Między matematyką a filozofią

Eugeniusz SZUMAKOWICZ, Kraków

Stosunek wymienionych w tytule nauk nie jest jednorodny i dlatego proponuję skoncentrować się na tym nurcie badań, który można określić słowem *metamatematyka*.

Naturalna geneza problematyki metamatematycznej jest następująca. Chcemy dowieść twierdzenie A...– nie wychodzi. Zatem próbujemy je obalić, czyli dowieść twierdzenie $\neg A$...– możliwe, że też nie wychodzi. Pojawia się myśl, że A nie jest ani dowiedlne, ani obalalne. Jest to metamatematyczny fenomen niezupełności. Niewykluczone jest zjawisko przeciwne: zarówno A, jak i $\neg A$, są dowiedlne – sprzeczność! Pojawia się postulat zagwarantowania niesprzeczności matematyki. Oba powyższe zjawiska, w formie pozytywnej, jak i negatywnej (zupełność – niezupełność, sprzeczność – niesprzeczność), muszą być, oczywiście, odnoszone do określonych dziedzin czy teorii matematycznych. Na przykład zdanie A ani jego zaprzeczenie mogą nie należeć do teorii T_1, choć jedno z nich (a czasem i oba) mogą należeć do teorii T_2.

Gdy chcemy coś po prostu udowodnić lub obalić w matematyce, nie potrzebujemy głowić się nad tym, co to jest dowód, co to jest teoria. Inaczej jest, gdy chcemy, niejako na wyższym logicznie piętrze myślenia, dowieść niedowiedlności, dowieść nieobalalności czy dowieść niesprzeczności czegoś lub czegoś względem czegoś. Wówczas, jeśli życzymy sobie pozostać w ramach ścisłości matematycznej, musimy uczynić dowód z „niższego piętra" obiektem matematycznym. Obiektem matematycznym w tym samym sensie co sinus, symetria, grupa, wektor itp. Podobnie postąpić należy z początkowo żywiołowym i intuicyjnym pojęciem teorii matematycznej.

W tym momencie pojawia się potrzeba formalizacji. Formalizacja budzi zrozumiałą niechęć matematyków i faktycznie owa metamatematyczna formalizacja jest prawie zbędna w praktyce (twórczości) matematycznej. Ale w pretendującej do ścisłości teorii matematyki (metamatematyce) jest, jak się okazuje, nie do uniknięcia. Tam bowiem nie oznacza nic innego, jak spełnienie wymogu ścisłości, dokładnie tej samej ścisłości, której trzymać się musi geometra, algebraik czy analityk. Jeśli więc matematyk mówi, że nie lubi (matematycznej wszakże!) metamatematyki, to jest tak jakby algebraik powiedział, że nie lubi geometrii, lub na odwrót – jest to więc sprawa upodobań i gustu. Wybitny polski logik i badacz podstaw matematyki, profesor Andrzej Mostowski, podsumował tę animozję angielskim powiedzeniem: *One man's meal is another man's poison* – pożywienie jednego dla drugiego bywa trucizną.

Monstrualne i przez to nieciekawe mogą się komuś wydawać sformalizowane systemy arytmetyki, geometrii czy analizy, ale podobne uczucia mogą wzbudzać wielowskaźnikowe obiekty rachunku tensorowego i geometrii różniczkowej. Podobnie jest i w innych domenach ludzkiego ducha, na przykład w muzyce: wielbiciel romansów cygańskich i walców Straussa, które tak przemawiają do uczuć, może być mocno znudzony gigantycznymi symfoniami Mahlera. Oczywiście matematyka tak zwana „zwyczajna" lub „normalna", obejmująca klasyczne działy jak algebra, geometria, analiza czy topologia, dysponuje nieporównanie większym bogactwem i różnorodnością konstrukcji niż sama logika i podstawy matematyki. Tym ostatnim na pocieszenie pozostaje jednak urok filozoficznego odniesienia.

Nie wszyscy lubią filozofię. Jednym daje ona pocieszenie i uspokojenie, innych może doprowadzać do chandry. Metamatematyka jednak wnosi do filozofii pewien porządek i uściślenie. Bardzo możliwe, że z drugiej strony powoduje pewne straty wynikające z abstrakcji i schematyzmu. A więc coś za coś.

Najsłynniejszym wynikiem metamatematycznym, mającym głębokie odniesienie filozoficzne, jest niewątpliwie twierdzenie Gödla o nieusuwalnej niezupełności dostatecznie bogatych i niesprzecznych (z założenia) systemów sformalizowanej matematyki oraz o niemożności udowodnienia niesprzeczności takich systemów środkami logicznymi formalizowalnymi w ich własnych ramach. Teorię matematyczną o ściśle skodyfikowanym języku nazywa się zupełną, jeśli dla każdego poprawnie zbudowanego w tym języku zdania A należy ono do tej teorii bądź należy do niej jego zaprzeczenie. Teoria zupełna ucieleśnia pewien szczególny „algorytm" – rozstrzygania czy A czy też $\neg A$ należy do teorii. Wystarczy wypisać w porządku leksykograficznym zdania teorii, a z założenia zupełności wynika, że wcześniej czy później pojawi się bądź A, bądź $\neg A$. Niesprzeczność zaś teorii gwarantuje, że w tym ciągu nie mogą pojawić się oba.

