Jak odpowiadano na pytanie: co to jest liczba?

Marek KORDOS, Warszawa

Leopold Kronecker (1823; 1891)

Podobno Leopold Kronecker powiedsiał, że licsby naturalne stworsył dobry Bóg, a reszta jest dsiełem csłowieka. Miało to, przez boskość licsb naturalnych, agitować za zasadnością programu sprowadzenia całej matematyki do arytmetyki licsb naturalnych.

W czasach narastającego niepokoju o podstawy matematyki wypowiedź Kroneckera miała jednak i inny sens. Można ją było zrozumieć i tak, że pytaniem, co to takiego te licsby naturalne, zajmować się nie należy.

Gottlob Frege (1848; 1925)

Alfred N. Whitehead (1861; 1947)

Bertrand Russell (1872; 1970)

John von Neumann (1903; 1957)

Ilekroć w dziejach pojawiał się postulat, by jakieś sprawy usunąć poza obręb ludzkiej ciekawości, tylekroć rzucano się na te sprawy z ogromnym zapałem. Tak stało się i tym razem. Prace Gottloba Fregego, Alfreda Whiteheada, Bertranda Russella i wreszcie Johna von Neumanna, po różnych, niezbyt udanych próbach wyposażyły nas w „boską" konstrukcję. Boską, bo nawet formalnie było to „coś z niczego".

Liczby naturalne ma to być ciąg

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

o jasnej budowie – następny jego wyraz powstaje przez ujęcie w klamry tego wszystkiego, co stoi przed nim. Operację tę można nazwać operacją brania następnika. Jeśli oznaczymy następnik dowolnej licsby naturalnej n przez n', to możemy podać indukcyjną definicję działań na licsbach naturalnych:

$$n + 0 = n, \qquad n + m' = (n + m)', \qquad n \cdot 0 = 0, \qquad n \cdot m' = n \cdot m + n,$$

gdzie 0 jest zwyczajową nazwą (nieprawdaż?) dla pierwszego elementu ciągu.

To, co jest dziełem człowieka, w szczególności inne licsby, też zostało sformalizowane.

Liczby całkowite – $\mathbf{Z}$ – otrzymujemy jako klasy abstrakcji w $\mathbf{N}^2$ relacji

$$(m, n) \simeq (k, l) \iff m + l = n + k$$

z działaniami

$$[m, n] + [k, l] = [m + k, n + l], \qquad [m, n] \cdot [k, l] = [m \cdot k + n \cdot l, m \cdot l + n \cdot k].$$

Liczby wymierne – $\mathbf{Q}$ – otrzymujemy podobnie z $\mathbf{Z}^2$ za pomocą relacji

$$[m, n] \approx [k, l] \iff m \cdot l = n \cdot k,$$

a działania określamy tak

$$[m, n] + [k, l] = [m \cdot l + n \cdot k, n \cdot l], \qquad [m, n] \cdot [k, l] = [m \cdot k, n \cdot l].$$

Augustin Cauchy (1789; 1857); ciąg Cauchyego, to (w tym przypadku) każdy ciąg (a_n) spełniający warunek $\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbf{Q}, \varepsilon > 0} \bigvee_{M \in \mathbf{N}} \bigwedge_{k, l \in \mathbf{N}} |a_{M+k} - a_{M+l}| < \varepsilon$.

Liczby rzeczywiste – $\mathbf{R}$ – to znów klasy abstrakcji, tym razem w $A \subset \mathbf{Q}^\omega$, gdzie A jest zbiorem ciągów Cauchyego, uzyskane za pomocą relacji

$$(v_n) \asymp (w_n) \iff \lim_{n \to \infty} (v_n - w_n) = 0$$

z sumowaniem i mnożeniem „po współrzędnych".

Liczby zespolone – $\mathbf{C}$ – to $\mathbf{R}^2$ z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{i} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c).$$

I tak dalej (choć wielu sądzi, że „dalej" kończy się na kwaternionach).

Giuseppe Peano (1858; 1932)

Jest to pełny triumf techniki matematycznej. Nie sposób jednak oprzeć się wrażeniu, że licsby musiały być „najpierw", wcześniej niż ta formalizacja, a formalizacja jest tylko uporządkowaniem, rygoryzacją (co oznacza nie tylko uściślenie, ale i usztywnienie) tego, co było już na tyle znane, że tej formalizacji mogło się poddać. Dowodem są choćby aksjomatyki, z najpopularniejszą Peany na czele.

A czy ta formalizacja to wyjaśnienie, czy zaciemnienie pojęcia licsby, pozostaje kwestią osobistego gustu.

Proponuję więc sastanowienie nad tym, jak w kulturse ludskiej, jak w nauce snalasły się licsby, tak starannie sformalisowane w pocsątkach kończącego się właśnie stulecia.

Licsby naturalne istotnie naleśy przypisać Bogu, a to se względu na fakt, śe nic nam nie wiadomo o ludsiach, którsy by nie snali licsb naturalnych.

