Co to jest filozofia matematyki?

Roman MURAWSKI, Poznań

Celem tego artykułu jest próba odpowiedzi na pytanie tytułowe – a przy okazji również na pytanie, czy filozofia matematyki jest w ogóle potrzebna. Zrobimy to prezentując najpierw podstawowe problemy, którymi zajmuje się filozofia matematyki, a następnie opisując pokrótce różne próby odpowiedzi, które pojawiły się w historii.

Mówiąc ogólnie, można by powiedzieć, że filozofia matematyki jest filozoficzną refleksją nad matematyką jako nauką. Dawniej zajmowali się nią głównie filozofowie, zaś od przełomu XVIII i XIX wieku przechodzi ona stopniowo w ręce matematyków. Przyczyn tego upatrywać należy z jednej strony w oddzielaniu się matematyki od filozofii, a z drugiej w fakcie, że uprawianie filozofii matematyki wymaga specjalistycznej wiedzy matematycznej. Jest to więc dyscyplina z pogranicza matematyki i filozofii, można ją właściwie zaliczyć do szeroko rozumianych podstaw matematyki.

Pytania, które stawia filozofia matematyki, podzielić można na dwie grupy: pytania ontologiczne, a więc pytania dotyczące istnienia przedmiotów matematycznych oraz pytania epistemologiczne, czyli pytania dotyczące kwestii poznawczych, kwestii metod matematyki. Jakie więc konkretne problemy bada filozofia matematyki? Otóż pierwszym pytaniem, jakie należy zadać, jest pytanie o to, czym są właściwie przedmioty, które matematyka bada, o których mówi? Można odpowiedzieć, że przedmiotem matematyki są liczby, funkcje, zbiory, figury geometryczne. No dobrze, ale czym są właściwie liczby? Jak one istnieją? Czy istnieją obiektywnie, poza czasem i przestrzenią, czy tylko w umyśle matematyka? Jakie jest źródło tego, że wszyscy tak samo rozumiemy na przykład liczby naturalne? Z tymi pytaniami o istnienie przedmiotów matematycznych, o ich status ontologiczny, łączą się pytania o to, w jaki sposób możemy je poznawać, i dlaczego właśnie tak? Czy w matematyce należy stosować metody empiryczne czy intuicyjne, czy może wiedzę matematyczną tworzy się przez wgląd we własny umysł? Dlaczego wiedza matematyczna jest intersubiektywnie sprawdzalna? Dlaczego właściwie prawdy matematyki są niezmienne – twierdzenie raz udowodnione wchodzi na stałe do zbioru prawd matematycznych. Dlaczego za najlepszą dla matematyki uważa się metodę aksjomatyczną? Dlaczego przyjmuje się takie właśnie a nie inne aksjomaty, co decyduje o ich doborze? Która geometria jest lepsza – euklidesowa czy nieeuklidesowa? I co to znaczy „lepsza"? Prawdziwsza? Lepiej opisująca świat? Ale jaki świat? Jeśli przyjąć obie geometrie za równouprawnione, to dlaczego? Przecież są one wzajemnie sprzeczne! Co to właściwie znaczy, że dane twierdzenie matematyczne jest prawdziwe? Jakie jest kryterium prawdziwości w matematyce? Co to znaczy, że matematyka jest nauką ścisłą, nauką pewną? Co to jest poprawny dowód matematyczny? Jakie są kryteria tej poprawności? Czy do dowodzenia twierdzeń w matematyce można używać komputerów? Wiadomo, że istnieją twierdzenia, których dowieść umiemy (jak dotąd) tylko używając komputerów. Ale jeśli dopuścić takie metody, to wtedy dowód matematyczny przestaje być intersubiektywnie sprawdzalny (co uważa się za cechę istotną), a matematyka staje się w jakiś sposób nauką empiryczną posługującą się urządzeniami technicznymi. Z tym łączy się też inny problem (problem niejako odwrotny) – mianowicie problem zastosowań matematyki. Należy mianowicie postawić pytanie, dlaczego matematyka nadaje się do opisu świata, dlaczego można ją stosować w technice. W końcu trzeba wspomnieć też o problemie, którym interesuje się nie tylko matematyka, ale i filozofia, ba, nawet teologia – chodzi mianowicie o kwestię nieskończoności. Czym jest nieskończoność, czy i jak ona istnieje, czy i jak jest poznawalna?

