Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLIX Szkole Matematyki Poglądowej, *Wyjątki*, Nadarzyn, sierpień 2012.

Zbiory całkowicie nieprostowalne

Marta SZUMAŃSKA, Warszawa

Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Ten tekst będzie dotyczył dość wyjątkowej rodziny zbiorów jednowymiarowych. Hasło „zbiór jednowymiarowy” w pierwszej kolejności wywołuje skojarzenie z odcinkiem, łamaną lub krzywą gładką. Zbiory całkowicie nieprostowalne, bo o nich tu będzie mowa, od wspomnianych obiektów różnią się właściwie wszystkim (poza wymiarem). Zbiory te są bardzo nieregularne i bardzo rozproszone. Mimo iż mają jednowymiarową miarę dodatnią, to ich przecięcia z dowolną krzywą gładką mają miarę zero, czyli z perspektywy gładkich obiektów jednowymiarowych zbiory całkowicie nieprostowalne są nieodróżnialne od zbiorów miary zero.

Zbiory całkowicie nieprostowalne mają dość zaskakujące własności, więc choćby dlatego warto im się bliżej przyjrzeć. Ale nie jest to jedyny powód. Odgrywają one niemałą rolę we współczesnej matematyce, pojawiły się między innymi w sformułowaniu Hipotezy Vitushkina, której rozwiązanie absorbowało uwagę analityków przez ponad 30 lat. Sformułowanie tej hipotezy było wynikiem analizy problemu postawionego przez Painlevégo pod koniec XIX wieku.

Miara Hausdorffa.

Aby zdefiniować zbiory nieprostowalne, potrzebna nam będzie miara określona na podzbiorach $\mathbb{R}^n$, bardziej wrażliwa niż n-wymiarowa miara Lebesgue'a $\mathcal{L}^n$, pozwalająca wyróżnić spośród wszystkich zbiorów $\mathcal{L}^n$–miary zero zbiory o skończonej i dodatniej długości i która dla krzywych gładkich pokrywa się z ich długością. Taką miarę można by postrzegać jako uogólnienie pojęcia długości na szerszą klasę zbiorów. Właśnie takie własności ma jednowymiarowa miara Hausdorffa.

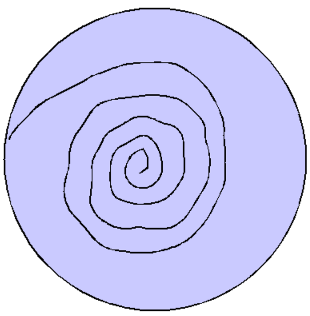
Definicja 1. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$, zaś*

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(A_i) \ |A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,\ \operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta\Big\}.$$

Jednowymiarową miarą Hausdorffa zbioru A nazywamy

$$\mathcal{H}^1(A) := \lim_{\delta\to 0+} \mathcal{H}^1_\delta(A). \tag{1}$$

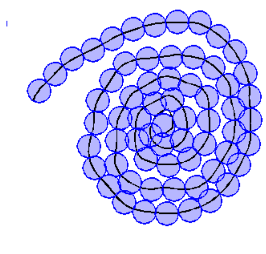
Rys. 1. Dla dowolnie długiej krzywej γ zawartej w dysku jednostkowym $\mathcal{H}^1_1(\gamma) \leqslant 1$.



Wyznaczając $\mathcal{H}^1_\delta(A)$ minimalizujemy sumę średnic zbiorów (o średnicach nieprzekraczających δ) pokrywających zbiór A. Dla dużych wartości δ wielkość $\mathcal{H}^1_\delta$ nie jest dobrym przybliżeniem „długości” zbioru, nawet gdy zbiór jest regularny. Weźmy na przykład spiralną krzywą S zawartą w dysku jednostkowym. Wtedy $\mathcal{H}^1_1(S) \leqslant 1$ niezależnie od tego jak długa jest spirala S. Zauważmy jednak, że gdy zmniejszamy $\delta > 0$, to wielkość $\mathcal{H}^1_\delta$ coraz lepiej przybliża długość, co dobrze widać przypadku krzywych gładkich; długość takiej krzywej zawartej w kuli o dostatecznie małym promieniu r i środku leżącym na krzywej nie może się znacząco różnić od $2r$.