Prsy badaniu tego, co było najdawniej, jedyną techniką, csy metodologią, jest antropologia strukturalna. Technika ta jest prsenìesieniem do nauki o społecsnościach funkcjonującej w biologii sasady Ernsta Haeckla, która, mówiąc ucsenie, orseka, śe filogenesa jest powtórseniem ontogenesy. Mówiąc bardsiej srosumiale – roswój osobnicsy, od sapłodnienia do usyskania postaci dojrsałej, odbija historię gatunku, do którego dany osobnik naleśy. W ten sposób, oglądając jakiś bardso pierwotny gatunek swiersęcia (np. jasscsurkę *Hatterię*) mośemy odtworsyć sobie wygląd i sachowanie prsodków jakiegoś bardsiej nowocsesnego swiersęcia (np. bociana), w którego roswoju sarodkowym występuje etap sblisony strukturalnie do tego pierwotnego swiersaka.

Stosując to do społecsności otrsymujemy wniosek, śe oglądając społecsności pierwotne (np. Papuasów) nabywamy wiedsę o tym, jacy byli, jak myśleli, jak sachowywali się nasi prsodkowie. Tak, mniej więcej, prsedstawia się to, co do metodologii nauk historycsnych wniósł prekursor antropologii strukturalnej, Bronisław Malinowski, i co się dziś roswinęło w snacsącą gałąź nauki.

Za najdonioślejsse obserwacje uwaśa się w tej metodologii obserwacje języka. W jego obrębie – obserwacje licsebników, a to dlatego, śe desygnaty im odpowiadające właściwie nie smieniają się. Istotnie, o ile naswa miejsca, w którym się miesska mośe się smieniać wras se smianą sposobu miesskania, o tyle nie ma właściwie powodu, by smieniała się naswa jakiejś licsby – licsba prsed wiekami i teras jest taka sama.

Spójrsmy więc jak licsą australijscy Aborygeni, a (jak twierdsą antropolodsy strukturalni) dowiemy się jak licsyli nasi prsodkowie.

	plemię Muray River	*plemię Kamilaroi*
1	enea	mal
2	petcheval	bular
3	petcheval enea	guliba
4	petcheval petcheval	bular bular
5		bular guliba
6		guliba guliba

Mośna to sinterpretować tak: jedni najpierw licsyli do dwóch, a inni do trsech – dalej było „wielkie mnóstwo", a potem s tego dopiero sacsęli budować dalsse licsby. Jest to jednak interpretacja całkowicie błędna. Skąd to mośna wiedsieć? O dsiwo, s biologii. Np. w pracach wybitnego psychologa swiersąt Oscara Heinrotha mośna snaleść stwierdsenie, śe csajka „umie licsyć" do csterech. Stwierdsone to sostało eksperymentalnie. Mianowicie wykorsystano swycsaj csajki polegający na odwodseniu ludsi od miejsca, w którym snajduje się jej gniasdo. Ukrywając w saroślach grupę ludsi mośna się sorientować, jak długo csajka będsie, po odprowadseniu kolejnego „ujawniającego się", wiedsieć, śe w ukryciu jesscse ktoś posostał. Wątpiących w rsetelność tego doświadcsenia odsyłam do prac Heinrotha.

Trudno więc prsypusscsać, śe nasi pierwotni prsodkowie byli bardsiej nierosgarnięci od (wspólcsesnego, co prawda) ptaka. A jeśli tak, to dlacsego tak wyglądają ich licsebniki? Właściwą interpretacją jest tu, jak się wydaje, odnalesienie w słośonej budowie ich licsebników pocsątków matematyki – mianowicie sbierania „w pęcski". Dsiś jesscse w naucsaniu pocsątkowym większe (choć w istocie małe) licsby prsybliśa się prses ćwicsenia w dsieleniu ich na „pęcski" o jednakowej licsebności i „resstę". Jest to niewątpliwie dsiałalność matematycsna. I tak właśnie interpretuje się sposób licsenia plemion pierwotnych.

Pęczki były różne. U wyżej rozwiniętych plemion prymitywnych najpowszechniejszym typem pęczka jest człowiek. Np. Tamankowie (Wenezuela, okolice Caracas) mają takie liczebniki:

11	puitta pona tevinitpe	(jeden u nogi)
20	tevin itoto	(jeden Indianin)
21	itakono itoto jamgnar-pona tevinitpe	(jeden u ręki drugiego Indianina).

Stąd droga wiedzie, oczywiście, do systemów pozycyjnych, choć nie od razu. Mamy np.

19	un de viginti	(20–1, łacina)
18	duo de viginti	(20–2, łacina)
9	kilenc	(10–1, węgierski)
8	nyolc	(10–2, węgierski).

Systemy też nie są raczej dziesiątkowe – częściej „indiańskie":

70	half-fjerd-sinds tyve	(półczwarta 20, duński)
80	quatre-vingt	(cztery 20, francuski).

Nie wdając się w dalsze omawianie tego tematu wypada jeszcze zwrócić uwagę na dwie sprawy. Pierwsza, to fakt, że zajmowanie się liczebnikami ma duże wzięcie u antropologów, bowiem panuje przekonanie, że pokrewieństwo liczebników jest najsilniejszym dowodem pokrewieństwa etnicznego. Druga zaś – to smutne (moim zdaniem) konsekwencje takich badań dla nauczania szkolnego. Zauważmy bowiem jeszcze jedną prawidłowość:

jeden – pierwszy	one – first	un – premier	один – первый	ein – erste
dwa – drugi	two – second	deux – second	два – второй	

– liczebniki główne i porządkowe brzmią różnie. Ten, pozornie mało znaczący, fakt kazał badaczom dawnych społeczności wyciągnąć następujący wniosek: skoro odróżniano liczby kardynalne (matematyczny odpowiednik liczebników głównych) od liczb porządkowych, to znaczy, że myślenie ludzi pierwotnych biegło zgodnie z zasadami teorii mnogości, gdzie (120 lat temu) wprowadzono takie rozróżnienie. A ponieważ różni psychologowie i pedagodzy (np. Piaget) są zdania, że nauczanie winno być prowadzone zgodnie z zasadą Haeckla, więc (powtarzając w nauczaniu początkowym strukturę myślenia ludów pierwotnych) nauczanie matematyki należy rozpoczynać od nauczania teorii mnogości. Skutki znamy. Jest rzeczą przerażającą, jak drobne spostrzeżenie może zostać przez wybitnych intelektualistów przekształcone w zmorę młodego pokolenia.

