Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na L Szkole Matematyki Poglądowej, *(Nie)zależność*, Nadarzyn, styczeń 2013.

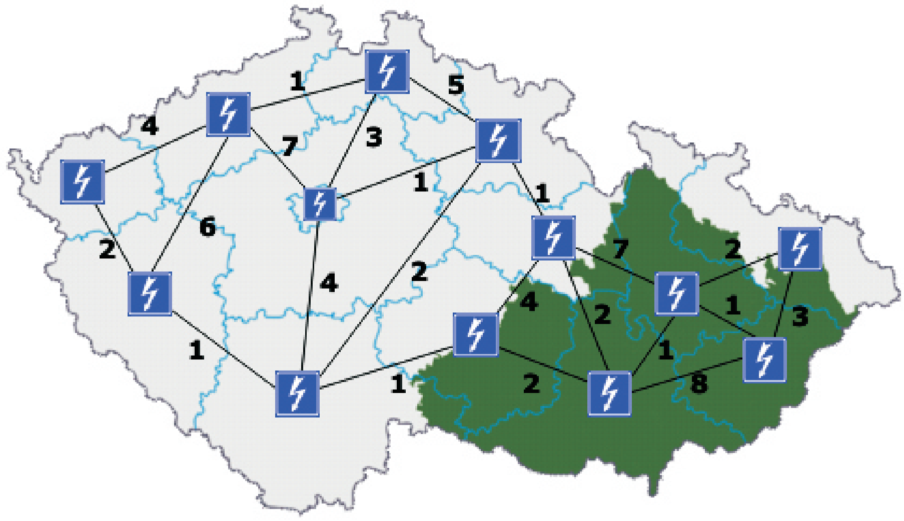
Kiedy zachłanność popłaca?

Zofia MIECHOWICZ, Zielona Góra

Uniwersytet Zielonogórski

Problem praktyczny

W 1926 roku czeski matematyk Otakar Boruvka stanął przed zadaniem zaprojektowania sieci elektrycznej obejmującej teren Czech i Moraw. Chodziło o połączenie ze sobą szeregu rozmieszczonych w wybranych wcześniej punktach trafostacji w taki sposób, żeby stworzyć spójną sieć oraz aby koszt całości inwestycji był jak najmniejszy. Problem ten bardzo łatwo zamodelować używając języka teorii grafów. Wystarczy, że trafostacje potraktujemy jak wierzchołki grafu, natomiast jego krawędziom będą odpowiadać wszystkie potencjalne połączenia między trafostacjami. Koszt poprowadzenia każdego z połączeń możemy oznaczyć przez przyporządkowanie wagi do odpowiedniej krawędzi.



Rysunek 1.

Problem, przed którym stanął Boruvka sprowadza się więc do wyznaczenia w danym grafie minimalnego (o łącznej sumie wag możliwie najmniejszej) drzewa rozpinającego, czyli takiego podgrafu, który będzie spójny, nie będzie zawierał cykli (jest to zupełnie naturalne wymaganie, jeżeli chcemy minimalizować koszt) oraz obejmie wszystkie wierzchołki grafu. Boruvka podał zaskakująco prosty algorytm na rozwiązanie tego problemu. Mając daną sieć wszystkich możliwych połączeń (graf z przypisanymi krawędziom wagami) na każdym etapie działania algorytmu wybieramy to, co jest akurat w tym momencie najlepsze i nie przejmujemy się zupełnie tym, co będzie dalej!

Algorytm

1) Określmy zbiory T i S. Umieśćmy w zbiorze T wszystkie wierzchołki grafu. Niech $S = \emptyset$

2) Dopóki T ma więcej niż jedną składową spójności:

   – dla każdej składowej spójności znajdź najtańszą krawędź e łączącą tę składową z wierzchołkiem poza nią i przypisz $S = S \cup \{e\}$

   – znajdź najtańszą krawędź $e \in S$ i dodaj ją do zbioru T

3) Zwróć T.

Taki algorytm nazywa się w matematyce zachłannym i o dziwo, w tym przypadku daje rozwiązanie optymalne. Boruvka, jako matematyk, nie tylko sformułował algorytm, ale również podał dowód jego optymalności. Podobne algorytmy, zupełnie niezależnie, zaproponowali Joseph Kruskal, Vojtech Jarnik, Robert Prim i Edsger Dijkstra. Mimo że to Boruvka był pierwszy mało kto dziś pamięta jego nazwisko, a w literaturze pojawiają się częściej algorytmy Prima i Dijkstry. Naturalnym pytaniem, które nasuwa się matematykowi w takim przypadku jest: kiedy taki prymitywny algorytm daje optymalne rozwiązanie? Cóż specjalnego jest w tej grafowej strukturze, że pozwala zupełnie nie przejmować się przyszłością? I jakie inne obiekty mają podobną własność?

