

Cienie stochastyczne

Andrzej DĄBROWSKI, Wrocław

Rozważmy trzy elementarne zadania z geometrii.

Zadanie 1. Dany jest wektor o długości l w przestrzeni. Obliczyć długość rzutu tego wektora na ustaloną oś.

Zadanie 2. Dany jest wektor o długości l w przestrzeni. Obliczyć długość rzutu tego wektora na ustaloną płaszczyznę.

Zadanie 3. Dany jest wektor o długości l na płaszczyźnie. Obliczyć długość rzutu tego wektora na ustaloną oś.

Wszystkie te zadania mają wspólne rozwiązanie: długość rzutu wektora o długości l jest równa $l \cos \theta$, gdzie θ jest kątem między wektorem a płaszczyzną (osią) rzutu.

Sytuacja opisana w zadaniach 1–3 jest statyczna: wektory są jakby zatrzymane w ruchu, a problemy przedstawione w zadaniach można by sformułować inaczej – „...dla każdego położenia wektora obliczyć jego rzut na ...”.

Puśćmy w takim razie klatki naszego filmu: niech wektor w zadaniach 1 i 2 porusza się w przestrzeni, w zadaniu 3 niech porusza się po płaszczyźnie. Bez straty ogólności (wektor jest swobodny) możemy przyjąć, że wektor zaczepiony jest w początku układu współrzędnych, a jego koniec porusza się po sferze o promieniu l (zadania 1 i 2) lub po okręgu o promieniu l (zadanie 3). W zadaniach 1 i 3 osią rzutu niech będzie oś x , w zadaniu 2 płaszczyzną rzutu niech będzie płaszczyzna xy .

Teraź należałoby ustalić zasadę ruchu końca wektora. Załóżmy, że wektor porusza się losowo i jednostajnie. Takie założenia przyjmuje się zazwyczaj, gdy nic nie wiemy o ruchu wektora (bo jeśli nie jest jednostajnie, to które położenia są wyróżnione i jak?).

Rozwiążmy teraz zadania 1–3 w nowej sytuacji. Należy zważyć jednak, że gdy wektor jest losowy, to również długość jego rzutu jest losowa. Pytania powinny też być inaczej sformułowane:

- Jaki jest rozkład długości rzutu wektora?
- Obliczyć średnią długość rzutu wektora.

Pytanie (a) jest interesujące, gdyż często sądzi się, że skoro wektor jest losowy i jego kierunek jest wybrany jednostajnie, to i długość rzutu jest jednostajna.

Oznaczmy przez S_i zmienną losową oznaczającą długość rzutu wektora losowego, a przez F_i dystrybucję S_i w zadaniu i ($i = 1, 2, 3$). Od razu zauważmy, że ponieważ $0 \leq S_i \leq l$, to $F_i(u) = 0$ dla $u \leq 0$ i $F_i(u) = 1$ dla $u \geq l$. Ograniczmy się tylko do przypadku $0 < u < l$.

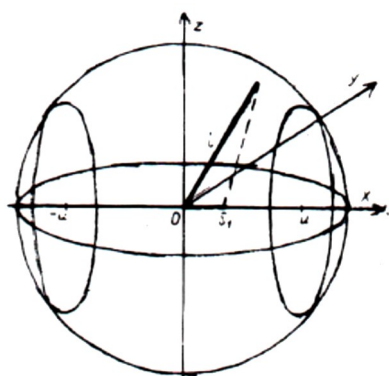
Zadanie 1 (patrz rys. 1).

Długość rzutu na oś x jest krótsza niż u wtedy, gdy jego koniec porusza się po tej części sfery, która jest odcięta „czapkami”, utworzonymi przez płaszczyzny prostopadłe do osi x w punktach $(-u, 0, 0)$ i $(u, 0, 0)$. Stąd $F_1(u) = \alpha 2u$. Ale $F_1(l) = 1$, skąd $F_1(u) = \frac{u}{l}$, a gęstość będzie stała, równa $f_1(u) = \frac{1}{l}$.

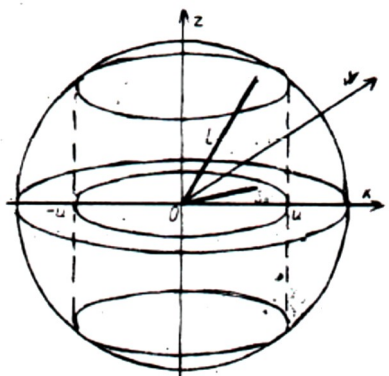
Oznacza to, że rozkład rzutu jest jednostajny na $(0, 1)$. Wartość oczekiwana S_1 jest równa $ES_1 = \frac{l}{2}$.