Warto wreszcie odnotować fakt, że zajmowanie się podziałem na pęczki jest rzeczywiście działalnością matematyczną – do dziś rozwiązuje się z wielkim zapałem wiele problemów tego typu. Jest też wiele interesujących rezultatów w tym zakresie. Oto przykład.

Pitagorejczycy wykryli, że „pęczek kwadratowy" k^2, $k \in \mathrm{N}$, da się podzielić na dwa „pęczki kwadratowe" (czyli istnieją takie liczby naturalne l i m, że $k^2 = l^2 + m^2$) wtedy i tylko wtedy, gdy k jest postaci $r(p^2 + q^2)$ dla jakichkolwiek liczb naturalnych r, p, q (jeśli $p > q$, to $l = 2rpq$, $m = r(p^2 - q^2)$).

Sławnym uogólnieniem tego wyniku jest Wielkie Twierdzenie Fermata mówiące, że żaden pęczek stopnia wyższego niż dwa nie da się podzielić na dwa pęczki tegoż stopnia (omówienie fascynujących prób udowodnienia tej hipotezy pozostawmy do oddzielnego artykułu). Innym przykładem zainteresowania „pęczkami kwadratowymi" jest twierdzenie Diofantosa, że iloczyn sum dwóch kwadratów liczb naturalnych jest sumą dwóch kwadratów.

Z kolei z twierdzeniem Fermata związane jest twierdzenie Waringa, że dla każdego wykładnika naturalnego n istnieje liczba naturalna m o tej własności, że każda liczba naturalna jest sumą n-tych potęg pewnych m liczb naturalnych (w istocie udowodnione dopiero w 1909 roku przez Hilberta). Pozostał otwarty problem jak ta liczba m zależy od n. Lagrange wykazał, że dla $n = 2$ mamy $m = 4$ – dziś znamy m dla wszystkich n do 471 600 000.

Diofantos (ok. 250)

Edward Waring (1734; 1798)

David Hilbert (1862; 1943)

Joseph Louis Lagrange (1736; 1813)

W twierdzeniu Waringa dla $n = 3$ mamy $m = 9$, dla $n = 4$ – $m = 19$ (np. 79 nie daje się rozłożyć na mniej niż 19 czwartych potęg). Ogólnie mamy $m \geq 2^n + [(\frac{3}{2})^n] - 2$, przy czym od półtora roku wiadomo, że dla $n \leq 471\,600\,000$ zachodzi w tym wzorze równość. Mahler wykazał w 1957 roku, że dla dostatecznie dużych n musi być równość. Nie wiadomo jednak, czy „idąc od dołu" osiągnęliśmy już liczby dostatecznie duże.

Dla matematyków hieroglify powinny być czymś bardzo bliskim. Przecież cała symbolika matematyczna to właśnie hieroglify, czyli napisy odczytujące się fonetycznie w różnych językach różnie, ale mające w każdym języku to samo znaczenie.

Wydaje się, że następnym krokiem było zajęcie się odwrotnościami. Najlepiej widać to w Egipcie. Przedstawione poniżej hieroglify to (w dzisiejszych hieroglifach) 12 i $\frac{1}{12}$

Nie należy sugerować się tym, że na obrazku mamy „dwie pałeczki i coś", więc pałeczki to jednostki, a coś to dziesiątka – tak akurat nie jest. To co jest istotne, to owal nad hieroglifem z prawej strony. Jeśli postawiło się go nad hieroglifem oznaczającym liczbę (naturalną), to otrzymywało się jej odwrotność – dziś napisalibyśmy $^{-1}$. Dla Egipcjan liczba to tylko liczba naturalna plus skończona suma różnych ułamków prostych (tak się dziś nazywa odwrotności liczb naturalnych). A więc ich liczby to jakby N plus $\frac{1}{N}$. Napisałem „jakby", bo przecież dzisiaj wiemy, że zbiór liczb, jakie mieli do dyspozycji Egipcjanie to Q^+, zbiór dodatnich liczb wymiernych. Ale oni tego nie wiedzieli – jak zresztą mogli wiedzieć, skoro liczb wymiernych jeszcze wtedy nie było?

Np. $\frac{9}{19} - \frac{1}{3} = \frac{27-19}{57} = \frac{8}{57}$,

$\frac{8}{57} - \frac{1}{8} = \frac{64-57}{456} = \frac{7}{456}$,

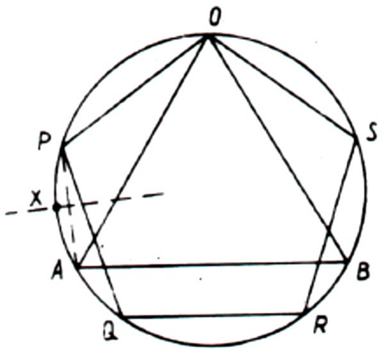
$\frac{7}{456} - \frac{1}{66} = \frac{462-456}{30\,096} = \frac{6}{30\,096} =$
$= \frac{1}{10\,016}$,

czyli $\frac{9}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{66} + \frac{1}{10\,016}$.