Teoria zupełna i niesprzeczna zarazem była ideałem formalizmu Hilberta: przedstawić interesujące treściowo teorie matematyczne w postaci w pełni sformalizowanej, a następnie dowieść ich niesprzeczności i zupełności. Można się zastanowić, co by się zmieniło w praktyce matematycznej, gdyby program Hilberta okazał się spełnialny. Zapewne nic, tak jak nie miała wpływu na praktykę gry w szachy konstatacja istnienia strategii optymalnej w tej grze (Ernst Zermelo, Cambridge, 1912). Zasadniczo jednak matematyka okazała się być czymś różnym w swej naturze od szachów.

Dokładniej: Zermelo wykazał, że jeden z graczy (do dziś zresztą nie wiadomo który – większość szachistów jest zdania, że grający białymi) ma strategię gwarantującą mu wygraną lub remis (do dziś również nie wiadomo co), jeśli tylko będzie ściśle (=bezmyślnie) trzymał się tej strategii, wykonywał określony algorytm reagowania na posunięcia przeciwnika. Brak jawnie sformułowanego takiego algorytmu sprawia, że możemy nadal pasjonować się zmaganiami szachowych tytanów. Wynik Zermelo wskazuje jednak, że wygrywa ten, kto gra mniej źle (bardziej szczegółowy mój artykuł na ten temat ukaże się niebawem w *Delcie*).

O twierdzeniu Gödla i jego dowodach napisano już bardzo wiele, w tym liczne artykuły popularne i książki (np. Nagel i Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN, seria *Omega*, Warszawa 1966). Nie będziemy więc powtarzali standardów. Zamiast tego, rezygnując z dokładności na rzecz poglądowości, wyobraźmy sobie komputer, w którego pamięć włożono co tylko się da z aksjomatów matematyki oraz reguł dedukcji logicznej. Formalizacja pozwala przełożyć ten „wsad" na język zrozumiały dla programisty i... komputera. Istotę twierdzenia Gödla można wtedy streścić następująco: komputer taki, jakkolwiek bogato byłby oprogramowany, pozostawi poza zasięgiem swojego potencjalnego OUTPUTu nieskończenie wiele prawdziwych zdań matematycznych. Ta nieskończoność jest jeszcze szczególnego rodzaju – jest nieobliczalna, nieschematyzowalna; w przeciwnym razie można by ją za pomocą uzupełniającego schematu operacyjnego (podprogramu) wygenerować.

Nieco inaczej, konstrukcję i oprogramowanie takiego komputera można przedstawić jako przedmiot rywalizacji między mechanicystą i antymechanicystą w interpretowaniu natury umysłu ludzkiego. Mechanicysta chce zbudować maszynę równorzędną matematykowi; antymechanicysta (nb. idąc w ślady Kartezjusza) chce wykazać różnicę między człowiekiem a maszyną. Twierdzenie Gödla dostarczyłoby antymechanicyście narzędzia: na każde wyzwanie odpowie formułą Gödla systemu formalnego matematyki zakodowanego w komputerze, której ten ostatni nie będzie w stanie udowodnić, natomiast on – człowiek – będzie w stanie wykazać jej prawdziwość (w każdym razie ma pewne szanse). Nowy komputer-challenger – nowa formuła Gödla.

Ktoś jednak mógłby zauważyć, że skoro gödlowskie procedury dają możliwość każdorazowego „przebijania" systemu formalnego matematyki ucieleśnionego w komputerze, to może dałoby się ten proces zautomatyzować. Jest to złudna nadzieja wobec bezwzględności twierdzenia Gödla w stosunku do wszelkich abstrakcyjnych automatów (maszyn Turinga, algorytmów), z którymi można utożsamiać systemy sformalizowane. Innymi słowy i poglądowo: czy możliwy jest algorytm, który jest lepszy od wszystkich algorytmów? Czy istnieje liczba naturalna, która jest większa od wszystkich liczb naturalnych? Oczywiście, że nie. Czymże jest więc twierdzenie Gödla jako procedura?

Aksjomatyka Peano (1891) opisuje własności „następnika" – funkcji przyporządkowującej liczbie naturalnej a następną liczbę naturalną a'. Oto ona:

1. $a' \neq 0$,
2. $a' \neq b' \rightarrow a \neq b$,
3. $(P(0) \wedge (P(n) \rightarrow P(n'))) \rightarrow \bigwedge_k P(k)$.

