Osobliwości krzywych algebraicznych, szeregi Puiseux i diagramy Newtona

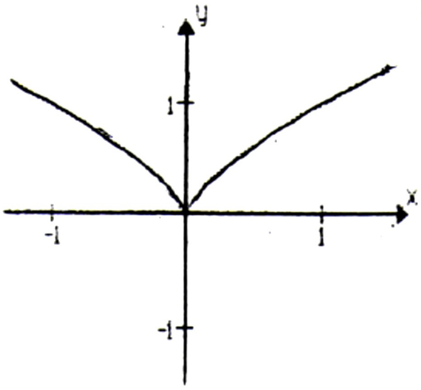
Arkadiusz PŁOSKI, Kielce

1. Krzywe algebraiczne

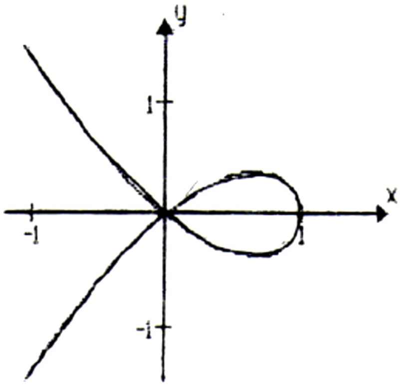
Będziemy zajmować się równaniami postaci

$$f(x, y) = 0,$$

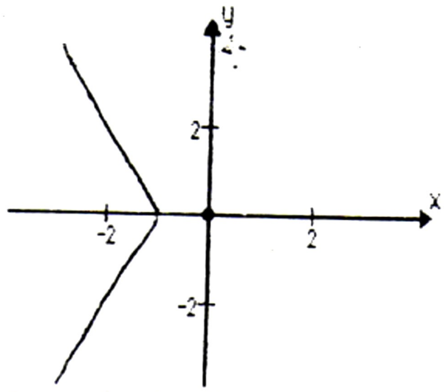
których lewa strona jest wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych. Rozważmy zbiór Z_f wszystkich rzeczywistych rozwiązań $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ rozważanego równania. Gdy f jest wielomianem stopnia pierwszego, to Z_f jest prostą; gdy f jest stopnia drugiego, to zbiór Z_f jest krzywą stożkową, parą prostych, prostą, zbiorem jednopunktowym lub pustym. Rysunki pokazują przykłady zbiorów związanych z równaniami stopnia trzeciego.



Rys. 1. $y^3 - x^2 = 0$



Rys. 2. $y^2 + x^3 - x^2 = 0$



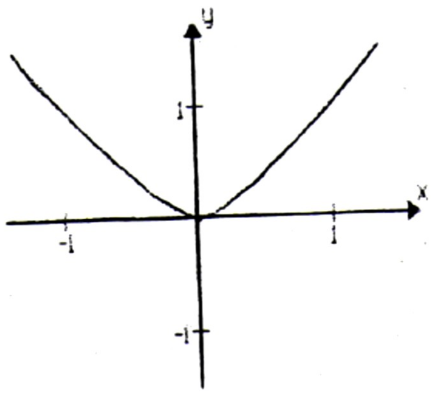
Rys. 3. $y^2 + x^3 + x^2 = 0$

Podzbiór płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ złożony z punktów o współrzędnych (a, b) spełniających układ równań wielomianowych rozważanej postaci nazywamy zbiorem algebraicznym (w $\mathbf{R}^2$). Każdy zbiór algebraiczny jest postaci Z_f dla stosownie dobranego f (bo jeśli Z jest zbiorem rozwiązań układu $f_1(x, y) = \ldots = f_m(x, y) = 0$, to można przyjąć $f = f_1^2 + \ldots + f_m^2$). Zbiór pusty, cała płaszczyzna $\mathbf{R}^2$, suma i iloczyn skończonej liczby zbiorów algebraicznych są algebraiczne. Każdy zbiór algebraiczny jest domknięty jako zbiór zer funkcji ciągłej, zbiór algebraiczny $\neq \mathbf{R}^2$ jest nigdzie gęsty (bo jeśli wielomian zeruje się w pewnym kole, to jest tożsamościowo równy zeru). Trudniej jest dowieść, że każdy zbiór algebraiczny ma skończoną liczbę spójnych składowych. Spójna składowa zbioru algebraicznego może nie być zbiorem algebraicznym – Czytelnik sprawdzi, że gałęzie hiperboli nie są zbiorami algebraicznymi. W naszych rozważaniach bardziej skupiamy uwagę na równaniu $f(x, y) = 0$ niż na zbiorze Z_f, dlatego przyjmiemy następującą definicję:

Definicja. *Krzywą algebraiczną* o równaniu $f(x, y) = 0$ nazywamy zbiór wszystkich wielomianów postaci cf ($c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$).