Zauważmy jeszcze, że granica we wzorze (1) zawsze istnieje. Istotnie, $\mathcal{H}_\delta(A)$ jest niemalejącą funkcją zmiennej δ, gdyż zmniejszając δ zawężamy klasę dopuszczalnych pokryć, po których brane jest infimum.

Rys. 2. Jednak, gdy zmniejszamy dopuszczalną długość średnic zbiorów pokrywających γ wielkość $\mathcal{H}^1_\delta(\gamma)$ staje się bliższa długości krzywej.



W tym momencie warto jeszcze wspomnieć, że analogicznie definiuje się s-wymiarową miarę Hausdorffa dla dowolnego $s > 0$, tzn.

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0+} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(A_i))^s \ |\ A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,\ \operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta\Big\}.$$

Dla $s = 2$ miara Hausdorffa $\mathcal{H}^s$ jest uogólnieniem, czy też rozszerzeniem na szerszą klasę zbiorów, pojęcia pola powierzchni, zaś $\mathcal{H}^3$ można traktować jak „uogólnioną objętość”.

Podstawowe własności miar Hausdorffa zawiera poniższe twierdzenie. Dowody zebranych w nim faktów można znaleźć w [2] lub [4].

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{H}^s$ oznacza s–wymiarową miarę Hausdorffa. Wówczas:*

(i) dla dowolnego s miara $\mathcal{H}^s$ jest borelowska, tzn. wszystkie zbiory borelowskie są mierzalne,

(ii) jeśli $m \in \mathbb{N}$, to miara $\mathcal{H}^m$ określona na $\mathbb{R}^m$ pokrywa się z przeskalowaną miarą Lebesgue'a $\mathcal{L}^m$, tzn.

$$\exists_{c(m)} \text{ taka, że } \forall_{A \in \mathbb{R}^m} \ \mathcal{H}^m(A) = c(m)\mathcal{L}^m(A),$$

(iii) dla dowolnego $s > 0$ miara $\mathcal{H}^s$ jest niezmiennicza ze względu na izometrie,

(iv) jeśli λA oznacza obraz zbioru A w jednokładności o skali λ, to dla dowolnego $s > 0$ zachodzi równość $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$,

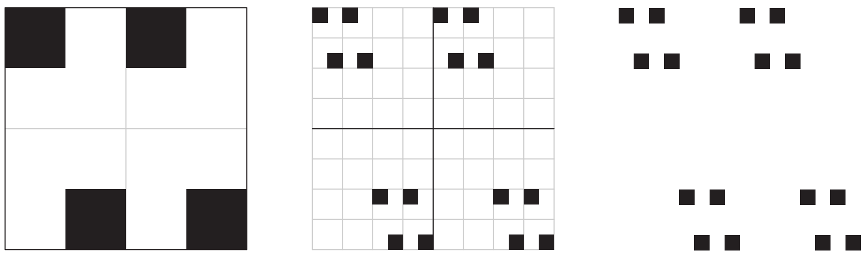
(v) jeśli $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem lipschitzowskim ze stałą L, tzn. $\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|$, to dla dowolnego $A \in \mathbb{R}^m$ i $s > 0$

$$\mathcal{H}^s(A) \leqslant L^s \mathcal{H}^s(A).$$

Bieżący paragraf zakończymy wyznaczeniem miary Hausdorffa zbioru typu Cantora, który ze względu na swoją rozproszoną postać bywa nazywany „pyłem Cantora” (ang. *Cantor dust*). W dalszej części artykułu udowodnimy, że jest to zbiór całkowicie nieprostowalny.

Konstrukcja zbioru, jak to zazwyczaj w przypadku zbiorów typu Cantora bywa, przebiega iteracyjnie. Wyjściowy zbiór C_1 składa się z czterech kwadratów o boku 1/4 rozmieszczonych odpowiednio w obrębie kwadratu o boku 1 (tak jak na rysunku 3a). W pierwszym kroku zastępujemy każdy z kwadratów należących do C_1 czterokrotnie zmniejszoną kopią zbioru C_1. Otrzymujemy w ten sposób zbiór C_2. Aby wygenerować zbiór C_3 zastępujemy każdy z kwadratów składających się na zbiór C_1 czterokrotnie pomniejszoną kopią zbioru C_2; ogólnie zbiór C_n otrzymujemy poprzez zastąpienie każdej ze składowych zbioru C_1 zbiorem $4^{-1}C_{n-1}$. Zbiór „pył Cantora” jest przecięciem opisanej powyżej zstępującej rodziny zbiorów zwartych $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Rys. 3: Pierwsze dwa kroki konstrukcji zbioru C (pyłu Cantora).



