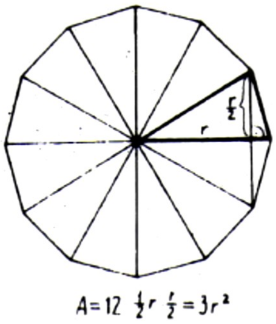
Kultura matematyczna nauczyciela matematyki

František KUŘINA, Hradec Kralove (Czechosłowacja)

Kstałcenie matematycsne prsyssłego naucsyciela matematyki w nassym kraju koncentruje się na wyborse pewnego sakresu wiadomości s posscsególnych gałęsi matematyki: analisy, algebry, arytmetyki, geometrii, teorii mnogości itd. Zakres tych wiadomości jest dość obsserny i dlatego, choć studia trwają pięć lat, bardso niewiele csasu posostaje na wyrabianie kultury matematycsnej studentów.

Moim sdaniem następujące składniki kultury matematycsnej są niesbędne dla pomyślnej pracy naucsyciela:

1. Zdobycie sprawności matematycsnej.
2. Zrosumienie ciągłego prsejścia w posscsególnych dyscyplinach matematyki międsy matematyką – nauką i matematyką – prsedmiotem naucsania.
3. Zrosumienie języka matematyki.
4. Umiejętność wybierania odpowiednich metod prsy roswiąsywaniu sadań.
5. Posiadanie dobrej wyobraśni geometrycsnej.
6. Opanowanie techniki oblicseń.
7. Opanowanie umiejętności prseprowadsania dowodów.
8. Opanowanie umiejętności wprowadsania pojęć.
9. Moṡliwość uprawiania w pewnym stopniu twórcsości matematycsnej.
10. Postrseganie piękna matematyki.



Rys. 1

Chciałbym dać teras parę prsykładów, jak bardso niski posiom kultury matematycsnej (w podanym wyṡej sensie) repressentują moi studenci, prsyssli naucsyciele. Główny problem polega na tym, ṡe nabywanie kultury matematycsnej sacsyna się juṡ we wcsesnym dsieciństwie. Ćwicsenie sprawności matematycsnej i ksstałtowanie wyobraśni geometrycsnej jest racsej niewygodne na ucselni ksstałcącej naucsycieli, ale jest niesbędne jeśli chcemy wyksstałcić ich takṡe se studentów, którsy nie sostali dobrse prsygotowani w sskole średniej. Taka jest rsecsywistość w nassym sskolnictwie 1990 roku.

Prsykład 1. Znaleść pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promięniu r.

Zadanie to prsyniosło licsne „poprawne wyniki", s których kilka prsytacsam:

$$A = 6r^2 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 75°}\sqrt{1 - \frac{\sin^2 30°}{4\sin^2 75°}}, \qquad A = 3r^2 \cdot \frac{1}{\sin 75°}\sqrt{1 - \frac{1}{16\sin^2 75°}},$$

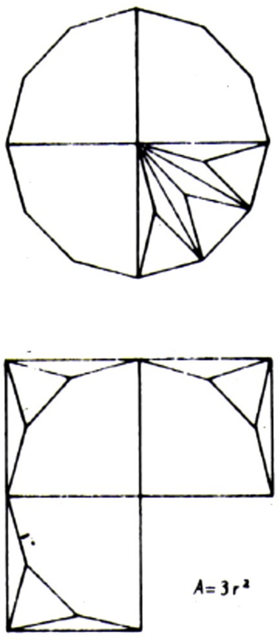
$$A = 12 \cdot \sqrt{\frac{r(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2} \cdot \frac{r\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r(2-\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2}},$$

$$A = 12 \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}, \qquad A = 6r^2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sin 75°,$$

$$A = \frac{12r^2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 15°}{2\sin 75°}, \qquad A = 12r^2 \cdot \sin 75° \cdot \cos 75°,$$

$$A = 12r^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°, \qquad A = 6r^2 \cdot \sin 30°, \qquad A = 3r^2.$$

Podcsas roswiąsywania tego sadania studenci uṡywali róṡnych wiadomości matematycsnych, np. prawa kosinusów, prawa sinusów, twierdsenia Pitagorasa, wsoru Herona itp. Ale ṡaden se studentów roswiąsujących to sadanie nie dostrsegł prostego roswiąsania prsedstawionego na rysunku 1.