Podana definicja pozwala mówić o „podwójnej prostej $y^2 = 0$ " lub „o okręgu o urojonym promieniu $x^2 + y^2 + 1 = 0$" – już klasyfikując stożkowe zajmiemy się raczej równaniami niż zbiorami punktów. Stopniem krzywej $f(x, y) = 0$ nazywamy stopień wielomianu f, a zbiór Z_f zbiorem punktów krzywej.
Punkt (a, b) krzywej $f(x, y) = 0$ nazywamy punktem regularnym krzywej, gdy $f_x(a, b) \neq 0$ lub $f_y(a, b) \neq 0$ (oznaczamy $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$). Klasyczne twierdzenie o funkcji uwikłanej pozwala stwierdzić, że w pobliżu punktu regularnego zbiór punktów krzywej jest postaci $x = \xi(y)$ lub $y = \eta(x)$, gdzie ξ względnie η jest funkcją analityczną (lokalnie rozwijalną w szereg potęgowy).
Punkty, które nie są regularne, nazywamy osobliwymi. Punkt osobliwy (a, b) krzywej $f(x, y) = 0$ spełnia więc warunki $f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Na rysunkach 1, 2, 3 początek układu jest punktem osobliwym, co można stwierdzić patrząc na rysunek.

Czasami jednak nie sposób zobaczyć osobliwości „gołym okiem" – pokazują to przykłady podane na rysunkach 4 i 5. Na rysunkach 6 i 7 mamy jeszcze dwa przykłady osobliwości krzywych stopnia czwartego. Zauważmy, że rysunek 7 przedstawia „ostrze" innego typu, niż przedstawione na rysunku 1 – oba łuki dobiegają do punktu osobliwego z jednej strony stycznej.



Rys. 4. $y^3 - x^4 = 0$

Ćwiczenia:

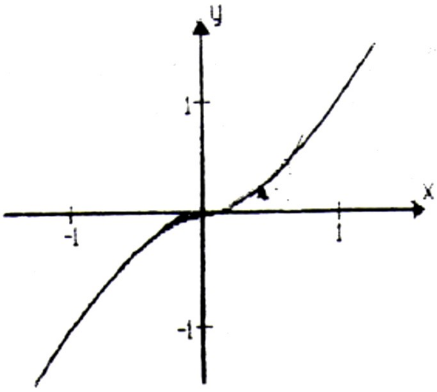
1) Sprawdzić, że krzywe $x^p - y^q = 0$ ($p, q \geq 0$ całkowite, względnie pierwsze) mają osobliwości wyłącznie takie, jak na rysunkach 1, 4, 5.

2) Niech $f_0(x, y)$ będzie formą jednorodną, będącą sumą jednomianów minimalnego stopnia występujących w wielomianie $f(x, y)$.
Sprawdzić, że jeśli $(0,0)$ jest punktem izolowanym krzywej $f_0(x, y) = 0$, to jest także punktem izolowanym krzywej $f(x, y) = 0$.

3) Stosując algorytm dzielenia z resztą udowodnić **lemat o eliminacji:** jeżeli wielomiany $f(x, y)$, $g(x, y)$ są dodatnich stopni względem zmiennej y i nie mają podzielnika stopnia > 0 względem tej zmiennej, to zachodzi tożsamość $R(x) = a(x, y)f(x, y) + b(x, y)g(x, y)$, gdzie $a(x, y)$, $b(x, y)$, $R(x)$ są wielomianami, oraz $R(x) \neq 0$.

4) Krzywa $f(x, y) = 0$ jest nierozkładalna, jeśli wielomian $f(x, y)$ jest nierozkładalny (nie jest iloczynem wielomianów niższych stopni). Dowieść, że krzywa nierozkładalna ma tylko skończoną liczbę punktów osobliwych.