Na przykład twierdzenie o czterech barwach głoszące, że każdą mapę narysowaną na kartce papieru można pokolorować za pomocą czterech barw w ten sposób, że państwa mające wspólne granice otrzymają różne kolory. Twierdzenie to udowodnione zostało w roku 1976, przy czym dowód w sposób istotny używa komputera (do sprawdzenia bardzo dużej liczby szczegółowych przypadków – tak dużej, że człowiek w ciągu całego swego życia nie byłby w stanie tego zrobić). Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do artykułów: K. Appel, W. Haken, *Zagadnienie czterech barw*, [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, red. L.A. Steen, Warszawa 1983 str. 170–198 oraz M. Lubański, *Komputerowa metoda dowodzenia?* Studia filozoficzne 7 (1984), str. 21–28.

Oto (dosyć chaotycznie zresztą zestawiona) lista pytań i problemów, które stają przed filozofią matematyki. Daje ona, miejmy nadzieję, wyobrażenie o tym, czym się ta dziedzina zajmuje. Należy teraz zapytać, jak filozofia matematyki na wymienione kwestie odpowiada. Zanim zaspokoimy ciekawość Czytelnika w tym względzie, zacytujmy Leszka Kołakowskiego, którego słowa usprawiedliwią obraną przez nas metodę. Otóż twierdzi on, iż *wszystko, co prawdziwie ważne w filozofii odkrywamy przez uczenie się jej historii; wielcy filozofowie uwrażliwiają nas na wielość punktów obserwacyjnych, z których można na świat spoglądać, i wielość niewspólmiernych języków, w których można go opisywać.*

Zawód błazna jest mi bliższy
Z Leszkiem Kołakowskim rozmawia (korespondencyjnie) Paweł Śpiewak, Res Publica 9/1988, str. 30.

Czytelnika chcącego zapoznać się z podstawowymi tekstami odsyłam do mojej antologii *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1986.

Przyjrzyjmy się więc pokrótce historii filozofii matematyki. Będzie to korzystne i z tego względu, że wszystkie istniejące dzisiaj kierunki i nurty filozofii matematyki w taki czy inny sposób nawiązują do koncepcji klasycznych.

Z filozofią matematyki spotykamy się już właściwie u początków filozofii europejskiej w ogóle. Wspomnijmy tu tylko o pitagorejczykach (VI–V w. p.n.e.). Głosili oni, że liczby są rzeczą pierwszą w całej naturze, pierwiastki liczb są pierwiastkami bytu, a niebiosa – harmonią i liczbą.

Systematyczna refleksja filozoficzna nad matematyką zaczyna się od Platona (427–347 p.n.e). Według niego istnieją dwa rodzaje bytów – niezmienne idee, które są określonymi przedmiotami istniejącymi poza czasem, przestrzenią i ludzkim poznaniem oraz zmienne rzeczy, które postrzegamy zmysłami, które są mniej realne niż idee i które są zaledwie nietrwałymi cieniami idei. Rzeczy tak się mają do idei, jak w stosunku do nich samych mają się ich cienie czy odbicia w wodzie. Idee istnieją prawdziwie, rzeczy zaś co najwyżej stają się.

Zastosowawszy tę ontologię do matematyki Platon twierdził, że przedmioty matematyki należą do świata idei. Istnieją więc poza czasem i przestrzenią, niezależnie od tego, czy człowiek je poznaje, czy też nie. Stąd też podstawą poznania matematycznego jest rozum (a nie zmysły i doświadczenie), a właściwą metodą matematyki jest metoda aksjomatyczna (Platon był bodaj pierwszym, który tę metodę obmyślił). Matematyk więc nie tworzy obiektów matematycznych, lecz jedynie odkrywa je i ich własności. Twierdzenia matematyki stosują się do rzeczy świata empirycznego (i nadają się do jego opisu), gdyż te ostatnie są podobne do idei (Platon mówił: uczestniczą w ideach) jako do swych wzorców.