3a. Zbiór C_1 i linie pomocniczne) 3b. Zbiór C_2 i linie pomocniczne) Zbiór C_2

Konstrukcję zbioru C możemy również opisać wykorzystując układ czterech funkcji. Wystarczy wziąć

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \Big(0, \frac{3}{4}\Big), \quad f_2(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big),$$
$$f_3(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \Big(\frac{1}{4}, 0\Big), \quad f_4(x, y) = \frac{1}{4}(x, y) + \Big(\frac{3}{4}, 0\Big)$$

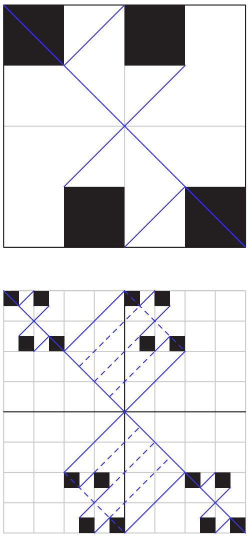
oraz

$$C_0 = [0, 1]^2, \quad C_n = \bigcup_{i=1}^{4} f_i(C_{n-1}) \quad \text{i} \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Wyznaczmy $\mathcal{H}^1(C)$. W tym celu zauważamy, że $C \subset C_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz że zbiór C_n składa się z 4^n kwadratów o boku $1/4^n$. Dla dowolnego n prawdziwa jest zatem nierówność

$$\mathcal{H}^1_{\sqrt{2}/4^n}(C) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(A_i) \; | C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \ \operatorname{diam}(A_i) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4^n} \right\} \leqslant \sqrt{2}.$$

Rys. 4. Rzut zbiorów C_1 i C_2 na przekątną d_1.



By uzyskać odpowiednie oszacowanie miary zbioru C wystarczy zauważyć, że

$$\mathcal{H}^1(C) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^1_\delta(C) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{H}^1_{\sqrt{2}/4^n}(C) \leqslant \sqrt{2}.$$

Aby wykazać, że $\mathcal{H}^1(C) \geqslant \sqrt{2}$ wykorzystamy własność miary Hausdorffa wspomnianą w punkcie *(v)* Twierdzenia 1 oraz oczywisty fakt mówiący, że rzut ortogonalny jest przekształceniem nieoddalającym, czyli lipschitzowskim ze stałą $L = 1$. Niech $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oznacza rzut ortogonalny na prostą $y = -x + 1$, czyli na prostą zawierającą przekątną d_1 kwadratu (rys. 4). Zauważmy, że obrazem zbioru C we wspomnianym rzucie jest przekątna d_1. Istotnie, $P(C_n) = d_1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, czyli dla każdego $x \in d_1$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $y_n \in C_n$ taki, że $P(y_n) = x$. Z ciągu y_n możemy wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu $y \in C$, zatem dzięki ciągłości rzutu $P(y) = x$, skąd wnioskujemy, że $P(C) = d_1$. Mamy więc

$$\sqrt{2} \leqslant \mathcal{H}^1(P(C)) \overset{(v)}{\leqslant} \mathcal{H}^1(C),$$

dzięki czemu ostatecznie stwierdzamy, że $\mathcal{H}^1(C) = \sqrt{2}$.

Zbiory całkowicie nieprostowalne.

Zbiory całkowicie nieprostowalne (ang. *purely unrectifiable sets*) najlepiej poznawać zestawiając ich własności z własnościami zbiorów prostowalnych. Zacznijmy więc od następującej definicji.

Krzywa klasy C^1, to taka, której parametryzacja $\Gamma : I \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^1, której pochodna nie znika (tzn. $\|\Gamma'(x)\| \neq 0$) i jest funkcją ograniczoną.