5) Zakładamy, że krzywa nierozkładalna $f(x, y) = 0$ ma punkt regularny. Udowodnić, że każdy wielomian zerujący się na zbiorze jej punktów Z_f jest podzielny przez f.



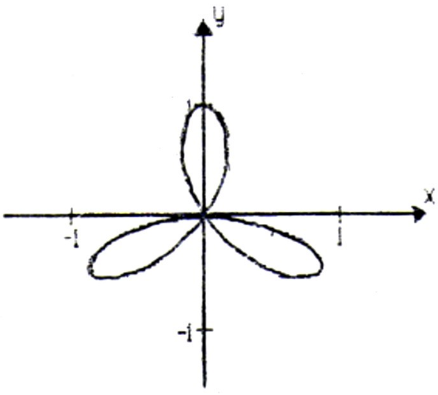
Rys. 5. $y^3 - x^5 = 0$

2. Szeregi Puiseux

W algebrze wielomiany (jednej zmiennej x) definiujemy jako wyrażenia postaci $a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ o współczynnikach liczbowych $a_0, \ldots, a_m$. Tak zdefiniowane wielomiany dodajemy i mnożymy według znanych reguł, tworzą one pierścień oznaczany $\mathbf{R}[x]$ (jeśli współczynniki brane są z ciała liczb rzeczywistych). Szeregi formalne definiujemy podobnie, jako wyrażenia postaci:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

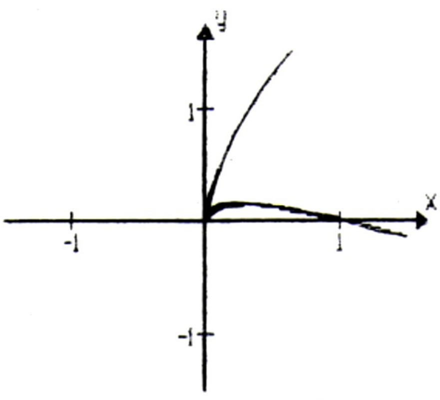
Wielomiany utożsamiamy z szeregami o prawie wszystkich (wszystkich z wyjątkiem skończonej liczby) współczynnikach równych zeru. Dodawanie i mnożenie szeregów wykonujemy jak dla wielomianów, np. $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^n + \ldots) = 1$. Szeregi formalne tworzą pierścień oznaczany $\mathbf{R}[[x]]$, pierścień wielomianów jest jego podpierścieniem. Rachunki na szeregach (obok działań arytmetycznych można też zdefiniować różniczkowanie „wyraz po wyrazie") nie wymagają pojęcia zbieżności, jednak gdy chcemy na miejsce zmiennej x wstawić w szeregu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ liczby, musimy w znany sposób wyróżnić klasę szeregów zbieżnych. Szeregi potęgowe pozwalają rozwiązywać pewne równania postaci $f(x, y) = 0$ (por. ćwiczenie 1 w tym rozdziale). Przykłady równań w rodzaju $y^2 - x^3 = 0$ (o rozwiązaniu $y = x^{\frac{3}{2}}$) pokazują, że aby rozwiązywać równania wielomianowe, celowe jest rozszerzenie pojęcia szeregu potęgowego przez wprowadzenie potęg ułamkowych.



Rys. 6. $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$

Definicja. Niech p będzie liczbą całkowitą, dodatnią. Wyrażenie postaci $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^{\frac{n}{p}} = a_0 + a_1x^{\frac{1}{p}} + \ldots + a_nx^{\frac{n}{p}} + \ldots$ nazywamy *szeregiem Puiseux*.

Przyjmujemy zwykłe reguły dodawania i mnożenia szeregów Puiseux oraz działania na „jednomianach" postaci $ax^{\frac{n}{p}}$. Jeżeli w podanej definicji liczby p nie można zastąpić przez mniejszą, tzn. gdy największą liczbą dzielącą wszystkie elementy zbioru $\{p\} \cup \{n \in \mathbf{N} : a_n \neq 0\}$ jest 1, to mówimy, że szereg Puiseux ma indeks $p-1$. Szeregi Puiseux o indeksie zero to zwykłe szeregi potęgowe. Oznaczmy przez $y(x)$ szereg występujący w podanej definicji, zatem $y(x) = Y\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$, gdzie $Y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$. Szereg Puiseux $y(x)$ jest zbieżny, gdy szereg $Y(t)$ jest zbieżny (ma dodatni promień zbieżności). Szeregi Puiseux tworzą pierścień oznaczany $\mathbf{R}[[x]]^*$. By rozwiązywać dowolne równania, trzeba dopuścić szeregi Puiseux o współczynnikach zespolonych, tworzące pierścień oznaczany $\mathbf{C}[[x]]^*$.