Istnieje, oczywiście, rozkład każdej liczby wymiernej na sumę liczby naturalnej i pewnej skończonej liczby ułamków prostych. Stosownym algorytmem jest tutaj (po oddzieleniu części całkowitej) odejmowanie największego spośród mniejszych ułamków prostych – przy tej operacji licznik reszty maleje (czemu?), a więc operacja ma skończoną długość.

Euklides (−365?; −300?), działał w Aleksandrii.

O tym, że liczbami były tylko sumy liczb naturalnych i różnych ułamków prostych świadczyć może np. konstrukcja piętnastokąta w *Elementach* Euklidesa. Zamiast zauważyć od razu, że szukanym bokiem piętnastokąta foremnego wpisanego w dany okrąg jest AQ (patrz rysunek), co odpowiadałoby rachunkowi $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$, Euklides każe nakreślić symetralną odcinka AP, znaleźć jej przecięcie X z okręgiem i jako bok piętnastokąta przyjąć AX. Oczywiście, jest to rozwiązanie dobre (odpowiada mu rachunek $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{15}$), ale bardziej skomplikowane – zostało jednak przyjęte, by przestrzegać starożytnego (już i wtedy), sprawdzonego kanonu ułamków prostych.



Konstruujemy trójkąt równoboczny OAB wpisany w dany okrąg, a następnie pięciokąt foremny $OPQRS$ również w ten okrąg wpisany.

Problematyka ułamków prostych również nie wygasła do dnia dzisiejszego. Świadczyć o tym mogą następujące otwarte zagadnienia dotyczące rozkładu na ułamki proste już nie koniecznie różne:

Problem Erdősa: Czy każdy ułamek $\frac{4}{n}$ $(n > 1)$ da się przedstawić jako suma dokładnie trzech ułamków prostych?

Hipoteza Schinzla: Dla każdego a istnieje taka liczba n_0, że dla $n > n_0$ ułamek $\frac{a}{n}$ jest sumą dokładnie trzech ułamków prostych.

Jako przykład zastosowania ułamków prostych posłużyć może tekst anonimowego autora z 1785 roku. Daje on przepis na znajdowanie posadzek ułożonych z wielokątów foremnych:

Jeśli posadzka jest wykonana z trzech rodzajów wielokątów (i-kątów, j-kątów i k-kątów) zbiegających się w jednym narożu, to i, j, k spełniają równanie

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2},$$

analogicznie dla posadzek z czterech rodzajów wielokątów mamy

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$$

i dla posadzek z pięciu rodzajów wielokątów

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

(oczywiście nie każdemu rozwiązaniu tych równań w liczbach naturalnych odpowiada jakaś posadzka – to już trzeba sprawdzić „osobiście").

Pitagoras z Samos (−572?; −497) działał w Krotonie.

Pozornie proste przejście od sum liczb naturalnych i ich odwrotności do liczb wymiernych dodatnich było dziełem dopiero pitagorejczyków (a więc trzeba było na nie czekać ponad tysiąc lat).

Ogólna idea *harmonii, którą się utrzymuje wszystko, nie wyłączając bogów* (która była głównym założeniem ich filozofii) pierwszy, ale bardzo silny wyraz znalazła w teorii współbrzmień skracanej struny – warto pamiętać, że ukształtowany przez pitagorejczyków kanon muzyczny obowiązuje do dziś dnia. W naturalny sposób nasuwało się uogólnienie

1 : 2 : 3 : 4
oktawa kwinta kwarta

harmonia to stosunek liczb naturalnych,

tym piękniejsza, im liczby te są mniejsze.

Spostrzeżenie to kazało pitagorejczykom (nie czekając, aż potwierdzi się ono w pozostałych dziedzinach, nad którymi medytację zalecali, to jest w astronomii, geometrii i w samej arytmetyce) ogłosić, że

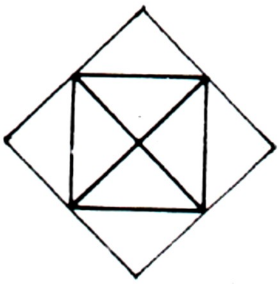
wszystko jest liczbą.

Praktycznie jednak natychmiast „wszystko" liczbą być przestało. Ponoć pierwszy przestał być liczbą kwadrat: jego przekątna i bok nie tworzą harmonii liczbowej.

Arystoteles ze Stagiry (−384; −322)

Platon (−427?; −347?)

Dowodów przytacza się wiele, choć żaden nie jest chyba oryginalny (tj. pitagorejski). Za Arystotelesem podaje się, że pitagorejczycy posłużyli się dowodem, który Platon zamieścił w dialogu *Menon*. Jest to *reductio ad absurdum*:



Po dorysowaniu zewnętrznego kwadratu mamy osiem jednakowych trójkątów.