Zadanie 2 (patrz rys. 2).

Zdarzenie, że $S_2 < u$ jest zrealizowane wtedy, gdy końce wektora leżą na dwóch symetrycznych „czapkach”, odciętych przez płaszczyzny prostopadłe do osi z . Część wspólna każdej z tych płaszczyzn i sfery jest okręgiem o promieniu u . Odległość między tymi płaszczyznami wynosi $2\sqrt{l^2 - u^2}$, skąd $F_2(u) = \alpha 2(l - \sqrt{l^2 - u^2})$. Ale $F_2(l) = 1$ i $F_2(u) = 1 - \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - u^2}$, a gęstość w przedziale $(0, 1)$ wynosi $f_2(u) = \frac{u}{l\sqrt{l^2 - u^2}}$. Wartość oczekiwana S_2 wynosi $ES_2 = \frac{\pi}{4}l$.



Rys. 1



Rys. 2

Losowo i jednostajnie to znaczy, że każde położenie wektora jest jednakowo prawdopodobne. Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo znalezienia końca wektora w podzbiorze sfery jest proporcjonalne do pola tego podzbioru.

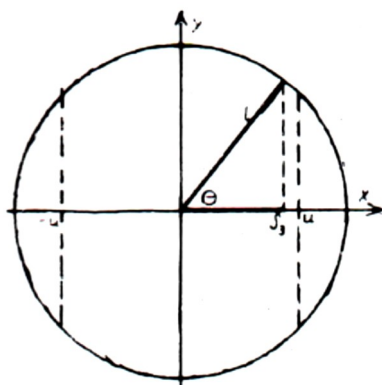
Dystrybuanta zmiennej losowej X :
 $F_X(u) = P\{X < u\}$.

Pole powierzchni części sfery zawartej między dwiema równoległymi płaszczyznami jest proporcjonalne do odległości między płaszczyznami.

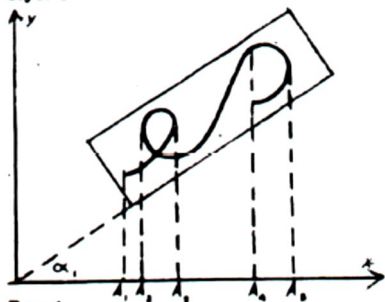
Gęstość jest pochodną dystrybuanty.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X o gęstości f wyraża się wzorem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du.$$



Rys. 3



Rys. 4

To znaczy wartości $1 - F_1(0, 9l)$.

H. Steinhaus (1930), praca opublikowana w czasopiśmie *Berichten der Mathem.-Phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, Leipzig, nr 82, str. 120-130.

Na rysunku 4 proste, prostopadłe do osi x , zawarte między A_1 i A_2 oraz między A_3 i A_4 przecinają krzywą w jednym punkcie, proste między A_4 i A_5 przecinają w dwóch punktach, a proste między A_2 i A_3 przecinają ją w trzech punktach.

Dla rysunku 4

$$S = A_1A_2 + 3A_2A_3 + A_3A_4 + 2A_4A_5.$$

Szkic dowodu.

a) Gdy krzywa jest łamana, składająca się z k odcinków o długości $l_1, l_2, \dots, l_k$, to $S = \sum_{i=1}^k S_i$, gdzie S_i jest rzutem i -tego odcinka łamanej (tu stosujemy umowę o krotnościach). Wtedy $ES = \sum_{i=1}^k ES_i = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^k l_i = \frac{2l}{\pi}$.

b) Gdy krzywa jest granicą ciągu łamanych o długości l_n , to S jest granicą ciągu rzutów S_n i $ES = \lim ES_n = \lim \frac{2l_n}{\pi} = \frac{2l}{\pi}$. Sprecyzowanie wymaga tu problem zbieżności.

Metoda momentów - metoda uzyskiwania oszacowań nieznanymi parametrami, polegająca na zastąpieniu momentów we wzorze, włączając momenty rozkładu (średnia, wariancja itp.) z parametrami, przez momenty z próby.

Oblicza tą metodą obwód okręgu.

Zadanie 3 (patrz rys. 3).

Jednostajność w tym przypadku oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że koniec wektora leży na podzbiorze okręgu, jest proporcjonalne do długości (miary) tego zbioru.