P w trzecim aksjomacie to dowolna elementarna formuła zdaniowa – aksjomat 3 opisuje indukcję.

Aby uprawiać arytmetykę liczb naturalnych, definiuje się dodatkowo działania $+$ i $\cdot$ w następujący sposób:

1. $a + 0 = a$,
2. $a + b' = (a + b)'$,
3. $a \cdot 0 = 0$,
4. $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Zilustrujmy tę kwestię następująco. Otóż wychodząc od aksjomatyki Peano (intuicyjnie prawdziwej) możemy kolejne formuły Gödla ustawić w ciąg numerowany liczbami porządkowymi, również nieskończonymi (przeliczalnie):
$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot 4, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^2 + 2, \ldots, \omega^2 + \omega, \ldots, \omega^2 + \omega + 1, \ldots, \omega^2 + \omega \cdot 2, \ldots, \omega^2 \cdot 2, \ldots, \omega^2 \cdot 3, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\ldots$

Już na pierwszy rzut oka ciąg ten jest, w pewnym sensie, niesympatyczny. Wymyka się próbom ujęcia go wedle jakiegoś przejrzystego schematu, mimo że dla każdego wyrazu można wskazać wyraz następny. I w tym jest kwintesencja różnicy w produkowaniu formuł gödlowskich (w dążeniu do zupełności arytmetyki) przez komputer i przez człowieka. Ten pierwszy wymagałby schematu, danego z góry systemu oznaczania wszystkich tych liczb, takiego, jak na przykład system dziesiętny. Człowiek zaś, nawet uzbrojony w wynikającą z twierdzenia Gödla pewność przekraczalności dowolnego systemu formalnego matematyki, musi co pewien czas wykazywać się inwencją. Można by zatem powiedzieć, że w procesie uzupełniania arytmetyki (czystej teorii liczb) umysł matematyka jest algorytmem „lokalnie", maszyna zaś – „globalnie" i w tym zasadza się istotna między nimi różnica. Przeciwnicy tej tezy zaatakowaliby ją z dwóch stron: *dlaczego zawężać pojęcie maszyny do całkowicie deterministycznego algorytmu?* oraz *skąd mamy mieć pewność, że umysł ludzki nie zawiedzie w twórczym, z konieczności, procesie numerowania coraz to dalszych formuł gödlowskich?*

Na pierwsze pytanie można by odpowiedzieć pytaniem: czy istotą „maszynowości" nie jest całkowite zdeterminowanie? Oczywiście, można wprowadzać element losowości do pracy maszyn, ale czy uznamy za maszynę twór materialny, który nie wiadomo na jakiej zasadzie układa na przykład dowody niebanalnych twierdzeń matematycznych, nie mówiąc już o ich formułowaniu?

W związku z pytaniem drugim zauważmy, że może nie chodzi tutaj o absolutnie pewny dowód wyższości człowieka nad maszyną (komputerem), lecz raczej o wskazanie i sprecyzowanie, na czym ta wyższość mogłaby polegać. Wydaje się, że twierdzenie Gödla pozwala na osiągnięcie wyższego pułapu myślenia w tej fundamentalnej kwestii.

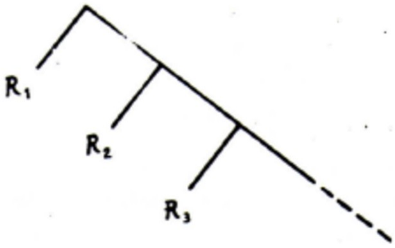
Tyle zostało już wyżej napisane o algorytmach, że nie sposób uniknąć kolejnego pojęcia metamatematyki: teoria rozstrzygalna. Teorię nazywamy rozstrzygalną, gdy istnieje algorytm pozwalający, dla dowolnego poprawnie zbudowanego zdania w jej języku, stwierdzić czy jest ono prawdziwe (należy do teorii), czy też nie. Zakresy pojęć „teoria zupełna" i „teoria rozstrzygalna" są niezależne. Umieszczony powyżej żart o rozstrzygalności każdej teorii zupełnej opierał się na przyjęciu dodatkowego założenia, że istnieje lista wszystkich twierdzeń danej teorii, które to założenie z reguły spełnione nie jest.