Rys. 7. $x^2 - x^3 - 4x^2y - 2xy^2 + y^4 = 0$

Rozważmy teraz krzywą $f(x,y)=0$ przechodzącą przez początek układu $(0,0)\in\mathbf{R}^2$ i nie zawierającą prostej $x=0$, zatem $f(0,y)=cy^q+$ wyrazy stopnia $\geq q$ ($c\neq 0$, q – liczba całkowita dodatnia). Mówimy wtedy, że wielomian $f(x,y)$ jest *y-dogodny* (rzędu q). Założenie o dogodności nie jest zbyt restryktywne: jeżeli $f(0,0)=0$ i $f(x,y)$ nie jest jednomianem, to $f(x,y)=x^p\tilde{f}(x,y)$, przy czym wielomian $\tilde{f}(x,y)$ jest y-dogodny. Gdy pytamy o rozwiązania równania $f(x,y)=0$ względem zmiennej y, naturalne jest przyjęcie założenia o y-dogodności.

Twierdzenie Newtona–Puiseux. Jeżeli wielomian $f(x,y)$ jest y-dogodny rzędu q, to równanie $f(x,y)=0$ ma w pierścieniu $\mathbf{C}[[x]]^*$ dokładnie q rozwiązań spełniających warunek $y(0)=0$. Wszystkie rozwiązania są zbieżne.

Zastosowaliśmy naturalne oznaczenia: jeżeli $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^{\frac{n}{p}}$, to $y(0)=a_0$. Rozwiązania rozważanego równania są liczone z krotnościami, przy czym krotnością rozwiązania $y(x)$ nazywamy najmniejszą liczbę m taką, że $\partial^m f/\partial y^m(x,y(x))\neq 0$ w $\mathbf{C}[[x]]^*$.

Istnieje kilka dowodów twierdzenia Newtona–Puiseux, z którymi Czytelnik może się zapoznać studiując literaturę cytowaną w końcu tego artykułu. Problemem efektywnego wyznaczania rozwiązań równania $f(x,y)=0$ zajmiemy się w następnym paragrafie. Teraz przedstawimy twierdzenie, które można wyprowadzić z twierdzenia Newtona–Puiseux. W tym celu definiujemy gałąź jako podzbiór płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ homeomorficzny z przedziałem otwartym prostej $\mathbf{R}$. Każdy homeomorfizm przedziału i gałęzi nazywamy parametryzacją gałęzi; parametryzacja gałęzi G jest więc określona przez podanie pary funkcji ciągłych φ,ψ w przedziale otwartym $I\subset\mathbf{R}$ takich, że odwzorowanie $t\to(\varphi(t),\psi(t))$ jest homeomorfizmem I na G. Przykładem gałęzi jest zbiór przedstawiony na rysunku 1 – parametryzacja dana jest wzorami $x=t^3$, $y=t^2$ dla $t\in\mathbf{R}$. Możemy teraz wypowiedzieć zapowiedziane twierdzenie:

Twierdzenie o opisie lokalnym zbioru algebraicznego w $\mathbf{R}^2$. Niech $Z\subsetneq\mathbf{R}^2$ będzie zbiorem algebraicznym i niech $P\in Z$ będzie punktem skupienia zbioru Z. Wówczas część zbioru Z leżąca w pewnym (dowolnie małym) otoczeniu punktu P jest sumą skończonej liczby gałęzi przecinających się parami wyłącznie w punkcie P. Każda gałąź ma parametryzację analityczną.

Gdy stawiamy sobie zadanie naszkicowania zbioru algebraicznego w pobliżu danego punktu P, musimy określić parametryzacje gałęzi przechodzących przez P. Można to zrobić korzystając z twierdzenia Newtona–Puiseux. Istotnie, załóżmy, że zbiór Z ma równanie $f(x,y)=0$ i niech $P=(0,0)$. Wówczas gałęzie występujące w twierdzeniu o opisie lokalnym są ściśle związane z rozwiązaniami Puiseux równania $f(x,y)=0$. Jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^{\frac{n}{p}}$ jest rzeczywistym rozwiązaniem (szeregiem o współczynnikach rzeczywistych) rozważanego równania o indeksie $p-1$, to równania $x=t^p$, $y=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$ określają parametryzację pewnej gałęzi zbioru Z w otoczeniu P.