Istota niezależności

W 1935 roku amerykański matematyk Hassler Whitney postawił przed sobą zadanie wyabstrahowania ze znanych obiektów matematycznych esencji pojęcia niezależności. Wziął na warsztat znane wszystkim doskonale przestrzenie wektorowe i z otrzymanego ekstraktu stworzył nowy obiekt matematyczny. Obiekt ten nazwał matroidem. Od angielskiego macierz — matrix — matroid.

Matroid według klasycznej definicji Whitneya to pewien zbiór skończony E, wraz z wyszczególnioną rodziną jego podzbiorów $\mathbb{I}$, która spełnia następujące warunki:

- $\mathbb{I}$ jest niepusta (lub równoważnie: zbiór pusty należy do $\mathbb{I}$).
- $\mathbb{I}$ jest monotoniczna ze względu na branie podzbiorów, to znaczy jeżeli jakiś zbiór należy do $\mathbb{I}$, to każdy jego podzbiór również.
- Jeżeli dwa zbiory X, Y należą do $\mathbb{I}$, oraz $|X| = |Y| + 1$, to zawsze znajdziemy w X taki element x nienależący do Y, że $Y \cup \{x\} \in \mathbb{I}$ (tak zwany aksjomat wymiany).

Zbiór E nazywać będziemy nośnikiem matroidu, rodzinę $\mathbb{I}$ rodziną zbiorów niezależnych, a każdy zbiór do niej należący będziemy nazywać niezależnym. O dziwo matroid nie okazał się być zupełnie abstrakcyjnym tworem, którego trudno szukać w znanym nam, matematycznym świecie. Okazuje się, że cała masa obiektów kombinatorycznych to właśnie matroidy! Przyjrzyjmy się kilku typowym przedstawicielom tego gatunku.

Matroid 1. Macierzowy

Pierwszy przykład matroidu podany oryginalnie przez Whitneya. Rozważmy dowolną macierz o wymiarach $n \times m$ i popatrzmy na jej kolumny jak na wektory przestrzeni n wymiarowej. Możemy przyjąć jako nośnik matroidu zbiór indeksów kolumn $E = \{1, 2, \ldots, m\}$, natomiast za zbiory niezależne uznać te, dla których odpowiednie kolumny tworzą zbiory wektorów niezależnych. Monotoniczność tak określonej rodziny zbiorów niezależnych bardzo łatwo dostrzec. Prawdziwość aksjomatu wymiany gwarantuje dobrze znane twierdzenie Steinitza o wymianie.

Matroid 2. Jednorodny

Niech E będzie dowolnym skończonym zbiorem. Matroidem k-jednorodnym ($k \leqslant |E|$) nazwiemy matroid, którego nośnikiem jest zbiór E natomiast zbiorami niezależnymi takie jego podzbiory, których liczność nie przekracza k. Bardzo łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany obiekt spełnia wszystkie warunki konieczne do bycia matroidem.

Matroid 3. Grafowy

Niech dany będzie dowolny graf $G = (V, E)$. Możemy przyjąć zbiór krawędzi grafu za nośnik matroidu. Zbiorami niezależnymi będą te jego podzbiory, które nie zawierają cyklu (drzewa i lasy). Tutaj znów monotoniczność spełniona jest w sposób oczywisty. To, że spełniony jest aksjomat wymiany udowodnimy jako prosty lemat.

Lemat 1. *Niech dany będzie graf* $G = (V, E)$*. Dla dowolnych zbiorów acyklicznych* $X, Y \subset E$*, takich że* $|X| = |Y| + 1$ *istnieje taka krawędź* $e \in E(X) \setminus E(Y)$*, że* $Y \cup \{e\}$ *jest acykliczny.*

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

- Zbiór X zawiera co najmniej jeden wierzchołek x, który nie należy do Y. Zbiór Y powiększony o krawędź, której końcem jest x w dalszym ciągu jest acykliczny.
- Zbiór $V(X)$ jest podzbiorem zbioru $V(Y)$. Wtedy zbiór X ma mniej spójnych składowych niż zbiór Y. Na mocy zasady szufladkowej istnieje więc taka spójna składowa X, która zawiera wierzchołki co najmniej dwóch składowych Y. Istnieje więc w X krawędź, która łączy dwie spójne składowe w Y. Zbiór Y powiększony o tę krawędź pozostaje acykliczny.