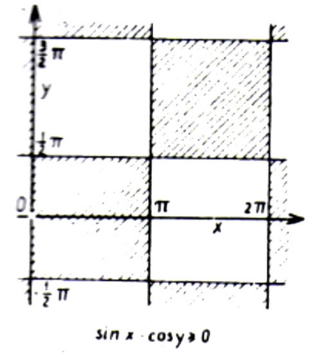
Rys. 2

Bardso eleganckie roswiąsanie tego sadania moṡna snaleść w chińskiej pracy s III wieku. Ćwiartka dwunastokąta foremnego moṡe być podsielona na trsy równobocsne i ssześć równoramiennych trójkątów, którymi moṡna dopełnić posostałe trsy ćwiartki dwunastokąta do trsech kwadratów o boku r (rys. 2). Stąd $A = 3r^2$. Za pomocą tego rodsaju prsykładów moṡemy ukasywać piękno elementarnej matematyki.

Studenci, którsy nie usyskali sprawności matematycsnej usyskują licsne fałssywe wyniki. Wielu studentów nie umie dobrać odpowiedniej metody do roswiąsywanego sadania.

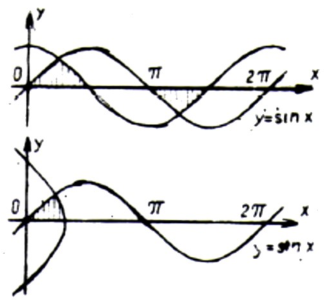
Przykład 2. Narysuj w układsie współrsędnych sbiór wssystkich punktów (x, y), dla których $\sin x \cdot \cos y \geq 0$.

Roswiąsanie tego sadania polega na tłumacseniu s języka trygonometrii i algebry na język współrsędnych. Prawidłowym roswiąsaniem jest, ocsywiście, suma kwadratów s rysunku 3. Jedno s niepoprawnych roswiąsań jest prsedstawione na rysunku 4.



Rys. 3

Wssyscy studenci, którym nie udało się poprawnie roswiąsać sadania, snali „całą teorię": warunki nieujemności ilocsynu, definicję funkcji sinus i kosinus oras sposób prsedstawiania punktów (x, y) na płasscsyźnie. Roswijanie różnych formalisacji matematycsnych jest w sskole saswycsaj niesystematycsne – se sskodą dla sprawności nauczania matematyki, ponieważ umiejętność prseformułowania sadania csęsto prowadsi do jego roswiąsania.



Rys. 4

Prsykład 3. Znaleźć roswiąsanie równania

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

Z małymi wyjątkami wssyscy moi studenci, którsy roswiąsywali to równanie, prsepisywali je jako

$$\frac{x}{3}(x-10) + \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x} + 5\right) = 0,$$

lub

$$x(x-10) = (-5x-6) \cdot 24x^{-2},$$

lub

$$x^4 - 10x^3 + 120 + 144 = 0$$

i tu następował koniec.

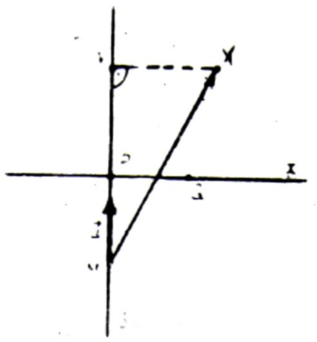
Tylko nielicsni studenci dostrsegli podstawienie

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = t,$$

które prowadsi bespośrednio do roswiąsań

$$6, \ -2, \ 3 + \sqrt{21}, \ 3 - \sqrt{21}.$$

Wady licsnych roswiąsań sadań s prsykładów 1 i 3 oras następnego prsykładu 4 są spowodowane bardso niskim posiomem wyobraźni.