Ćwiczenia:

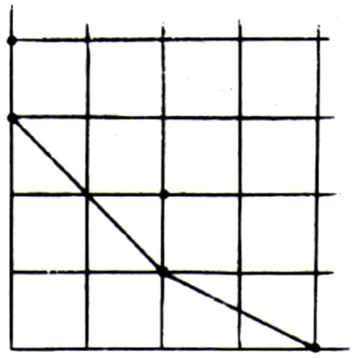
1) (wersja algebraiczna twierdzenia o funkcji uwikłanej) Jeżeli wielomian $f(x,y)$ spełnia warunki $f(0,0)=0$, $f_y(0,0)\neq 0$, to istnieje dokładnie jeden szereg formalny $y(x)$ taki, że $f(x,y(x))=0$, $y(0)=0$ (dowodzi się, że szereg ten jest zbieżny).

2) Niech $f(x,y)$ będzie niezerowym wielomianem i niech $y(x)$ będzie szeregiem formalnym takim, że $f(x,y(x))=0$. Dowieść, że $y(x)$ jest zbieżny. (Twierdzenie to nie przenosi się na równania różniczkowe: równanie $x^2y'=y-x^2$ ma jedyne rozwiązanie formalne $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n!x^{n+1}$.)

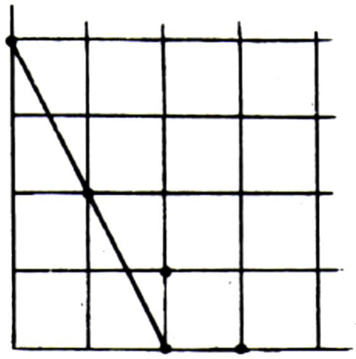
3) Jeżeli liczba q z twierdzenia Newtona–Puiseux jest nieparzysta, to równanie $f(x,y)=0$ ma rozwiązanie w $\mathbf{R}[[x]]^*$.

4) Cyklem wyznaczonym przez szereg Puiseux $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^{\frac{n}{p}}$ o indeksie $p-1$ nazywamy zbiór wszystkich szeregów postaci $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\varepsilon^n x^{\frac{n}{p}}$, gdzie ε jest p-tym pierwiastkiem z jedynki. Sprawdzić, że: a) cykl składa się z p szeregów, b) wszystkie elementy cyklu wyznaczonego przez rozwiązanie równania $f(x,y)=0$ są również rozwiązaniami tego równania.

3. Diagram Newtona



Rys. 8. $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3$



Rys. 9. $x^2-x^3-4x^2y-2xy^2+y^4$

Przedstawiamy teraz metodę wyznaczania szeregów Puiseux będących rozwiązaniami równania $f(x,y)=0$. Użyteczne jest następujące pojęcie: *nośnikiem wielomianu* $f(x,y)=\sum c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ nazywamy zbiór par (α,β) liczb całkowitych, dla których $c_{\alpha\beta}\neq 0$.

Definicja. *Diagramem Newtona* niezerowego wielomianu nazywamy najmniejszy zbiór wypukły płaszczyzny $\alpha\beta$ zawierający nośnik tego wielomianu.

Wielomian $f(x,y)$ będziemy nazywali *dogodnym*, gdy jest on dogodny ze względu na każdą ze zmiennych x,y. Diagram Newtona dogodnego wielomianu nie zawiera punktu $(0,0)$ i przecina obie osie $\alpha=0$ i $\beta=0$. W dalszym ciągu specjalne znaczenie będzie miała część diagramu Newtona.

Definicja. *Łamaną Newtona* wielomianu dogodnego nazywamy część brzegu jego diagramu Newtona złożoną z odcinków oddzielających diagram od początku układu.

Rysunki 8 i 9 przedstawiają łamane Newtona wielomianów związanych z krzywymi z rysunków 6 i 7.