Niech harmonię boku kwadratu i jego przekątnej wyrażają liczby m i n. Z założenia (*im mniejsze, tym lepiej*) są one względnie pierwsze. Ponieważ (patrz rysunek) mamy $m^2 = 2n^2$, więc liczba m jest parzysta, czyli dla pewnego p mamy $m = 2p$. Wobec tego liczba n , jako względnie pierwsza z m, jest nieparzysta. Jednak z $4p^2 = 2n^2$ wynika, że $2p^2 = n^2$, wobec czego n musi być liczbą parzystą – sprzeczność.

O tyle jednak jest mało prawdopodobne, by był to dowód pitagorejski, bo wynalezienie *reductio ad absurdum* przypisuje się na ogół dopiero samemu Platonowi.

Jakkolwiek nie wyglądałby dowód, że stosunek przekątnej i boku kwadratu nie da się wyrazić stosunkiem liczb naturalnych, odkrycie tego faktu wywołało wielki niepokój i, oczywiście, wzmożenie badań nad liczbami – można było doskonalić badanie liczb (mówiąc dzisiejszym językiem) wymiernych, można też było próbować znaleźć ogólniejsze podejście. I obie te możliwości zrealizowano.

Teajtetos z Aten (−410; −368)

Już ponoć u Teajtetosa możemy znaleźć w dojrzałej formie tak teorię liczb wymiernych, jak i teorię niewspółmierności.

Teoria liczb wymiernych jest realizowana jako teoria proporcji liczb naturalnych i osiąga ten poziom, który do niedawna był nauczany w szkołach jako „reguła trzech". Owo półciało $\mathbf{Q}^+$ w dość niezauważalny sposób zaczyna być traktowane jako złożone z liczb. Szczególnie geometryczne podobieństwo domaga się liczb dla wyrażenia skali – nazywanie proporcji liczbami, a raczej utożsamianie tych dwóch pojęć będzie się ciągnęło aż do XVIII wieku.

W geometrii są nietrywialne twierdzenia o liczbach wymiernych, np.: Jeśli czworokąt ma boki i przekątne o długościach wymiernych, to przekątne te dzielą się na odcinki o wymiernych długościach.
Jest to twierdzenie Kummera.

Ernst Kummer (1810; 1893)

Teoria niewspółmierności (tak bardzo eksponowana w szkolnych dowodach twierdzenia Talesa – i, moim zdaniem, zupełnie nieprzydatna w szkole) to zastosowanie metody nazwanej później algorytmem Euklidesa. Do jego zastosowania niezbędne jest założenie też noszące „ahistoryczną" nazwę aksjomatu Archimedesa:

Archimedes z Syrakuz (−278?; −212); jego aksjomat zapisujemy dzisiaj dla liczb rzeczywistych tak:

$$\bigwedge_{r,s\in\mathbf{R}}\bigvee_{n\in\mathbf{N}} s>0 \to ns>r.$$

dana wielkość może być tak zwielokrotniona,

że przekroczy drugą daną wielkość tegoż rodzaju.

Skoro tak, to badając proporcję dwu danych wielkości możemy odnotowywać kolejne (naturalne!) współczynniki: największego zwielokrotnienia jednej z nich mieszczącego się jeszcze w drugiej, następnie największego zwielokrotnienia „reszty" drugiej mieszczącego się jeszcze w pierwszej itd. otrzymując w wyniku ciąg liczb naturalnych opisujący badaną proporcję.

Dziś działanie algorytmu Euklidesa np. dla liczb 11 i 7, zapisalibyśmy tak:

$$\frac{11}{7}=1+\frac{4}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{4}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}},$$

choć prostszym zapisem byłoby (1;1,1,3). Proces ten może się, oczywiście nigdy nie zakończyć, np.

$$\frac{\sqrt{2}}{1}=(1;2,2,2,\ldots).$$

Wielkości prowadzące do niekończącego się działania algorytmu nazywa się niewspółmiernymi. Nasze dzisiejsze liczby niewymierne to te, które są niewspółmierne z 1.

Pisząc o algorytmie Euklidesa pomijam jego znaczenie np. w poszukiwaniu największego wspólnego dzielnika; w ogóle w tym artykule wiele ważnych spraw jest pominiętych (choćby liczby pierwsze) – trzymam się sztywno wątłego tematu sformułowanego w tytule.

Jakkolwiek zapisany, wynik działania algorytmu Euklidesa nazywa się dziś ułamkiem łańcuchowym. Gdy rozwinięcie w ułamek łańcuchowy jest skończone, daje się on „zwinąć" w zwykła liczbę wymierną. Łatwo zauważyć, że jest i odwrotnie.

Algorytm Euklidesa daje jedyne rozwinięcie liczby w ułamek łańcuchowy (np. przedstawień liczby wymiernej w postaci sumy ułamków prostych jest nieskończenie wiele) – ściślej: dla liczb wymiernych trzeba dodać, że ostatnia liczba rozwinięcia jest różna od 1. Odwrotnie: każde, dowolnie „wymyślone" rozwinięcie jest zbieżne – przedstawia jakąś liczbę rzeczywistą (oczywiście, w Starożytności nikt o takie rzeczy nie pytał).

Można udowodnić, że pierwiastki równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych mają rozwinięcia okresowe lub skończone (prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne) – udowodnił to Lagrange.