Uczeń Platona, Arystoteles (384–322 p.n.e.) odwrócił porządek mistrza. Głosił on, że matematyka jest nauką nie o samodzielnych i samoistnych ideach, ale o obiektach wydobywanych z rzeczy świata empirycznego na drodze abstrakcji, czyli pewnego rodzaju idealizacji. Najpierw więc istnieje świat rzeczy, a dopiero wtórnie tworzymy w drodze odpowiednich procesów myślowych przedmioty matematyki. Idee są formami rzeczy i tkwią w samych tych rzeczach. Proces abstrakcji i idealizacji pozwala je z nich wydobyć i uczynić obiektem dalszych badań.

Stąd wynika już teza, że twierdzenia matematyki stosują się do obiektów empirycznych, ponieważ te ostatnie są przybliżeniami obiektów matematycznych. Im podobieństwo to jest lepsze, tym dokładniej dają się stosować tezy matematyki do opisu świata.

Arystotelesa bardziej interesowała struktura całych teorii niż pojedyncze twierdzenia. Twierdził, że konieczność przysługuje w matematyce nie poszczególnym twierdzeniom, ale związkom logicznym między zdaniami wyrażonym przez odpowiednie okresy warunkowe. Konieczne są więc jedynie stwierdzenia głoszące, że jeżeli pewne zdanie jest prawdziwe, to odpowiednie inne też musi być prawdziwe, a nie same zdania głoszące, iż jest tak a tak.

Największą jednak zasługą Arystotelesa dla filozofii matematyki było jasne sformułowanie problemu nieskończoności w matematyce. Rozróżnił on wyraźnie dwa rodzaje nieskończoności: nieskończoność potencjalną (możliwość nieograniczonego przedłużania pewnego procesu) i nieskończoność aktualną (byt nieskończony aktualnie istniejący). Utrzymywał, że ta ostatnia jest logicznie nie możliwa i w matematyce zbędna.

Jako ciekawostkę zauważmy na koniec, że Arystoteles dostrzegał też pierwiastek estetyczny w matematyce. W *Metafizyce* pisał: *Mylą się ci, którzy utrzymują, że przedmiotowi nauki matematyki obce jest piękno ... Głównymi elementami piękna są prawidłowość kompozycji, symetria i jasna określoność, które to cechy przysługują nauce matematyki w wysokim stopniu. Są one, rzecz jasna, przyczyną niejednego w tych naukach, i z tego względu należy poczytać ich źródło (tj. piękno) za jedną ze sprężyn tych nauk.*

Następne wieki nie przynoszą żadnych znaczących osiągnięć w filozofii matematyki, jeśli pominąć Euklidesa i jego *Elementy* (ok. 300 p.n.e.) będące niedościgłym i przez wiele stuleci naśladowanym wzorcem stosowania w matematyce platońskiej metody aksjomatyczno–dedukcyjnej, czy Proklosa (V w.) i jego neoplatoński komentarz do *Elementów* Euklidesa. Dopiero w czasach nowożytnych wraz z burzliwym i intensywnym rozwojem matematyki wzrasta też zainteresowanie filozofią matematyki. Na uwagę zasługują tu zwłaszcza Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) i Immanuel Kant (1724–1804).