Stąd $F_3(u) = \alpha(2\pi l - 4l \arccos \frac{u}{l})$ i z tego, że $F_3(l) = 1$ wynika, że $F_3(u) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{u}{l}$. Gęstość S_3 ma postać: $f_3(u) = \frac{2}{\pi \sqrt{l^2 - u^2}}$, a wartość oczekiwana wynosi $ES_3 = \frac{2}{\pi l}$.

Porównajmy wyniki otrzymane w zadaniach 1-3.

1° Tylko w przypadku, gdy wektor losowy porusza się w przestrzeni i rzutujemy na ustaloną oś (zadanie 1), długość rzutu ma rozkład jednostajny. Fakt ten wiąże się z różnicą między wymiarami przestrzeni, w której porusza się wektor losowy, a wymiarem przestrzeni, na którą rzutujemy. W przypadku zadania 1 różnica ta wynosi 2, w pozostałych zadaniach jest ona równa 1. Można powiedzieć, że jednostajności rzutu sprzyja swoboda; gdy jej nie ma, to preferowane są długie rzuty.

2° Największą wartość oczekiwaną $\frac{\pi l}{4}$ ma rzut z przestrzeni na płaszczyznę (zadanie 2), następnie rzut z płaszczyzny na oś (zadanie 3) z wartością $\frac{2l}{\pi}$; najmniejsza wartość oczekiwana rzutu jest w przypadku jednostajnym i wynosi $\frac{l}{2}$.

Inny argument za preferowaniem długich rzutów można oprzeć na obserwacji, jak często przekroczona jest wartość odpowiadająca długiemu rzutowi, na przykład równemu $0,9l$. Wynoszą one $0,713$ w zadaniu 3, w zadaniu 2 - $0,564$ i $0,1$ w zadaniu 1.

Wydaje się, że przeniesienie klasycznego zadania geometrycznego na grunt rachunku prawdopodobieństwa jest tylko zabawą matematyczną. Można jednak posłużyć się metodami geometrii stochastycznej (bo tak nazywa się ten dział matematyki) do rozwiązania trudnego problemu mierzenia długości krzywej.

Dana jest krzywa płaska o długości l . Krzywą tę umieszczamy na kartoniku pod losowym i jednostajnym kątem do osi x .

Niech S oznacza długość rzutu krzywej na oś x obliczaną w następujący sposób:

- dzielimy krzywą prostymi, prostopadłymi do osi x w ten sposób, że wewnątrz każdej z tych części prosta, prostopadła do osi x , przecina krzywą w tej samej liczbie punktów. Proste przechodzące przez węzły pomijamy.
- S jest sumą długości odcinków, wyznaczonych na osi x przez podział z punktu a), liczonych z krotnościami równymi liczbie punktów przecięcia, charakterystycznej dla tej części krzywej.

Przy tych założeniach wartość oczekiwana $ES = \frac{2l}{\pi}$, co jest uogólnieniem wzoru z zadania 3 z odcinka o długości l na krzywą o długości l .

Wygenerujmy jednostajnie n kątów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Obliczmy w opisany wyżej sposób długości rzutów S_i krzywej na oś x pod kątem α_i . Wtedy średnia długość rzutu wynosi $r_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$. Z metody momentów uzyskamy wzór na

oszacowanie l_n rzeczywistej długości krzywej: $r_n = \frac{2l_n}{\pi}$, skąd $l_n = \frac{\pi r_n}{2}$.

Wiadomo również, że $\lim l_n = l$ według prawdopodobieństwa oraz $El_n = l$ dla każdego n (to znaczy, że dla każdego $\epsilon > 0$ ciąg $P\{|l_n - l| > \epsilon\}$ jest zbieżny do 0).

Opisaną wyżej metodę zastosowano przy obliczaniu długości organizmów, obserwowanych pod mikroskopem z ruchomym skalowanym stolikiem.

Podobnie można obliczyć długość l krzywej przestrzennej (na przykład długość systemu korzeniowego rośliny). Przeprowadzając analogiczne rachunki można wykazać, że gdy krzywą przestrzenną umieścimy w obszarze o objętości V i obszar ten przecię płaszczyzną o polu przekroju A , to oczekiwana liczba przecięć P krzywej z płaszczyzną wyniesie $EP = \frac{Al}{2V}$.

Niezależność zmiennych losowych X i Y o dystrybuantach F_X i F_Y oznacza, że $P\{X < u, Y < v\} = F_X(u)F_Y(v)$ dla każdego u i v .

Wynika to z ogólnego faktu: jeżeli zmienna losowa J ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$, zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie F oraz J i X są niezależne, to dystrybuanta G iloczynu JX ma postać $G(u) = \int_0^1 F(\frac{u}{t}) dt$.