□

Kiedy warto być zachłannym?

Być może części Czytelników wydaje się, że do tej pory przedstawiliśmy dwa zupełnie niezwiązane ze sobą zagadnienia. Z jednej strony szczególny rodzaj algorytmu, zwany zachłannym, który wyłonił się z zagadnień praktycznych i stosowany jest głównie do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych. Z drugiej strony zupełnie abstrakcyjny obiekt matematyczny, który zrodziła powszechna wśród matematyków potrzeba uogólniania. Tymczasem przepiękne twierdzenie Rado-Edmondsa łączy te dwa światy w sposób ścisły. Żeby móc je przytoczyć w pełnym brzmieniu uściślijmy sformułowaną wcześniej w języku potocznym definicję algorytmu zachłannego. W tym celu przedstawimy, podany w 1981 roku przez Roberta Bixbiego, ogólniejszy problem optymalizacyjny.

Niech $\mathbb{E}$ będzie zbiorem skończonym, natomiast $\mathbb{I}$ będzie niepustą i monotoniczną ze względu na inkluzję rodziną jego podzbiorów. Przyporządkujmy elementom zbioru E wagi będące liczbami rzeczywistymi (czyli określmy pewną funkcję $w : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$). Dla danego zbioru $X \subset \mathbb{E}$ przez jego wagę będziemy rozumieć sumę wag wszystkich elementów, które do niego należą.

$$w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$$

Przyjmijmy ponadto, że $w(\emptyset) = 0$.

Problem 1. *Znaleźć zbiór maksymalny (ze względu na inkluzję)* $B \in \mathbb{I}$ *o najmniejszej wadze.*

Widać, że przedstawiony wcześniej problem elektryfikacji jest szczególnym przypadkiem tak sformułowanego ogólnego problemu, gdzie za zbiór $\mathbb{E}$ przyjmujemy zbiór krawędzi grafu obrazującego sieć połączeń, wagi stanową koszty poprowadzenia połączeń na poszczególnych odcinkach, natomiast zbiór $\mathbb{I}$ to zbiór acyklicznych podzbiorów zbioru krawędzi grafu. *Algorytmem zachłannym* będziemy nazywać algorytm o następującym przebiegu:

Algorytm

1) Przypisujemy $X_0 = \emptyset$ oraz $j = 0$.
2) Jeżeli zbiór E zawiera co najmniej jeden taki element $e \notin X_j$, że po dodaniu go do zbioru X_j otrzymamy zbiór należący do $\mathbb{I}$, to wybieramy taki element e_{j+1} o najmniejszej wadze, przypisujemy $X_{j+1} = X_j \cup \{e_j + 1\}$ i przechodzimy do kroku 3). W przeciwnym wypadku przypisujemy $B = X_j$ i przechodzimy do kroku 4).
3) Zwiększamy wartość j o 1 i przechodzimy do kroku 2).
4) Zwróć B.

Mając ścisłą definicję algorytmu zachłannego możemy sformułować twierdzenie, które nierozerwalnie połączy go ze światem matroidów.

Twierdzenie 1 (Rado-Edmonds)**.** *Niech* $\mathbb{E}$ *będzie zbiorem skończonym, natomiast* $\mathbb{I}$ *pewną rodziną jego podzbiorów. Para* (E, I) *jest matroidem, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

- $\mathbb{I}$ *jest niepusta (lub równoważnie: zbiór pusty należy do* $\mathbb{I}$*).*
- $\mathbb{I}$ *jest monotoniczna ze względu na branie podzbiorów, to znaczy jeżeli jakiś zbiór należy do* $\mathbb{I}$*, to każdy jego podzbiór również.*
- *Dla dowolnej funkcji wag* $w : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *algorytm zachłanny zwraca maksymalny ze względu na inkluzję zbiór należący do* $\mathbb{I}$ *o najmniejszej wadze.*

Możemy więc przyjąć za definicję matroidu stwierdzenie, że jest to taka monotoniczna struktura, na której algorytm zachłanny daje optymalne rozwiązanie! Ten zaskakujący fakt jest tylko jednym z wielu przykładów na to, że nie powinniśmy dzielić matematyki na „czystą" i stosowaną, i tylko kwestią czasu jest, kiedy najbardziej nawet abstrakcyjne pojęcia matematyczne znajdą zastosowanie w realnym świecie.