Leibniz rozwinął ideę stworzenia uniwersalnego rachunku logicznego *characteristica universalis*. Miał to być język graficzny służący do wyrażania wszystkich pojęć nauki oraz metoda umożliwiająca rachunkowe niejako rozwiązywanie wszelkich problemów naukowych. O nadziejach, jakie z tym przedsięwzięciem wiązał, niech świadczy następujący cytat z jednej z jego prac: *A gdy to już nastąpi* (tzn. uda się urzeczywistnić ideę języka uniwersalnego – przypis mój, R. M.), *dwaj filozofowie, ilekroć powstanie spór, nie będą inaczej rozprawiać, aniżeli dwaj rachmistrze. Wystarczy, jeśli wezmą pióra do ręki, zasiądą do tablic i jeśli jeden drugiemu powie: Calculemus!* Leibnizowi nie udało się zrealizować idei *characteristica universalis*. Jako częściową realizację tego pomysłu można traktować logikę matematyczną stworzoną u progu XX wieku.

Leibniz jako pierwszy też rozróżnił prawdy rozumu od prawd faktycznych. Aksjomaty i twierdzenia matematyki zaliczał do prawd rozumu, czyli do prawd koniecznych, których prawdziwość jest zagwarantowana przez prawa logiki. Nie opierają się one na faktach, dotyczą nie faktów, lecz możliwości. Są prawdziwe we wszystkich „możliwych światach", tak jak prawa logiki, nie mówią o żadnym szczególnym rodzaju przedmiotów.

Immanuel Kant rozwinął rozróżnienie Leibniza dzieląc dalej prawdy faktyczne (nazywane przezeń zdaniami syntetycznymi) na zdania syntetyczne *a posteriori* (empiryczne) i zdania syntetyczne *a priori* (nieempiryczne). Twierdzenia matematyki czystej są według niego zdaniami syntetycznymi *a priori*. Jak jednak są one możliwe? Odpowiedź, jakiej Kant udzielił w *Krytyce czystego rozumu*, stanowiła rewolucję w całej filozofii. Otóż Kant twierdził, że twierdzenia matematyki czystej są możliwe, ponieważ czas i przestrzeń nie są czymś realnym, lecz są stałymi formami naszej zmysłowości, naszego oglądu, czyli są dodawane przez nasze zmysły do odbieranych przez nas wrażeń. Kant wyraźnie odróżniał konstrukcję obiektu i postulowanie jego istnienia. Na przykład można postulować istnienie sfery 5-wymiarowej (bo pojęcie to jest wewnętrznie niesprzeczne), ale nie można jej skonstruować (gdyż to wymaga już, by przestrzeń percepcyjna miała taką a nie inną strukturę). W konsekwencji więc Kant nie przeczył możliwości wewnętrznie niesprzecznych geometrii innych niż euklidesowa i twierdzenie, iż jego system został obalony przez powstanie geometrii nieeuklidesowych, jest błędne.

Jeśli chodzi o wyjaśnienie stosunku matematyki czystej i matematyki stosowanej, to Kant argumentował następująco. Twierdzenia matematyki czystej są zdaniami syntetycznymi *a priori*. Zdania matematyki stosowanej są zdaniami syntetycznymi *a posteriori*, gdy mówią o treści empirycznej doznań zmysłowych lub zdaniami syntetycznymi *a priori*, gdy mówią o przestrzeni i czasie.

Matematyka czysta mówi o strukturze przestrzeni i czasu niezależnie od materiału empirycznego, zaś matematyka stosowana dotyczy struktury przestrzeni i czasu wraz z wypełniającym je materiałem.

Przyjmując arystotelesowski podział nieskończoności Kant twierdził, że nieskończoność aktualna jest ideą rozumu, tzn. pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, ale niestosowalnym do doświadczenia zmysłowego.

Dla filozofii matematyki szczególne znaczenie ma druga połowa XIX wieku i pierwsze 30 lat wieku XX, kiedy to powstały zasadnicze koncepcje współczesnej filozofii matematyki. Spowodowane to było gwałtownym rozwojem samej matematyki, tendencjami do porządkowania i uściślania jej pojęć, powstaniem i rozwojem logiki matematycznej, stworzeniem geometrii nieeuklidesowych, a w końcu kryzysem (zwanym drugim) podstaw matematyki związanym z pojęciem nieskończoności. Stworzona przez Georga Cantora w latach 1874–1897 teoria mnogości, czyli teoria zbiorów nieskończonych bazująca na intuicyjnym pojęciu zbioru, okazała się sprzeczna. Powstała zatem konieczność nowego ugruntowania matematyki. Badania doprowadziły do wyłonienia się trzech zasadniczych propozycji zaradzenia trudnościom dając początek trzem głównym kierunkom współczesnej filozofii matematyki: logicyzmowi, intuicjonizmowi i formalizmowi.