Właściwie trzeba powiedzieć: rozkład jest skupiony w jednym punkcie l , to znaczy, że $P\{L = l\} = 1$.

$ES = \int_0^\infty ur(u) du = \int_0^\infty (\frac{x^2}{2})' r(u) du$
i dalej ze wzoru na całkowanie przez części i relacji $d(u) = -ur'(u)$.

Metodą momentów można uzyskać oszacowanie długości krzywej: $l_n = \frac{2VP_n}{A}$, gdzie P_n jest średnią liczbą przecięć krzywej, uzyskanych w n próbach.

Metodę tę stosowano w ten sposób, że system korzeniowy umieszczano w prostopadłościennie gleby o objętości V , samrażając lub wstrzykując utwardzacze, a następnie ścinając równoległe plasterki o polu A i dla każdego plasterka liczono, ile razy na powierzchni pokazały się ślady korzeni.

Dotąd rozpatrywaliśmy rzuty wektorów losowych o jednostajnie wybranym kierunku i stałej długości. Przypuśćmy, że również długość wektora jest losowa, wybrana według dystrybuanty D , niezależnie od wyboru kierunku.

Oznaczmy przez R dystrybuantę rzutu wektora losowego o długości L z przestrzeni na ustaloną oś (uogólnienie zadania 1).

Niech X będzie tak określonym wektorem losowym, X_0 będzie wektorem do niego równoległym o długości 1, S długością rzutu X na oś x , S_0 długością rzutu X_0 na oś x . Z podobieństwa trójkątów mamy, że $S = S_0 L$ i $R(u) = P\{S < u\} = P\{S_0 L < u\}$.

Wektor X_0 spełnia warunki zadania 1, a więc S_0 ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$. Z tego faktu wynika, że

$$R(u) = \int_0^1 D(\frac{u}{t}) dt.$$

Uzyskaliśmy w ten sposób związek między rozkładem długości wektora losowego a rozkładem długości jego rzutu. W zadaniu 1 długość wektora była stała i rozkład rzutu na oś był jednostajny. Ze wzoru całkowego podanego wyżej wynika, że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Tak więc, rzut wektora losowego z przestrzeni na oś jest jednostajny wtedy i tylko wtedy, gdy długość wektora jest stała.

Załóżmy teraz, że istnieje gęstość długości $d(u)$ oraz gęstość rzutu $r(u)$, a także jej pochodna $r'(u)$. Po dwukrotnym różniczkowaniu R otrzymamy wzór: $d(u) = -ur'(u)$. Wynikają z tego wzoru nieoczekiwane czasem wnioski:

- z rozkładu długości rzutu wektora losowego można jednoznacznie wyznaczyć rozkład jego długości;
- gdy istnieje wariancja długości rzutu, to wartość oczekiwana S jest połową wartości oczekiwanej L (tak było w szczególnym przypadku, gdy L była stała);
- gęstość rzutu jest funkcją nierosnącą (bo $d(u) \geq 0$), co powoduje, że rzuty długie są coraz mniej prawdopodobne (ich prawdopodobieństwa są funkcją niemalejącą długości rzutu).

Własność a) pozwala sprowadzać rozwiązania pewnych zagadnień trójwymiarowych do przypadku jednowymiarowego. W chemii rozpatruje się zagadnienie konfiguracji łańcuchów cząstek w przestrzeni. Zakłada się, że łańcuch jest łamaną, składającą się z niezależnych, prostoliniowych odcinków, o kącie losowym i jednostajnym między nimi. Interesuje nas wypadkowa tego układu. Po zrzutowaniu łamanej na oś otrzymamy analogiczne, ale o wiele prostsze, zadanie jednowymiarowe. Korzystając ze wzoru $d(u) = -ur'(u)$ natychmiast otrzymujemy rozwiązanie przestrzenne.

Przejsie od prostych zadań geometrycznych w ich ujęciu statycznym do ujęcia dynamicznego i stochastycznego pokazuje nam inny świat – świat geometrii stochastycznej. Wiąże ona klasyczną geometrię z zagadnieniami praktycznymi, z których przecież geometria wyrosła. Problemy geometrii stochastycznej mają swoje źródła w astronomii, fizyce atomowej, biologii, rozpoznawaniu obrazów, poszukiwaniu złóż geologicznych – wszędzie tam, gdzie oglądamy tylko fragmentaryczny fragment rzeczywistości, jakby kilka klatek pewnego filmu.