Dla pierwiastka z liczby wymiernej okres bez ostatniego miejsca jest symetryczny, np.

$$\sqrt{19}=(4;\overline{2,1,3,1,2,8}),$$

przy czym ostatnia, niesymetryczna liczba okresu to podwojona część całkowita rozwijanego pierwiastka (tu mamy $8=2[\sqrt{19}]$).

Gdyby ktoś życzył sobie otwartego problemu z tego zakresu, to może zmierzyć się z pytaniem: czy zbiór liczb występujących w rozwinięciu $\sqrt[3]{2}$ jest ograniczony?

Raphael Bombelli (1530?; 1572?)

Problematyka jawnie uprawianych ułamków łańcuchowych (pomijając może opinie, że już Aryabhata...) pojawia się w pracach matematyków znacznie później niż faktyczne jej początki w pracach Teajtetosa: np. rozwinięcie $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy pochodzi (wg podręczników historii) dopiero od Bombelliego. To, że tak się stało, że ułamki łańcuchowe „nie trafiły pod strzechy" wzięło się stąd, że zaraz po pomysłach Teajtetosa pojawiły się w kwestii liczb, czy też proporcji – jak kto woli, lepsze pomysły.

Eudoksos z Knidos (−408?; −355)

Teoria proporcji Eudoksosa startuje z podobnych założeń co jej poprzedniczka: zajmuje się wielkościami. Zamiast jednak do opisu ich proporcji używać ciągu liczb naturalnych, podejmuje pytanie kiedy dwie wielkości jakiegoś jednego rodzaju tworzą tę samą proporcję, co dwie (inne) wielkości też jednego, choć (być może) zupełnie innego rodzaju. Oczywiście, bez liczb naturalnych obejść się nie może (choćby ze względu na aksjomat Archimedesa).

Definicja proporcji Eudoksosa jest następująca:

dwie wielkości tego samego rodzaju A i B
tworzą tę samą proporcję, co dwie wielkości również jednego rodzaju α i β

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych m i n
jeśli $mA<nB$, to $m\alpha<n\beta$,
jeśli $mA=nB$, to $m\alpha=n\beta$,
jeśli $mA>nB$, to $m\alpha>n\beta$.

Podstawową saletą proporcji Eudoksosa jest stworsenie mośliwości stosowania proporcji (a więc matematyki) do wsselkich wielkości, które dają się swielokrotniać i spełniają prsy tym aksjomat Archimedesa. A więc sarówno do długości, jak do cięśarów, objętości, kątów itd. Słowem matematyki mośna odtąd uśywać do całego prsyrodosnawstwa. Dlatego osobiście uwaśam podaną wyśej definicję sa najwięksse osiągnięcie matematyki wssechcsasów.

Richard Dedekind (1831; 1916)

Patrsąc na to s juś wewnątrsmatematycsnego punktu widsenia definicja Eudoksosa utośsamia proporcję se sbiorami jej dolnych ($\frac{n}{m}$ s pierwssego prsypadku definicji) i górnych ($\frac{n}{m}$ s prsypadku trseciego) prsybliśeń wymiernych. Jest to więc uśycie tego, co dsiś nasywamy prsekrojami Dedekinda.

Ponoć juś wspólcseśni pytali, co takiego srobił Dedekind, posa dokońcseniem pracy Eudoksosa (jesscse niedawno Struik w swoim *Sarysie historii matematyki* pisał, śe nic). Róśnica jest jednak istotna:

dowolna proporcja (licsba) jest prsekrojem – twierdsi Eudoksos,
dowolny prsekrój jest proporcją (licsbą) – dodaje Dedekind.

Was sind und was sollen die Zahlen, 1882

O tym, śe róśnica ta jest snacsna świadcsyć może fakt, śe kiedy Dedekind pisał o swoim podejściu do pojęcia licsby, bardso modne w matematyce było sajmowanie się licsbami, na które praktycsnie trafia się bardso rsadko – licsbami prsestępnymi.

Joseph Liouville (1809; 1882)

Pierwsse s nich (1844) to licsby Liouville'a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}}, \qquad \text{gdsie } c_i \text{ jest dowolnym ciągiem s } \{1,2,\ldots,9\}.$$

Charles Hermite (1822; 1901)

Te snane licsby prsestępne sostały ujawnione niewiele lat póśniej: e w 1873 roku (Hermite) i π w 1882 roku (Lindemann).

Ferdinand Lindemann (1852; 1939)

Gdyby ktoś chciał csegoś nowssego, to ciekawe jest roswiąsanie (posytywne – Gelfond, 1934) hipotesy Eulera:

$$\alpha^\beta \text{ jest prsestępna,}$$
$$\text{jeśli } \alpha \text{ i } \beta \text{ są algebraicsne, } \alpha \neq 1 \text{ i } \beta \text{ jest niewymierna; np. } 2^{\sqrt{2}}.$$

Zabawny jest juś powojenny wynik Kurta Mahlera: prsestępna jest licsba

$$0,1234567891011121314151617181 9\ldots$$

utworsona prses dopisywanie kolejnych licsb naturalnych w sapisie dsiesiętnym.

Georg Cantor (1845; 1918)

A właśnie wtedy Cantor wykasał na gruncie świeśo stworsonej teorii mnogości, śe tych prsekrojów nie będących proporcjami śadnych realnych wielkości jest, jak to się mówi, prsewaśająca więkssość.

Ocsywiście, to co mieliśmy dane prses Eudoksosa to nie było $\mathbf{R}$, lecs „tylko" $\mathbf{R}^+$ – a satem licsba (póśniej naswana rsecsywistą) był to kaśdy mośliwy wynik miersenia.