Pierwszym kryzysem nazywa się w historii matematyki kryzys spowodowany wykryciem wielkości niewspółmiernych przez pitagorejczyków oraz trudnościami związanymi z pojęciem nieskończoności i ciągłości (por. paradoksy Zenona z Elei, np. Achilles i żółw, strzała, dychotomia).

Logicyzm głosi, że matematyka jest sprowadzalna do logiki, jest jej częścią – tzn. wszystkie pojęcia matematyki można zdefiniować *explicite* za pomocą pojęć czysto logicznych oraz wszystkie twierdzenia matematyki można wydedukować z praw logiki. Twórcą logicyzmu był Gottlob Frege (1848–1925), który pokazał, jak zredukować arytmetykę liczb naturalnych do logiki. Opierał się przy tym na pojęciu równoliczności zakresów pojęć, które rozumiał absolutystycznie i po platońsku. Stosowany przez niego system logiki okazał się jednak sprzeczny, co odkrył w roku 1901 Bertrand Russell (1872–1970). W związku z tym Bertrand Russell wraz z Alfredem N. Whiteheadem (1861–1947) zaproponowali w dziele *Principia mathematica* (t. 1–1910, t. 2–1912, t. 3–1913) nowe rozwiązanie, mianowicie redukcję arytmetyki liczb naturalnych do stworzonej przez siebie tzw. teorii typów (w której reprezentowali stanowisko antyplatońskie i nominalistyczne). Nie miała ona jednak charakteru czysto logicznego, konieczne było przyjęcie w niej pewnych aksjomatów pozalogicznych (np. tzw. aksjomatu sprowadzalności, aksjomatu nieskończoności postulującego istnienie nieskończenie wielu indywiduów czy w końcu aksjomatu wyboru). Rezultatem więc badań Russella i Whiteheada rozwijanych dalej przez licznych zwolenników logicyzmu była redukcja matematyki nie tyle do logiki, co do pewnego sformalizowanego systemu teorii mnogości. Wskazały one też elegancki sposób systematyzacji matematyki oraz przyczyniły się do rozwoju logiki matematycznej i podstaw matematyki.

Jego poglądy doskonale charakteryzuje wypowiedź na zebraniu w Berlinie w roku 1886: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

Druga próba rozwiązania trudności to intuicjonizm stworzony przez Leitzena E.J. Brouwera (1881–1966) i jego uczniów. Korzystał on z idei głoszonych przez Leopolda Kroneckera opierającego matematykę na pierwotnej intuicji liczby naturalnej oraz poglądów tzw. paryskiej szkoły intuicjonizmu (Baire, Borel, Lebesgue, Łuzin) przeciwstawiające się zbyt swobodnemu stosowaniu w analizie teorii zbiorów Cantora (zwłaszcza pewnika wyboru). Nawiązywał też do myśli Kanta – przede wszystkim do jego poglądu o aprioryczności czasu. Brouwer przeciwstawił się platonizmowi głosząc ontologiczną tezę konceptualizmu. Według niego matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną życiową aktywnością rozumu. U podstaw matematyki leży fundamentalna intuicja liczby naturalnej związana z intuicją apriorycznego czasu. Odrzucił nieskończoność aktualną twierdząc, iż nie ma zbiorów nieprzeliczalnych. Odrzucił też tzw. dowody niekonstruktywne twierdzeń egzystencjalnych, tzn. dowody twierdzeń typu „istnieje x mające taką to a taką własność” nie podające konstrukcji takiego obiektu x, a jedynie wyprowadzające jego istnienie z faktu, że założenie przeciwne (tzn. założenie, że taki obiekt x nie istnieje) prowadzi do sprzeczności. Według Brouwera takie właśnie dowody niekonstruktywne są źródłem wszystkich sprzeczności w matematyce. Twierdził również, że logika jest czynnością wtórnym w stosunku do matematyki, że logika opiera się na matematyce, a nie matematyka na logice (jak utrzymywali logicyści) oraz że wszelkie konstrukcje matematyczne są niezależne od jakiegokolwiek języka (język służy w matematyce jedynie do komunikowania myśli, czyli do umożliwienia innym i sobie śledzenia swoich własnych matematycznych idei).