Oto „metoda linijki Newtona" wyznaczania łamanej Newtona. Punkty nośnika danego wielomianu przedstawiamy sobie jako gwoździe wbite w deskę. Jeżeli (α,β) jest wierzchołkiem łamanej, to aby znaleźć wierzchołek następny, posługujemy się linijką będącą półprostą zaczepioną w punkcie (α,β) i skierowaną jak ujemna półoś prostej $\alpha=0$. Linijkę obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż do momentu, gdy zatrzyma się na gwoździu (gwoździach). Na obróconej linijce znajdujemy gwóźdź (α',β') najbardziej oddalony od punktu zaczepienia linijki – jest to szukany wierzchołek. Procedurę zaczynamy od wierzchołka leżącego na osi pionowej.

Gdy S jest odcinkiem łamanej Newtona wielomianu dogodnego $f(x,y)=$ $=\sum c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$, to symbolem $f_S(x,y)$ oznaczamy sumę jednomianów $c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$, $(\alpha,\beta)\in S$. Wielomian $f_S(x,y)$ nazywamy częścią główną (odpowiadającą odcinkowi S) wielomianu $f(x,y)$. Równanie $f_S(x,y)=0$ łatwo jest rozwiązać: jeżeli $n\alpha+m\beta=v$ (m, n, v – całkowite, dodatnie; m, n względnie pierwsze) jest równaniem prostej położonej na odcinku S, to $f_S(x,tx^{\frac{m}{n}})=\tilde{f}_S(t)x^{\frac{v}{n}}$, gdzie $\tilde{f}_S(t)$ jest wielomianem jednej zmiennej t. Rozwiązaniami równania $f_S(x,y)=0$ są „jednomiany" $cx^{\frac{m}{n}}$, gdzie c – niezerowy pierwiastek wielomianu $\tilde{f}_S(t)$, ponadto krotność rozwiązania $cx^{\frac{m}{n}}$ równania $f_S(x,y)=0$ jest równa krotności c jako pierwiastka wielomianu $\tilde{f}_S(t)$. Równanie $f_S(x,y)=0$ może mieć także rozwiązanie $y=0$, które w dalszym ciągu nie będzie nas interesowało.

Dla każdego szeregu Puiseux $y(x)\neq 0$ symbolem $\mathrm{in}\,y(x)$ oznaczamy „jednomian początkowy" szeregu $y(x)$ – jeśli $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{\frac{n}{p}}$, to $\mathrm{in}\,y(x)=a_{n_0}x^{\frac{n_0}{p}}$, gdzie $n_0=\min\{n: a_n\neq 0\}$.

Twierdzenie Newtona. Jeżeli $f(x,y)$ jest wielomianem dogodnym, to
a) jeżeli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania $f(x,y)=0$, to jego jednomian początkowy $\mathrm{in}\,y(x)$ jest rozwiązaniem równania $f_S(x,y)=0$ dla pewnego odcinka S łamanej Newtona wielomianu $f(x,y)$.
b) Niech S będzie odcinkiem łamanej Newtona wielomianu $f(x,y)$ i niech $y_0(x)$ będzie rozwiązaniem równania $f_S(x,y)=0$ o krotności d. Wtedy równanie $f(x,y)=0$ ma d rozwiązań $y(x)$ (liczonych z krotnościami) spełniających warunek $\mathrm{in}\,y(x)=y_0(x)$.

Oczywiście, w powyższym twierdzeniu mowa jest o rozwiązaniach z pierścienia $\mathbf{C}[[x]]^*$. Część a) twierdzenia jest łatwa do sprawdzenia, pewne wskazówki, jak dowieść b) są podane w ćwiczeniach.

Twierdzenie Newtona dostarcza efektywnej metody wyznaczania rozwiązań, dla ilustracji rozważmy dwa przykłady.