Definicja 2. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, taki że $\mathcal{H}^1(A) < \infty$ nazywamy zbiorem prostowalnym jeśli istnieje przeliczalna rodzina krzywych $(\gamma_i)_{i \in N}$ klasy C^1 takich, że*

$$\mathcal{H}^1\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i\Big) = 0.$$

Zatem zbiór prostowalny to taki, który, z dokładnością do zbioru miary zero, można pokryć przeliczalną rodziną krzywych klasy C^1. W przypadku zbiorów całkowicie nieprostowalnych rzecz ma się zupełnie inaczej — są to zbiory, których przecięcie z dowolną krzywą klasy C^1 ma miarę zero, a więc nie tylko nie możemy pokryć zbioru przeliczalną rodziną krzywych gładkich, ale prawie cały (w sensie miary) zbiór pozostaje poza dowolnie wybraną przeliczalną rodziną takich krzywych.

W najczęściej spotykanej w literaturze definicji zbiorów prostowalnych i całkowicie nieprostowalnych, zamiast krzywych klasy C^1 pojawiają się krzywe lipschitzowskie. W tym artykule odwołujemy się do mniej popularnej definicji, ze względu na jej przystępniejszą i bardziej intuicyjną postać. Dowód równoważności obu definicji opiera się na twierdzeniu Rademachera o różniczkowalności p.w. funkcji lipschitzowskich i twierdzeniu Whitneya o przedłużaniu funkcji klasy C^1.

Definicja 3. *Zbiór $E \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ nazywamy zbiorem całkowicie nieprostowalnym jeśli dla dowolnej krzywej γ klasy C^1*

$$\mathcal{H}^1(E \cap \gamma) = 0.$$

Oczywiście zbiór, który nie jest prostowalny nie musi być całkowicie nieprostowalny. Suma mnogościowa zbioru prostowalnego i całkowicie nieprostowalnego, nie jest ani prostowalna ani całkowicie nieprostowalna. Okazuje się, że każdy zbiór o skończonej jednowymiarowej mierze Hausdorffa można przedstawić w postaci wspomnianej sumy.

Twierdzenie 2. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o skończonej mierze $\mathcal{H}^1(A) < \infty$. Wówczas istnieje zbiór prostowalny A_p oraz zbiór całkowicie nieprostowalny A_{cn} takie, że*

$$A = A_p + A_{cn}.$$

Dowód powyższego twierdzenia jest nietrudny.

Dowód. Oznaczmy

$$M := \sup\{\mathcal{H}^1(A \cap B) \mid B\text{–prostowalny podzbiór } \mathbb{R}^n\}.$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór prostowalny B_n taki, że $\mathcal{H}^1(A \cap B_n) = M - 1$. Wówczas zbiór $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ jest prostowalny i $\mathcal{H}^1(B \cap A) = M$. Przyjmujemy $A_p := A \cap B$. Musimy jeszcze wykazać, że zbiór $A_{cn} := A \setminus A_p$ jest całkowicie nieprostowalny. Gdyby jednak nie był, to istniałaby krzywa gładka γ, taka że $\mathcal{H}^1(A_{cn} \cap \gamma) > 0$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż $B \cup \gamma$ jest prostowalny, a $\mathcal{H}^1\big((B \cup \gamma) \cap A)\big) > M$. □

Przedstawimy teraz nieco inną charakteryzację zbiorów prostowalnych i całkowicie nieprostowalnych. Dla $v \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy przez P_v rzut ortogonalny na prostą $l = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ (alternatywnie będziemy oznaczać go przez P_l). Wykażemy, że zbiory całkowicie nieprostowalne na płaszczyźnie właściwie nie rzucają cienia, tzn. ich rzuty na znakomitą większość prostych mają miarę zero. Poniższe twierdzenie [4, Tw. 18.1] wyraża fakt ogólniejszy — charakteryzuje zbiory całkowicie nieprostowalne w $\mathbb{R}^n$ za pomocą miar ich rzutów na typowe proste.