Intuicjonizm dał początek rozmaitym prądom konstruktywistycznym. Ogólnie konstruktywizmem nazywamy kierunek żądający ograniczenia się do rozważania wyłącznie obiektów konstruowalnych i operacji konstruktywnych. Cechą łączącą te kierunki jest więc nie tyle wspólnota poglądów filozoficznych, co zainteresowanie pewnymi metodami w matematyce. Przykładami koncepcji konstruktywistycznych są: analiza obliczalna Banacha–Mazura, teoria algorytmów, konstruktywny formalizm Goodsteina. Prądy konstruktywistyczne są silnie związane z *computer science* i informatyką.

Trzeci główny kierunek współczesnej filozofii matematyki to formalizm stworzony przez Dawida Hilberta (1862–1943). Według Hilberta punktem wyjścia matematyki są liczby naturalne rozumiane jako liczebniki będące pewnymi układami znaków: 1, 11, 111, 1111,... Są one dane bezpośrednio i jasno, możemy więc dokładnie opisać związki między nimi. Tę część matematyki nazywał Hilbert matematyką finitystyczną, a jej twierdzenia realnymi. Nie budzą one żadnych wątpliwości, matematyka finitystyczna jest niesprzeczna, fakty bowiem i zdarzenia nigdy sobie nie przeczą. Ale w matematyce obok twierdzeń realnych są też twierdzenia idealne traktujące o nieskończoności aktualnej. Obok więc matematyki finitystycznej istnieje matematyka infinitystyczna i ona wymaga usprawiedliwienia i ugruntowania. Dla nieskończoności nie można znaleźć według Hilberta – a przyjmuje on tu stanowisko Kanta – żadnej rzeczowej podstawy, gdyż przekracza ona wszelkie doświadczenie. Z drugiej strony jest ona niezbędna w matematyce (Hilbert pisał: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können).*

Przekonujący dowód niesprzeczności matematyki powinien więc być przeprowadzony środkami finitystycznymi. Hilbert zaproponował w tym względzie cały program badań zwany dziś programem Hilberta. Pierwszy jego etap polegał na formalizacji matematyki (Hilbert miał tu na myśli przede wszystkim arytmetykę, analizę i teorię mnogości), tzn. ustaleniu pewnego sztucznego języka sformalizowanego, pewnych aksjomatów oraz pewnych reguł dowodzenia (odwołujących się tylko do kształtu napisów, a nie do ich treści). Przy tym układ aksjomatów powinien być tak dobrany, by dawał wystarczającą podstawę dla rozwiązania każdego problemu dającego się sformułować w języku danej teorii, czyli powinien być zupełny. W ten sposób twierdzeniami matematyki stają się te formuły naszego języka, dla których istnieje dowód formalny w oparciu o przyjęte aksjomaty i reguły wnioskowania. Przy tym dowód to ciąg skończony formuł, a więc napisów, czyli obiektów skończonych, zatem dowód to obiekt, który można badać metodami finitystycznymi. Stąd drugi etap programu Hilberta polegać miał na udowodnieniu metodami finitystycznymi niesprzeczności matematyki infinitystycznej, czyli na wykazaniu, że nie istnieją dwa dowody (tzn. ciągi skończone formuł, zatem „konkretnych i widzialnych przedmiotów"), z których jeden kończy się formułą A, a drugi jej negacją $\neg A$. Rozważania takie nie mieściły się w ramach żadnej gałęzi ówczesnej matematyki, Hilbert stworzył więc nową dyscyplinę nazywając ją teorią dowodu albo metamatematyką.