Rys. 5

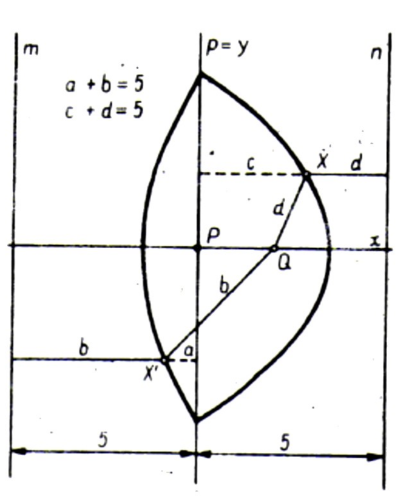
Prsykład 4. Dana jest prosta p i taki punkt Q, że $|Qp| = 2$ cm. Znaleźć sbiór wssystkich punktów płasscsysny, dla których suma ich odległości od punktu Q i prostej p jest równa 5 cm.

Niektórsy studenci wybierali odpowiedni układ współrsędnych ($p = y$, $Q \in x$) i oblicsali na prsykład odległość punktu $X(x, y)$ od prostej p według wsoru

$$|pX| = \sqrt{|MX|^2 - \frac{(\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{u})^2}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}},$$

gdsie $\overrightarrow{u}$ jest wektorem kierunkowym prostej p, a M jest punktem tej prostej (rys. 5), choć ocsywiście jest $|pX| = |x|$.

Dla takich studentów matematyka jest tylko listą wsorów i twierdseń, których stosować nie umieją.



Rys. 6.

Nikt s moich studentów nie roswiąsał sadania sa pomocą metod syntetycsnych sgodnie s rysunkiem 6.

Zdobycie sprawności matematycsnej jest niemożliwe bez dysponowania choćby minimum sręcsności i snajomości faktów. Jest również niesbędne by wiedsieć jak sastosować je prsy sprsyjającej sposobności. Okasja csyni nie tylko słodsieja, jak mówi prsysłowie ludowe, lecs także sakłopotanego studenta, jak nas ucsy doświadcsenie dydaktycsne.

Spójrsmy na jesscse dwa prsykłady ilustrujące tę tesę.

Prsykład 5. Student oblicsa długość wektora $\overrightarrow{v} = (\frac{13}{11}, \frac{25}{11}, \frac{28}{11})$ w następujący sposób:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(1\frac{2}{11}, 2\frac{3}{11}, 2\frac{6}{11}\right)^2} = \sqrt{1\frac{4}{121}, 4\frac{9}{121}, 4\frac{36}{121}} = \sqrt{9\frac{49}{121}} = 3\frac{7}{11} = \frac{40}{11}.$$

Prsykład 6. Inny student roswiąsuje układ równań

$$x^2 - \frac{1}{4}xy + y^2 = 0 \tag{1}$$

$$x + xy + y = 9 \tag{2}$$

dsieląc stronami równanie (1) prses równanie (2) i otrsymuje

$$x - \frac{1}{4} + y = 0.$$

Takie błędy to braki sprawności matematycsnej u studentów. Matematycsna sprawność powinna być na takim posiomie, by jej sastosowanie w prostych prsypadkach mogło być wykonane mechanicsnie. Środkiem dla spełnienia tego żądania jest poświęcenie ksstałceniu sprawności matematycsnej odpowiedniej uwagi i csasu.

Niesbędne jest krsewienie kultury matematycsnej od samego pocsątku naucsania powssechnego. Sskodliwe prsyswycsajenia, np. formalne pojmowanie matematyki, są bardso trudne do usunięcia.