Twierdzenie 3. *Niech A będzie $\mathcal{H}^1$–mierzalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wówczas*

- *zbiór A jest całkowicie nieprostowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

  $$\mathcal{H}^1\big(P_v(A)\big) = 0 \text{ dla p.w. } v \in S^{n-1} \text{ (w sensie miary powierzchniowej),}$$

- *zbiór A jest prostowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla jego dowolnego mierzalnego podzbioru B o dodatniej mierze $\mathcal{H}^1(B) > 0$*

  $$\mathcal{H}^1\big(P_v(B)\big) > 0 \text{ dla p.w. } v \in S^{n-1} \text{ (w sensie miary powierzchniowej).}$$

Warto zwrócić uwagę na postać powyższego twierdzenia w przypadku dwuwymiarowym. Udowodnimy następujący fakt.

Twierdzenie 4. *Niech $A \subset \mathbb{R}^2$. Jeśli istnieje krzywa γ klasy C^1 taka, że $\mathcal{H}^1(\gamma \cap A) > 0$, to*

$$\mathcal{H}^1(P_l(A)) > 0$$

dla wszystkich, poza co najwyżej jedną, prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Wynikają stąd natychmiast następujące wnioski.

Wniosek 1. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem prostowalnym takim, że $0 < \mathcal{H}^1(A) < \infty$, to $\mathcal{H}^1(P_l(A)) > 0$, dla wszystkich, poza być może jedną, prostą przechodzącą przez zero.*

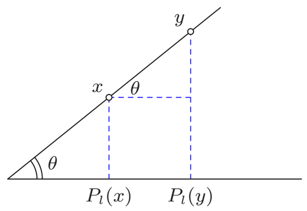
Dualnie, dla zbiorów całkowicie nieprostowalnych:

Wniosek 2. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem całkowicie nieprostowalnym takim, że $0 < \mathcal{H}^1(A) < \infty$, to $\mathcal{H}^1(P_l(A)) = 0$, dla wszystkich, poza być może jedną, prostą przechodzącą przez zero.*

Dowód Twierdzenia 4 nie jest trudny. Opiera się na lemacie, który wykorzystuje specyfikę przypadku dwuwymiarowego.

Lemat 1. *Niech $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ będzie krzywą klasy C^1. Wówczas dla dowolnego $t \in I$ i dla każdej prostej l, która nie jest prostopadła do $\gamma'(x)$, istnieje taka $\delta > 0$, że rzut ortogonalny $P_l : \mathbb{R}^2 \to l$ obcięty do łuku krzywej $\gamma_\delta^t := \gamma(t - \delta, t + \delta)$ jest funkcją odwracalną, a przekształcenie odwrotne $P_l^{-1} : P_l(\gamma_\delta) \to \gamma_\delta$ jest funkcją lipschitzowską, tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P_l(\gamma_\delta^t)$ zachodzi nierówność*

$$\|P_l^{-1}(x) - P_l^{-1}(y)\| \leqslant c\|x - y\|.$$



$\|P_l(x) - P_l(y)\| = \cos\theta\|x - y\|$

Dowód Lematu 1. Zauważmy, że jeśli kąt θ między prostą l a wektorem $x - y$ jest mniejszy niż $\pi/2$, to $\|P_l(x) - P_l(y)\| \geqslant \cos\theta\|x - y\|$. Wykażemy, że dla argumentów u, v dostatecznie bliskich t kąt między prostą l a wektorem $\gamma(u) - \gamma(v)$ jest oddzielony od $\pi/2$. Jest tak w istocie, gdyż dla dowolnych argumentów u, v istnieje punkt $\xi \in [u, v]$ taki, że $\gamma'(\xi) \parallel (\gamma(u) - \gamma(v))$, zaś dzięki ciągłości funkcji γ' możemy wybrać δ tak, by dla $\xi \in (t - \delta,\, t + \delta)$ kąt między $\gamma'(\xi)$ i $\gamma'(t)$ był dowolnie mały. Zatem możemy dobrać $\delta > 0$ taką, że dla $u,\, v \in (t - \delta,\, t + \delta)$ mamy

$$\angle\big((\gamma(u) - \gamma(v)),\, \gamma'(t)\big) = \angle\big(\gamma'(\xi),\, \gamma'(t)\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\angle(\gamma'(t),\, l^{\perp}\big).$$

Dla $u,\, v \in (t - \delta,\, t + \delta)$ mamy

$$\angle(l^{\perp},\, \gamma(u) - \gamma(v)) \geqslant \angle(l^{\perp},\, \gamma'(u)) - \angle(\gamma(u) - \gamma(v),\, \gamma'(u)) \geqslant \frac{1}{2}\angle(l^{\perp},\, \gamma'(u)),$$

