprowadzeniu definicji potęgi jeszcze dosyć często dzieci powiedzą, że 2^3 to jest 6. Błąd ten może pochodzić stąd, że $2 \times 2 \times 2$ to jest 3 razy pomnożone 2 (przez siebie), skąd już łatwo dostać 3×2. Trzeba cierpliwie uświadamiać dziecku dwuznaczności języka potocznego. Podobnie jest też z działaniem 5×5. Ponieważ 5 występuje tu dwukrotnie, więc 5×5 dziecko może utożsamić z działaniem 2×5. Łatwo sobie wyobrazić zdziwienie czy wręcz frustrację dziecka, jeżeli nie wnikający w sedno nauczyciel oceni dziecko negatywnie.

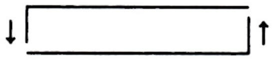
Sprawy językowe w nauczaniu matematyki zasługują na szczególną uwagę. Nawarstwiło się tu ostatnio wiele nieporozumień. W związku z tendencją do sformalizowania szkolnej matematyki język na lekcjach stał się w wielu wypadkach niepotrzebnie skomplikowany i niezrozumiały dla dzieci. Stawał się on często celem samym w sobie i zatracał swój sens jako narzędzie porozumiewania się. Dzieci zaczęto zmuszać do posługiwania się terminami z teorii mnogości, co sprawiło np. że proste stwierdzenie: „3 jest dzielnikiem 15" trzeba było zastąpić zdaniem: „3 należy do zbioru dzielników 15". Zaczęto przesadnie przejmować się o niejednoznacznością pewnych nazw, mianowicie tych nazw, które są używane w języku codziennym i mają różne znaczenie w różnych kontekstach – np. promień koła to czasem liczba, a czasem odcinek i nigdy nie prowadzi to do nieporozumień. Tymczasem na lekcji matematyki sformułowanie: „koło o promieniu 5 cm" było uważane za niedopuszczalne i należało je przerobić na takie, w którym koniecznie mowa o długości promienia: „koło o promieniu o długości 5 cm". W taki sam sposób kąty w trójkącie równobocznym przestały być równe, a stały się przystające, a w znanym twierdzeniu o kątach wpisanym i środkowym, z których jeden jest dwa razy większy od drugiego, trzeba było obowiązkowo mówić o miarach tych kątów. Ponadto zaczęto naciskać na używanie formalnych definicji. Już małe dzieci musiały umieć zdefiniować kąt jako część płaszczyzny. Tymczasem moim zdaniem ta akurat definicja kąta nie jest wcale najbardziej adekwatna do intuicji, bowiem kąt jest to raczej jakaś rozwartość, jakieś nachylenie, a więc może raczej para ramion czyli para odcinków lub półprostych. Ponadto do operowania kątami na poziomie szkoły podstawowej żadna ich definicja formalna nie jest na pewno potrzebna. W imię matematycznej ścisłości od dzieci zaczęto wymagać recytowania skomplikowanych definicji oraz regułek: „rzutem punktu A na prostą p równoległym do prostej q nazywa się punkt przecięcia prostej równoległej do q i przechodzącej przez A z prostą p", „iloczyn dwu ułamków jest to ułamek, którego licznik jest iloczynem liczników obu ułamków, a mianownik jest iloczynem mianowników tych ułamków" etc. Tymczasem zdrowy rozsądek nakazuje pierwszą definicję zastąpić opisem wykonywanych po kolei czynności, a drugą akurat najlepiej zapisać symbolami: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. W naturze matematyki leży przecież upraszczanie i skracanie gdzie się tylko da. Język matematyczny ma być zwięzły i prosty. Jest to bardzo ważne, bo inaczej matematyka stanie się dla dzieci czymś sztucznym i w konsekwencji nieprzyjemnym.

Nauczyciel powinien być świadom tego, jak wielu nowych pojęć i nazw uczy się dzieci w krótkim czasie i że dzieciom te pojęcia mają prawo przez pewien czas się mylić. Spora część tych pomyłek bierze się stąd, że nazwy matematyczne są często nieadekwatne lub niekonsekwentnie dobierane do pojęć, co bardzo przeszkadza logicznemu z natury i biorącemu wszystko dosłownie dziecku. Stąd też dzieci przez jakiś czas uparcie nazywają każdy prostopadłościan sześcianem. Dzieci rozumieją, że ściany wielościanu są odpowiednikami boków wielokąta i dlatego często mówią o bokach wielościanu czy ścianach wielokąta. Z tego też powodu utożsamiają nawet czasem sześcian z sześciobokiem. Nauczyciel powinien liczyć się z takimi pomyłkami i rozumieć ich źródło. Wiele jest także nazw dwuznacznych. Suma liczb 2 i 3 czasem oznacza wynik ich dodawania, a czasem wyrażenie $2 + 3$. Analogicznie z różnicą, iloczynem czy ilorazem. Nazwa „dzielnik" jest używana zarówno w sensie liczby, przez którą dzielimy, jak i w sensie liczby całkowitej, po podzieleniu przez którą dostaje się iloraz całkowity. Jeżeli zdajemy sobie z tego sprawę, to nie ma nieporozumień.