Przykład 1. Łamana Newtona wielomianu $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$ składa się z dwóch odcinków (por. rys. 8). Odpowiadają tym odcinkom części główne: $-y^3 + 3x^2y$, $3x^2y + x^4$, które mają rozwiązania $y = \pm\sqrt{3}x$ oraz $y = -\frac{1}{3}x^2$. Z twierdzenia Newtona wynika, że równanie $f(x,y) = 0$ ma trzy rozwiązania: $y_{1,2} = \pm\sqrt{3}x + \ldots$ oraz $y_3 = -\frac{1}{3}x^2 + \ldots$ Aby uzyskać dokładniejszą informację np. o rozwiązaniu $y_1(x)$, podstawmy $y = \sqrt{3}x + xY$ w równaniu $f(x,y) = 0$. Po podzieleniu równania $f(x, \sqrt{3}x + xY) = 0$ przez x^3 otrzymujemy równanie $F(x,Y) = 0$ spełniające warunki twierdzenia o funkcji uwikłanej (ćwicz. 1 do rozdziału 2). Stosując to twierdzenie stwierdzamy, że równanie $F(x,Y) = 0$ ma rozwiązanie $Y(x) \in \mathbf{R}[[x]]$, $Y(0) = 0$, a więc także $y_1(x) = \sqrt{3}x + xY(x) \in \mathbf{R}[[x]]$. Podobnie można sprawdzić, że pozostałe dwa rozwiązania są szeregami „całkowitymi" o współczynnikach rzeczywistych. Kolejne wyrazy tych szeregów można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych. Każde z rozwiązań określa gałąź krzywej $f(x,y) = 0$ przechodzącą przez $(0,0)$. Przez ten punkt przechodzą więc trzy gałęzie, każda jest wykresem funkcji analitycznej.

Przykład 2. Łamana Newtona wielomianu $f(x,y) = x^2 - x^3 - 4x^2y - 2xy^2 + y^4$ składa się z jednego odcinka (por. rys. 9) wyznaczającego część główną $y^4 - 2xy^2 + x^2 = (y^2 - x)^2$, a więc na podstawie twierdzenia Newtona równanie $f(x,y) = 0$ ma cztery rozwiązania: dwa postaci $x^{\frac{1}{2}} + \ldots$ oraz dwa postaci $-x^{\frac{1}{2}} + \ldots$ Wyznaczmy rozwiązanie zaczynające się od wyrazu $x^{\frac{1}{2}}$, w tym celu podstawmy $x = X^2$, $y = X(1+Y)$. Otrzymujemy $f(X^2, X(1+Y)) =$ $= X^4F(X,Y)$, gdzie $F(X,Y) = 4Y^2 + 4Y^3 + Y^4 - 4X - 4XY - X^2$. Łamana Newtona wielomianu $F(X,Y)$ składa się z jednego odcinka łączącego punkty $(1,0)$ oraz $(0,2)$, część główna $4Y^2 - 4X = 0$ ma rozwiązania $Y = \pm X^{\frac{1}{2}}$. Łatwo sprawdzić, że $F(X, \pm X^{\frac{1}{2}}) = 0$, a więc równanie $f(x,y) = 0$ ma rozwiązania $X(1 \pm X^{\frac{1}{2}})$, tzn. $x^{\frac{1}{2}} \pm x^{\frac{3}{4}}$ oraz $-x^{\frac{1}{2}} \pm ix^{\frac{3}{4}}$, gdzie $i^2 = -1$. Przez punkt $(0,0)$ przechodzi jedna gałąź krzywej o parametryzacji $x = t^4$, $y = t^2 + t^3$. Gdy $t \geq 0$, otrzymujemy „górny łuk" $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}}$, gdy $t \leq 0$ „dolny łuk" $y = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{4}}$ (por. rys. 7).

Sytuacja taka jak w przykładzie 1 godna jest odnotowania:

Uzupełnienie do twierdzenia Newtona. Jeżeli $y_0(x)$ jest pojedynczym rozwiązaniem równania $f_S(x,y) = 0$, to jedyne rozwiązanie $y(x)$ równania $f(x,y) = 0$ spełniające warunek $in\,y(x) = y_0(x)$ ma indeks równy indeksowi $y_0(x)$; jeżeli $y_0(x)$ jest rzeczywiste, to i $y(x)$ jest rzeczywiste. Czytelnika zainteresowanego rysowaniem krzywych algebraicznych odsyłamy do książki H. Hiltona *Plane Algebraic Curves* (Oxford 1932). Znakomitym wstępem do teorii krzywych i do teorii osobliwości jest dzieło E. Brieskorna i H. Knörrera *Ebene Algebraische Kurven* (Basel 1981 – istnieje przekład angielski). Wiele konkretnych przykładów i praktyczne wskazówki, jak wyznaczać asymptoty krzywych, można znaleźć w *Zbiorze zadań z matematyki wyższej* N. Giuntera i R. Kuźmina (Warszawa 1957 – istnieje oryginał rosyjski). Do dawnej tradycji wykładania metody Newtona nawiązał Dieudonné w swoim *Calcul infinitésimal*. Czytelnik, który chciałby przestudiować coś niebanalnego i związanego z geometrią algebraiczną, a który chwilowo nie ma nastroju do czytania o teorii kohomologii, może sięgnąć po wykłady S. S. Abhyankara *Expansion Techniques in Algebraic Geometry* (Tata Institute of Fundamental Research 1977).