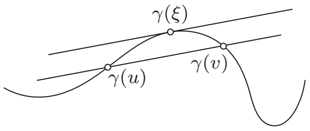
skąd kąt $\theta := \angle(\gamma(u) - \gamma(v),\, l) \leqslant \pi/2 - \frac{1}{2}(\angle(\gamma'(t),\, l^{\perp}) < \pi/2$ i

$$\|P_l(\gamma(u)) - P_l(\gamma(v))\| \geqslant \cos\theta\|\gamma(u) - \gamma(v)\|.$$

Zatem dla $x = P_l(\gamma(u))$ i $y = P_l(\gamma(v))$ mamy

$$\|P_l^{-1}(x) - P_l^{-1}(y)\| \leqslant \frac{1}{\cos\theta}\|x - y\|.$$

$\square$



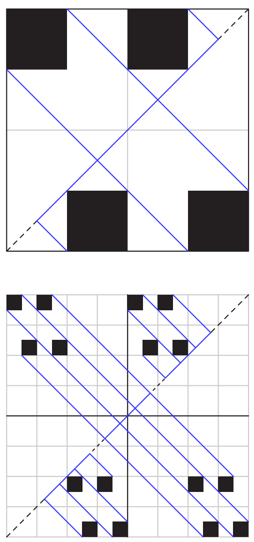
Gdy krzywa γ jest klasy C^1, to dla dowolnych argumentów u i v istnieje punkt $\xi \in [u, v]$ taki, że sieczna przechodząca przez $\gamma(u)$ i $\gamma(v)$ jest równoległa do stycznej w punkcie ξ.

Udowodnijmy Twierdzenie 4.

Dowód. Wykażemy, że przy założeniach twierdzenia istnieje taki argument t, że dla dowolnego $\delta > 0$ zbiór $A \cap \gamma(t - \delta,\, t + \delta)$ ma dodatnią miarę. Zauważmy najpierw, że istnieje pewien łuk krzywej, który ma skończoną długość, i którego przecięcie ze zbiorem A ma dodatnią miarę. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to łuk $\gamma([0,\, 1])$. Ponieważ dla każdego odcinka I takiego, że $\mathcal{H}^1\big(A \cap \gamma(I)\big) > 0$ istnieje odcinek domknięty $J \subset I$ o połowę krótszy od I, dla którego $\mathcal{H}^1\big(A \cap \gamma(J)\big) > 0$, możemy wskazać zstępującą rodzinę odcinków domkniętych (I_n), takich, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} I_n = 0$ i dla każdego n zachodzi nierówność $\mathcal{H}^1\big(A \cap \gamma(I_n)\big) > 0$. Szukany parametr to $t := \bigcap_n I_n$. Wykorzystując Lemat 1 stwierdzamy, że dla dowolnej prostej l, która nie jest prostopadła do $\gamma'(t)$ możemy dobrać $\delta > 0$ i $c > 0$ tak, by przekształcenie $P_l^{-1} : P_l\big((\gamma(t - \delta,\, t + \delta)\big) \to \gamma(t - \delta,\, t + \delta)$ było lipschitzowskie ze stałą c, skąd na mocy własności (v) z Twierdzenia 1 dostajemy nierówności

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{H}^1(\gamma(t - \delta, t + \delta) \cap A) &= \mathcal{H}^1\Big(P_l^{-1}\big(P_l(\gamma(t - \delta, t + \delta) \cap A)\big)\Big) \\ &\leqslant c\mathcal{H}^1\Big(P_l\big(\gamma(t - \delta, t + \delta) \cap A\big)\Big) \leqslant c\mathcal{H}^1(P_l(A)). \end{aligned}$$

Zatem $\mathcal{H}^1(P_l(A)) > 0$. $\square$



Rzut zbioru C_n na przekątną d_2 ma miarę $(2/3)^n\sqrt{2}$, zatem skoro $C \subset C_n$ dla każdego n, to rzut zbioru C na d_2 ma miarę zero.