W ramach programu Hilberta uzyskano ciekawe wyniki dotyczące niesprzeczności pewnych fragmentów arytmetyki liczb naturalnych (Ackermann). Jednakże w roku 1931 matematyk wiedeński Kurt Gödel (1906–1978) udowodnił dwa twierdzenia, które pokazały, że program Hilberta jest nierealizowalny. Otóż Gödel udowodnił, że każdy niesprzeczny system sformalizowany zawierający w sobie arytmetykę liczb naturalnych i taki, że zbiór jego aksjomatów jest efektywnie rozpoznawalny (tzn. rekurencyjny), jest niezupełny. Runęły więc nadzieje na zbudowanie niesprzecznego, a zarazem zupełnego systemu podstaw matematyki. Co więcej, Gödel udowodnił również, że dowód niesprzeczności teorii aksjomatycznej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie może być przeprowadzony w metamatematyce nie operującej środkami wykraczającymi poza te, które mieszczą się w samej rozważanej teorii. Innymi słowy, za pomocą tego, co skończone, nie można usprawiedliwić tego, co nieskończone.

Wyniki Gödla obaliły program Hilberta, ale nie obaliły samej filozofii Hilberta. Zaczęto teraz rozszerzać zasób dopuszczalnych środków i badać, jakie środki są niezbędne, by udowodnić niesprzeczność tej czy innej teorii.

Zauważmy tu jeszcze, że u Hilberta abstrahowanie od intuicyjnej treści zdań matematycznych i ich formalizacja były tylko zabiegiem metodycznym służącym dowodzeniu niesprzeczności. Hilbert i formalizm nie redukowali matematyki do zbioru symboli bez treści i reguł gry na tych symbolach. Formalizacja była dla nich tylko środkiem badania preegzystujących teorii matematycznych. Takie tendencje skrajne, według których matematyka to tylko i wyłącznie zbiór systemów sformalizowanych, czyli zbiór napisów bez treści, pojawiły się dopiero później (np. H.B. Curry).

Po 1931 roku następuje pewien zastój w filozofii matematyki. Renesans zainteresowań tą dziedziną daje się zauważyć na początku lat sześćdziesiątych. Dalej dominują kierunki klasyczne, tzn. logicyzm, intuicjonizm, formalizm i platonizm (za głównego przedstawiciela tego ostatniego kierunku głoszącego, że obiekty matematyki istnieją niezależnie od czasu, przestrzeni i poznającego podmiotu, matematyk odkrywa je i ich własności, a nie tworzy, uważa się Kurta Gödla). Do głosu dochodzą też kierunki nowe próbujące przezwyciężyć ograniczenia kierunków dawnych. O ile bowiem te ostatnie stawiały sobie za zadanie rekonstrukcję matematyki w celu zbudowania jej podstaw, usprawiedliwienie i ugruntowanie jej, o tyle te pierwsze interesują się przede wszystkim rzeczywistą praktyką badawczą w matematyce, biorą pod uwagę element podmiotowy, kulturowy i historyczny w procesie tworzenia matematyki jako nauki. Tamte bazowały na założeniu, iż matematyka musi być, i w istocie jest, wiedzą pewną, nieobalalną i przy tym założeniu szukały dla niej ugruntowania. Nowe kierunki odrzucają to założenie. Są one reakcją na redukcjonistyczny i monistyczny charakter kierunków dawnych.

Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłam do mojego artykułu *„Humanizacja" matematyki, czyli o nowych prądach filozofii matematyki*, Studia filozoficzne 8 (1986), str. 67–79.