Ćwiczenia:

1) Naszkicować w pobliżu punktu $(0,0)$ krzywe:
a) $y^5 + x^4 - xy^2 = 0$, b) $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$, c) $x^5 + y^5 - xy^2 = 0$.

2) Przyjmujemy oznaczenia takie, jak w tekście poprzedzającym wypowiedź twierdzenia Newtona. Niech $y_0(x) = cx^{\frac{m}{n}}$ będzie d-krotnym rozwiązaniem równania $f_S(x,y) = 0$. Sprawdzić, że $f(X^n, cX^m + X^mY) = X^vF(X,Y)$, przy czym wielomian $F(X,Y)$ jest Y-dogodny rzędu d. Jest zawsze: $d \leq q$ (założyliśmy, że $f(x,y)$ jest y-dogodny rzędu q). Kiedy $d = q$?

3) Załóżmy, że wielomian spełnia warunek $f(0,0) = 0$. Sprawdzić, że dla „dostatecznie ogólnych" a, b, c, d wielomian $F(X,Y) = f(aX + bY, cX + dY)$ ma łamaną Newtona złożoną z jednego odcinka.

4) Wyprowadzić z twierdzenia Newtona twierdzenie Newtona–Puiseux.

4. Uwagi historyczne

Isaak Newton (1643–1727) podał metodę diagramu w listach pisanych do Oldenburga, sekretarza Royal Society, w 1676 roku. Newton rozważał wyłącznie rozwiązania rzeczywiste i objaśnił swoją metodę na przykładach (por. ćwiczenie 1 do tego rozdziału).

Victor Puiseux (1820–1883), matematyk i astronom francuski w rozprawie *Recherches sur les fonctions algébriques* (1850) zajmował się rozwinięciami funkcji algebraicznych w szeregi nazwane jego imieniem. W rozprawie tej podał uzasadnienie metody Newtona, posługując się stworzoną przez Cauchy'ego teorią funkcji holomorficznych.

Krzywymi algebraicznymi zajmowano się już w XVIII wieku; termin „punkt osobliwy" wprowadził matematyk francuski Gua de Malves (1712–1785) w 1740 roku. Przypuszczał on, że krzywa algebraiczna może mieć w punktach osobliwych jedynie „ostrza pierwszego rodzaju" – jak na rysunku 1. Jego przypuszczenie obalił Leonhard Euler (1707–1783) podając przykład „ostrza drugiego rodzaju" (rys. 7). Jak się zdaje, pomyłka Gua de Malva ma źródło w fakcie, że prawie wszystkie krzywe (w sensie łatwym do sprecyzowania) o danej łamanej Newtona nie mają ostrzy drugiego rodzaju. Wiele wiadomości historycznych dotyczących metody Newtona podał N. Czebotariew w artykule *Wielokąt Newtona i jego rola w rozwoju matematyki* (Dzieła zebrane, tom 3, 1950 – w języku rosyjskim). W ostatnim trzydziestoleciu intensywnie rozwija się Teoria Osobliwości; zarówno diagram Newtona i jego n-wymiarowe uogólnienia, jak i teoria osobliwości krzywych zajmują w niej poczesne miejsce.

Ćwiczenia:

1) Newton objaśnił swoją metodę na przykładzie $y^6 - 5xy^5 + a^{-1}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, gdzie $a \neq 0$ oraz b są parametrami. Wyjaśnić, ile rozwiązań rzeczywistych ma powyższe równanie w zależności od parametrów a, b.

2) Przetłumaczyć wiersz A.G. Kaestnera (1719–1800), niemieckiego matematyka–poety:

DE PARALLELOGRAMO NEWTONIANO

Paucula iam series monstrat primordia nascens,
Lege sua partes haec sine fine regunt:
Sic a vita hominis, quam bis sex lustra coercent,
Aqua tenet formam non numeranda suam.