Isaak Newton (1642; 1727)

Poswalało to jednak rachować na wielkościach „s róśnych oper", co wsselako jasno dostrsegł i otwarcie sformułował dopiero Isaak Newton w swoim dsiele *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Mogliśmy więc od csasów Eudoksosa np. dsielić długość prses csas i robiliśmy to, choć dopiero Newton sauwaśył, śe jest to rsecs filosoficsnie nietrywialna.

Odejmowanie dowolnych licsb natrafiało jednak na istotne opory. Było więc N, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{R}^+$ i posostawał problem ich „drugich połówek".

Domknięcie $\mathbf{N}$ do grupy addytywnej (i podobnie $\mathbf{Q}^+$ i $\mathbf{R}^+$) od csasu do csasu trafiało się temu, csy innemu matematykowi. W podręcsnikach historii pisse się tu np. o Hindusach. Ale jesscse Tartaglia, Ferrari, csy Cardano rospatrują trsy rodsaje równań kwadratowych: $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$ i $x^2 = ax + b$ i tyleś rodsajów równań stopnia trseciego.

Galileo Galilei (1564; 1642)

Tym, co faktycsnie ustabilisowało użycie licsb ujemnych, była fisyka. Wprowadsone prses Galileussa pojęcie siły miało tę własność, że dwie siły tej samej wielkości mogą dać w sumie sero, co można saobserwować np. prsy prseciąganiu liny. Tu pojawia się strsałka, csyli wektor. Licsba ujemna może więc być representowana prses taki sam odcinek, jak licsba dodatnia; ma tylko strsałkę s prseciwnej strony.

Zrobienie s tego osi licsbowej jest już kwestią chwili – formalnie najcsęściej sa autora osi licsbowej uważa się Fermata (*Isagoge* – druk w 1679 roku).

Tyle, że strsałki bywają nierównoległe. Pomysł, że strsałka-wektor to licsba, był w tym momencie tak naturalny, że trseba go było srealisować. Nie udało się to jednak od rasu.

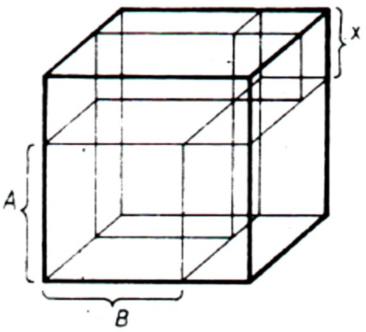
Warto jesscse swrócić uwagę na fakt, że pytanie, csy licsby ujemne są licsbami nie sostało prses wynalasek wektora salatwione ostatecsnie i posytywnie (w świadomości matematyków XVI i XVII wieku). Świadcsy o tym „dowód" Kartesjussa, że równanie może mieć również pierwiastki ujemne. Oto on:

Niech $W(x) = 0$ ma (formalnie) pewne pierwiastki ujemne. Należy je usnać sa pierwiastki, bo istnieje taka licsba dodatnia a, że wielomian $V(x+a) := W(x)$ ma tylko pierwiastki dodatnie. A prsecież to to samo.

Scipio del Ferro (1465?; 1526)

Nicolo Fontana (Tartaglia) (1499?; 1557)

Powód, by pytać, csy licsby ujemne są licsbami brał się s faktu, że (obok licsb) w użytku były też „nielicsby". Dostarcsył ich pierwssy matematycsny sukces Europy od csasów Starożytności. Jesscse prsed bitwą pod Lepanto (1571) pokonaliśmy o wiele wyżej naukowo i cywilisacyjnie stojących Arabów na gruncie matematyki.



Gdy dostrsesemy, że po wyjęciu s sześcianu o boku A sześcianów o boku B i x otrsymamy trsy jednakowe prostopadłościany o bokach A, B, x, mamy

$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx;$$

porównując to s danym równaniem

$$x^3 + ax = b$$

otrsymujemy dwie sależności

$$27((A^3)\cdot(B^3)) = a^3 \text{ i } (A^3) - (B^3) = b$$

równoważne równaniu kwadratowemu, s którego można obliczyć A^3, co w konsekwencji poswala obliczyć $x = A - B$.

Ponoć Scipio del Ferro, a już na pewno Tartaglia (1534) roswiąsali (prses smyślny podsiał sześcianu) równanie trseciego stopnia. Otrsymane wsory

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+\frac{b}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}-\frac{b}{2}}$$

dla równania $x^3 + ax = b$, dawały się sastosować również do innych równań stopnia trseciego w tym sensie, że sawsse formalnie dawały jakąś licsbę rsecsywistą, choć csasem (gdy $27b^2 + 4a^3 < 0$) żaden s pierwiastków kwadratowych licsbą nie był. Cardano usnał to jednak sa hiperbolę intelektualną prowadsącą prses inne światy do konkretnego, realnego roswiąsania.

Girolamo Cardano (1501; 1576)

Lodovico Ferrari (1522; 1565)

Owa *Ars Magna* (1545) poswalała też na snajdowanie pierwiastków równań stopnia cswartego, co było dsiełem Ferrariego, ale s, mówiąc dsisiejssym jesykiem, licsb sespolonych licsb to nie csyniło. Wręcs prseciwnie.