Matematyka szkolna nie ucierpi, jeżeli pozwolić używać dzieciom także ich własnego języka, który jest często bardzo adekwatny do istoty rzeczy. Młodsze dzieci nazywają często wierzchołki figury rogami, krawędzie wielościanu krawężnikami, mówią o szerokości lub rozwartości kąta. Rysunek



potrafią opatrzyć logicznym z życiowego punktu widzenia komentarzem: „odcinek CD jest szerszy niż odcinek AB". Nie ingerujmy zbyt gwałtownie w tego rodzaju rzeczy, bo możemy w ogóle zniechęcić dzieci do wypowiadania ich własnych sądów. Wiele złego bierze się stąd, że nauczyciel często nie usiłuje wniknąć w sposób myślenia pojedynczego dziecka. Czasem w pozornych nonsensach jest dużo logiki. Dla przykładu przytoczę dwa sądy pochodzące od dzieci klasy czwartej: „koło nie jest nigdzie krzywe", „w prostokącie są dwa (tylko) kąty proste". W pierwszym przypadku dziecko miało w gruncie rzeczy na myśli stałą krzywiznę koła w odróżnieniu np. od elipsy, a w drugim widziało prostokąt jako wynik złączenia dwu kątów prostych:



Dzieci trzeba słuchać nie tylko wtedy, kiedy odpowiadają na pytania, ale także wtedy, kiedy wypowiadają swoje własne sądy.

Sporo uwag można mieć do uczenia w szkole geometrii. Często słyszymy od nauczycieli, że nie lubią uczyć geometrii. A tymczasem geometria jest czymś interesującym dla ogółu dzieci. Ma ona przecież związek z naszą codziennością i nie jest tak abstrakcyjna jak np. działania typu

$$\left(-1\frac{2}{7}\right) : (-0{,}23)\,.$$

Trzeba tę zaletę geometrii umiejętnie wykorzystać. W ogóle trzeba, moim zdaniem, dosyć gruntownie zmienić program matematyki w szkole, kierując się zasadą: wszelkie formalizmy rachunkowe, w tym liczby ujemne i działania na nich, powinny być wprowadzone dopiero w ostatnich klasach szkoły podstawowej, natomiast w klasach młodszych trzeba kształcić umiejętności rachowania, rozwiązywania różnych problemów (różnorakie zadania tekstowe) oraz właśnie uczyć sporo geometrii. Geometrii w szkole nie można uczyć w sposób sformalizowany, co nie jest w żadnej sprzeczności z tym, że uczenie geometrii jest doskonałą drogą ćwiczenia logicznego myślenia u dzieci. Nie przytłaczajmy skomplikowanymi dowodami swoich uczniów, przy czym pamiętajmy, że nawet prosty dowód staje się skomplikowany, jeżeli dowodzi się własności zupełnie oczywistej dla dziecka. Przede wszystkim trzeba wyrabiać u uczniów widzenie geometryczne, orientację w związkach między różnymi własnościami, a także umiejętność mierzenia w szerokim sensie (długość, pole, objętość). Dzieci na geometrii uczą się też rysowania rozmaitych figur, co jest często nieodzowne do rozwiązania jakiegoś problemu. Nauczyciel powinien tak pracować z dziećmi, aby od pewnego momentu zaczęły one intuicyjnie zdawać sobie sprawę z tego, że odcinek narysowany w zeszycie czy na tablicy jest tylko ilustracją matematycznego pojęcia odcinka. Do takiego abstrahowania dzieci są po niedługim czasie zdolne. Sprzyja temu nienadużywanie przy rysowaniu przyborów w rodzaju linijki czy cyrkla. Dzieci widzące rysującego odręcznie nauczyciela czy też same rysujące odręcznie lepiej sobie zdają sprawę z właściwej roli rysunku. Trzeba tu przy okazji zauważyć, że umiejętność odręcznego rysowania jest w pewnym stopniu potrzebna każdemu człowiekowi. Dobrze jest też, jeżeli dzieci ćwiczą swoje geometryczne rysowanie na kartkach bez kratek czy linii. To jest pozornie trudniejsze, ale w istocie umożliwia lepsze widzenie geometryczne i w konsekwencji ułatwia uczenie się geometrii.

Jeżeli idzie w ogóle o rolę zeszytu do matematyki, to trzeba się nad nią dobrze zastanowić. Mam wrażenie, że nie jest ona jasna, szczególnie dla małych dzieci.

Wydaje mi się, że w pewnych ramach trzeba dać dziecku sporo swobody i kontrolowanej samodzielności w prowadzeniu zeszytu. Dzieci pomału powinny uczyć się robienia notatek. Obecnie często jest tak, że największą uwagę zwraca się na marginesy, wyodrębnienie tematu, którego sformułowanie często nie jest dla dziecka w pełni zrozumiałe i na to, aby w zeszycie nie było poprawek. Coś tu nie tak.

Na zakończenie jeszcze nieco uwag natury bardziej ogólnej. Nauczyciel pracujący z dziećmi musi być świadom trudności, które będą się przed nim nieuchronnie pojawiać. Jednocześnie musi być przygotowany na to, że w dużym stopniu od niego samego zależy, czy te trudności zostaną pokonane. Powinien on umieć dostosować się do uczniów. Czasem trzeba się z czegoś w uczeniu wycofać, czasem podejść do czegoś jeszcze raz i być może zupełnie inaczej, czasem coś odłożyć na potem, a czasem można wybiec w przyszłość. Taka postawa umożliwia osiąganie rzeczywistych rezultatów, a przy tym daje szanse na to, że matematyka szkolna stanie się bardziej lubianym przedmiotem.

Jeszcze jedna uwaga natury formalnej. We wnętrzu artykułu nie występuje explicite ani razu pojęcie kultury matematycznej, użyte w tytule. Mimo to sądzę, że tytuł artykułu jest adekwatny do jego treści.