Trzeba w tym miejscu zauważyć, że pojęcie algorytmu (nazwa ukuta od łacińskiej wersji nazwiska Al Chwarizmiego, Uzbekistan, IX wiek) uzyskało precyzyjne znaczenie dopiero w związku z problematyką metamatematyczną (czyli już XX wiek). Wcześniej nie było to konieczne. Konieczność posiadania ścisłego pojęcia algorytmu występuje dopiero tam, gdzie pojawia się potrzeba udowodnienia nieistnienia metody rozstrzygającej jakiś problem masowy. Problem masowy to klasa problemów indywidualnych tego samego typu. Doniosłym przykładem jest tu dziesiąty problem Hilberta: czy istnieje algorytm rozstrzygający dla dowolnego równania diofantycznego, czy ma ono rozwiązanie w liczbach całkowitych. Każdemu równaniu odpowiada indywidualne pytanie: czy akurat to równanie ma rozwiązania całkowite? Dziesiąty problem Hilberta nie dotyczy teorii sformalizowanych, lecz bezpośrednio odnosi się do obiektów matematycznych, bez pośrednictwa języka. Nie jest to jednak zagadnienie z teorii liczb, lecz raczej z teorii algorytmów w zastosowaniu do określonej dziedziny przedmiotowej. Ta dystynkcja może się jednak zatrzeć, gdy zwiększy się jednorodność klasy problemów indywidualnych. Wiele zagadnień teorii liczb (i nie tylko) można bowiem interpretować jako problemy masowe.

Dziesiąty problem Hilberta został w 1970 roku rozstrzygnięty negatywnie przez Jurija Matijasewicza. Tak więc nigdy nie będzie algorytmu, który pozwoli na automatyczne rozwiązywanie równań algebraicznych w liczbach całkowitych.

Na przykład Wielkie Twierdzenie Fermata jest przecież klasą przypadków dla poszczególnych wykładników. Historia cząstkowego rozwiązywania tego zagadnienia „idzie" właśnie po wykładnikach. Fermat pytał o $x^n + y^n = z^n$. Sam udowodnił (przynajmniej tak sądzimy), że $x^4 + y^4 = z^4$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych (z wyłączeniem zera).

Od razu zorientowano się, że wszystko można zbadać zajmując się tylko wykładnikami będącymi liczbami pierwszymi (4 stanowi wyjątek, bo dla czynników pierwszych tej liczby równanie $x^n + y^n = z^n$ ma, oczywiście, rozwiązania). Euler odpowiedział dla $n = 3$. Dirichlet dla $n = 5$. Lamé dla $n = 7$. Kummer i Kronecker bardziej „hurtowo" dla wszystkich liczb pierwszych, dla których pierścień liczb całkowitych algebraicznych w ciele $\mathbf{Q}$ rozszerzonym o p-ty pierwiastek z jedności ma własność jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne. Kummer i Kronecker początkowo sądzili, że powyższa prawidłowość ma miejsce dla wszystkich liczb pierwszych, co rozstrzygałoby ostatecznie zagadnienie Fermata. Ale rychło (w ciągu niespełna roku) okazało się to złudne.



Nie pozostało więc nic innego, jak podzielić liczby na tzw. regularne (oznaczmy ich zbiór przez R_1) – gdzie metoda Kummera i Kroneckera jest skuteczna – oraz nieregularne. Kronecker następnie badał liczby nieregularne i dla niektórych z nich udowodnił nowymi środkami Wielkie Twierdzenie Fermata. Te liczby można by nazwać regularnymi drugiego rzędu, a ich zbiór oznaczyć przez R_2. Można teraz sobie wyobrazić dalsze tego typu podziały diadyczne. Jeśli to drzewo diadyczne okazałoby się skończone, to jest zatrzymało się na pewnym R_n, zagadnienie Fermata zostałoby rozstrzygnięte. Przypadek przeciwny sugeruje sytuację, którą można by określić jako praktyczną niedowiedlność ewentualnie prawdziwego twierdzenia matematycznego. Oczywiście, mogą istnieć inne podejścia, ale w nich wszystkich schemat krótszego lub dłuższego, skończonego lub nieskończonego drzewa rozwiązań cząstkowych pozostanie bez zmian. Jeśli teraz każde takie drzewo dla Wielkiego Twierdzenia Fermata jest nieskończone i zarazem twierdzenie to jest prawdziwe, to mielibyśmy przypadek zdania prawdziwego i absolutnie niedowiedlnego przez człowieka. Żeby je dowieść, człowiek potrzebowałby nieskończenie wielu kroków myślowych o charakterze twórczym, to zaś jest wykluczone przez skończoność czasową bytu ludzkiego. Zauważmy jeszcze, że powyższe rozważania nie odwołują się do pojęcia dowodu w ramach jakiegoś systemu sformalizowanego, lecz traktują dowód tak, jak to się robi w normalnej praktyce matematycznej.

Na zakończenie odpowiedzmy sobie jeszcze na pytanie, które prowokuje tytuł tego artykułu: po co filozofia matematyce, co jej może dać? Być może nic konkretnego, być może tylko lepsze rozumienie tego, co się robi niejako instynktownie. I tylko od subiektywnych zapatrywań zależy czy ktoś uzna to za dużo, czy mało.