Jako przykład nowych tendencji w filozofii matematyki wspomnijmy tu teorię dowodu i refutacji Imre Lakatosa (1922–1974). Według niego matematyka rozwija się poprzez krytykę i korektę starych teorii, które nigdy nie są wolne od niejasności czy możliwości popełnienia błędu lub przeoczenia. Próbując rozwiązać jakiś problem szuka się jednocześnie dowodu i kontrprzykładów. Nowe dowody wyjaśniają stare kontrprzykłady, nowe kontrprzykłady podważają stare dowody. Matematyka jest nauką w sensie popperowskim, rozwija się poprzez sukcesywną krytykę i ulepszanie teorii oraz poprzez budowanie coraz to nowych i rywalizujących z sobą teorii.

Inny przykład nowego kierunku filozofii matematyki to koncepcja Reymonda Lewisa Wildera (1896–1982) matematyki jako systemu kulturowego.

Mimo pojawienia się nowych kierunków w filozofii matematyki (nie będących właściwie konkurencją dla kierunków dawnych, ale ich uzupełnieniem) dalej dominują wśród matematyków kierunki klasyczne. Monk twierdzi, że 65% matematyków to platonicy, 30% formaliści, zaś około 5% to intuicjoniści. Podział ten nie jest ścisły i jednoznaczny. Okazuje się bowiem, że „normalny" matematyk w swej pracy badawczej zachowuje się prawie zawsze jak platonik, a od święta, tzn. gdy rozważa problemy filozofii matematyki, jeśli w ogóle to czyni, jest zwolennikiem formalizmu. Rację ma więc chyba Smoryński, gdy – z przymrużeniem oka – pisze, iż 99,44% matematyków to platonicy!

Pokazaliśmy powyżej, czym zajmuje się filozofia matematyki, na jakie pytania szuka odpowiedzi oraz zarysowaliśmy najważniejsze próby rozwiązań podstawowych problemów, które pojawiły się w dziejach tej dyscypliny. Jaki morał wynika z naszych rozważań? Przede wszystkim ten, że filozofia matematyki nie daje odpowiedzi jednoznacznych, nie rozstrzyga wszystkiego do końca w sposób definitywny, lecz tylko pokazuje trudności i możliwe rozwiązania. Dlaczego jednak tak się dzieje, jakie jest tego źródło? Trudno na to odpowiedzieć jednoznacznie. Może źródłem jest tu specyfika samej filozofii i podejścia filozoficznego, czy może natura matematyki (którą Hugo Steinhaus określił krótko pisząc: *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*), a może natura prawdy (o której Johann Wolfgang Goethe powiedział, iż *podobna jest do bóstwa – nie ukazuje się bezpośrednio, musimy ją odgadywać z przejawów*).

Myśli tego typu obecne były zresztą w tej czy innej postaci od wieków. Por. na przykład, co o myślicielach z Chartres (XII wiek) pisze Otto von Simson: (...) *byli* [oni], *tak jak platończycy i pitagorejczycy wszystkich czasów, opętani przez matematykę; uważali ją za ogniwo, które łączy Boga i świat, za czarodziejski klucz, który otwiera dostęp do tajemnic Boga i świata* (*Katedra gotycka. Jej narodziny i znaczenie.* Warszawa 1989, str. 53).

I drugi morał. Czy filozofia matematyki jest w ogóle potrzebna i komu właściwie? Otóż można uprawiać matematykę nie interesując się zupełnie filozofią matematyki, a zadowalając się uzyskiwaniem (czy poznawaniem) coraz to nowych, bardziej wyrafinowanych wyników technicznych. I tak rzeczywiście wielu matematyków czyni. Wydaje się jednak, że jest to pewne zubożenie. Na poparcie tej tezy przytoczymy wypowiedzi dwóch matematyków i logików z przeszłości. Otóż Leibniz powiedział: *Dla matematyka równie koniecznością jest być filozofem, jak dla filozofa – matematykiem*, Frege zaś twierdził, iż *filozof, który nie zna zupełnie geometrii, jest tylko półfilozofem, a matematyk, któremu brak żyłki filozoficznej, jest tylko półmatematykiem.*