Ocsywiście wektory świetnie nadawały się do opisu tych „nielicsb". Euler, który pierwssy używał tsw. płassczysny Gaussa, pisse o nich (*Algebra*, 1770):

Pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie są serem, ani nie są ujemne, ani dodatnie. Stąd wynika, że pierwiastki te nie mogą się snajdować wśród możliwych liczb. W konsekwencji są to niemożliwe liczby. I tak dochodzimy do pojęcia liczb na ogół zwanych urojonymi albo wyobrażalnymi, dlatego, że mogą one istnieć tylko w wyobraźni.

Leonhard Euler (1707; 1783)

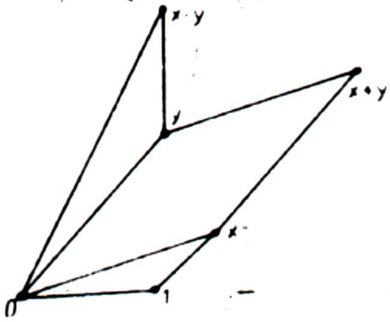
Płassczysna Gaussa była czymś takim, jak csasoprsestrseń – były dwie osie, ale każda była inna: jedna licsbowa, a druga nie. Wyrażało się to w (używanym do dsisiaj) formalismie $a + ib$, csyli rossserseniu $\mathbf{R}$ o $\mathrm{i} \notin \mathbf{R}$ s równością $\mathrm{i}^2 = -1$.

Podręczniki podają, że płassczysnę Gaussa wynalazł Caspar Wessel (1749; 1818) w 1797 roku.

Carl Friedrich Gauss (1777; 1855)

Faktycsnie walor licsb nadały licsbom sespolonym prace Gaussa – w ssczególności tsw. podstawowe twierdsenie algebry. Skoro te „nielicsby" mają tak piękne własności algebraicsne w pełni sasługują na podniesienie ich do godności licsb.

William Rowan Hamilton (1805; 1865)



Trójkąty $01x$ i $0y(x \cdot y)$ są podobne ze zgodną orientacją.

Niels Henrik Abel (1802; 1829)

Natomiast wektorami, zwykłymi elementami $\mathbf{R}^2$, stały się liczby zespolone dopiero za sprawą Hamiltona. Podał on określenia działań

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c).$$

Tak rozumiane liczby zespolone harmonijnie pasowały do geometrii: było to przesunięcie i podobieństwo spiralne, a więc zdrowe geometryczne operacje. Nasuwało to też od razu pomysł, by uznać za liczby wektory każdego wymiaru.

Wypisać byle jakie działania $V^2 \to V$ można zawsze. Np. suma i iloczyn „po współrzędnych". Wtedy jednak działania będą miały własności również byle jakie (w podanym przykładzie są np. dzielniki zera). Nie byle jakie, ale porządne własności działań to, zdaniem badających rachunki na wektorach matematyków XIX wieku, te, które wyodrębnił Abel w pracy dowodzącej nierozwiązalności przez pierwiastniki równania stopnia 5, czyli, mówiąc dzisiejszym językiem – aksjomaty ciała. I takich właśnie działań na wektorach szukano.

Wykrycie dobrych (w powyższym sensie) działań na $\mathbf{R}^4$ opóźniło się prawdopodobnie dlatego, że chciano to zrobić po kolei. Było dla $\mathbf{R}^1$, było dla $\mathbf{R}^2$, pora na $\mathbf{R}^3$. A dla $\mathbf{R}^3$ zrobić się tego nie dawało. Dopiero w 1843 roku Hamilton wskazał takie działania na $\mathbf{R}^4$. Jak wiadomo, nie wszystkie własności „cielesne" dało się uzyskać – kwaterniony (warto by im zresztą poświęcić osobny artykuł) tworzą tylko ciało skośne (*skew field*) – bez przemienności mnożenia.

Arthur Cayley (1821; 1868)

Swoboda obyczajowa ma to do siebie, że się rozszerza. Cayley w 1845 roku proponuje już rachunki znacznie bardziej kalekie (jego liczby nazywa się oktawami) – bez zbytniej przesady można powiedzieć, że niektóre własności mają miejsce tylko przy pełni Księżyca – ale za to w $\mathbf{R}^8$. Wprawdzie za granice przyzwoitości przyjęto założenia twierdzenia udowodnionego w 1878 roku przez Frobeniusa:

F. Georg Frobenius (1849; 1917)

ciało liczbowe ma być rozszerzeniem algebraicznym $\mathbf{R}$
zawierającym $\mathbf{R}$ w swoim centrum

– wówczas ciała liczbowe tworzą tylko liczby rzeczywiste, zespolone i kwaterniony – ale maszyna produkująca nowe liczby nie dała się na tej granicy zatrzymać.

William Kingdon Clifford (1845; 1879)

Kurt Hensel (1861; 1941)

Jeszcze przed twierdzeniem Frobeniusa, w 1873 roku, Clifford wyprodukował swoje algebry, a już znacznie po tym twierdzeniu, w 1908 roku, Hensel stworzył liczby p-adyczne (też warte osobnego omówienia). Przy tej swobodzie liczbami zaczęto nazywać również elementy ciał modulo p itd.

* * *

W ten sposób wiemy już, co zrobili ludzie startując od stworzonych przez Boga liczb naturalnych. Wydaje się jednak, że w przyzwoitym piśmie lepiej nie szukać dla tego precyzyjnych określeń.