Zdefiniowaliśmy zbiory całkowicie nieprostowalne, scharakteryzowaliśmy je za pomocą rzutów ortogonalnych, najwyższa pora, by udowodnić istnienie nietrywialnych zbiorów całkowicie nieprostowalnych o dodatniej mierze. Pomocny nam w tym będzie Wniosek 2 oraz konstrukcja zbioru C zawarta w poprzednim paragrafie.

Twierdzenie 5. *Zbiór „pył Cantora” C jest zbiorem całkowicie nieprostowalnym o dodatniej jednowymiarowej mierze Hausdorffa.*

Dowód. W poprzednim paragrafie wykazaliśmy, że $0 < \mathcal{H}^1(C) < \infty$. Aby wykazać, że zbiór ten jest nieprostowalny, wystarczy zauważyć, że rzuty zbioru C na dwie nierównoległe proste $l_1 : x = 0$ zawierającą bok kwadratu C_0 i $l_2 : y = x$ zawierającą jego przekątną d_2 mają miarę zero. $\square$

Aby dokładniej zrozumieć rozrzedzoną, czy też rozproszoną, strukturę zbiorów całkowicie nieprostowalnych, przeanalizujemy jeszcze ich gęstość w punktach do nich należących.

Definicja 4. *Górną gęstością zbioru A w punkcie a nazywamy wielkość*

$$\theta^*(A,a) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^1\big(A\cap B(a,r)\big)}{2r},$$

zaś gęstością dolną

$$\theta_*(A,a) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^1\big(A\cap B(a,r)\big)}{2r}.$$

Powyższe wielkości łatwo wyznaczyć dla krzywych gładkich. Jeśli parametryzacja $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 to dla dowolonego $A = \gamma(x)$, dla r dążących do zera łuk krzywej zawarty w kulce $B(A,r)$ ma długość coraz bliższą średnicy kulki, więc zarówno dolna jak i górna gęstość krzywej γ w punkcie A jest równa 1.

W tym miejscu warto zanotować twierdzenie dotyczące gęstości zbiorów mierzalnych [4, Tw 6.2].

Twierdzenie 6. *Jeśli A jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{H}^1(A) < \infty$, to*

(i) $\frac{1}{2} < \theta^*(A,a) \leqslant 1$ *dla $\mathcal{H}^1$–prawie wszystkich punktów $a \in A$,*

(ii) $\theta^*(A,x) = 0$ *dla $\mathcal{H}^1$–prawie wszystkich punktów $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.*

Wprowadźmy jeszcze dwa dodatkowe pojęcia.

Definicja 5. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem takim, że $\mathcal{H}^1(A) < \infty$. Punkt $a \in A$ nazywamy punktem regularnym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta^*(A,a) = \theta_*(A,a) = 1$. Jeśli powyższe równości nie zachodzą, to a nazywamy punktem nieregularnym.*

Kolejny fakt utwierdzi nas w przekonaniu o nieregularnej i rozproszonej strukturze zbiorów nieprostowalnych oraz regularności zbiorów prostowalnych [4, Tw. 17.6].

Twierdzenie 7. *Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem $\mathcal{H}^1$- mierzalnym takim, że $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, wówczas*

- *Zbiór E jest prostowalny $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}^1$–prawie każdy jego punkt jest punktem regularnym,*
- *Zbiór E jest całkowicie nieprostowalny $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}^1$–prawie każdy jego punkt jest punktem nieregularnym.*

Okazuje się, że punkty zbiorów całkowicie nieprostowalnych są nie tylko nieregularne, co gwarantuje już nierówność $\theta_* < 1$, ale ich dolna gęstość jest od jedynki oddzielona (tzn. istnieje taka stała $c < 1$, że dla każdego zbioru całkowicie nieprostowalnego $\theta^*(A,a) < c$). W przypadku dwuwymiarowym prawdziwe jest następujące twierdzenie pochodzące od Besicovitcha [3, Tw. 3.23].

Twierdzenie 8. *Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ ma skończoną miarę $\mathcal{H}^1(A) < \infty$, wówczas, jeśli A jest całkowicie nieprostowalny, to w $\mathcal{H}^1$–prawie każdym punkcie $a \in A$ gęstość dolna $\theta_*(A,a) \leqslant 3/4$.*

Na koniec tego paragrafu przyjrzymy się możliwości lokalnego aproksymowania zbiorów prostowalnych i całkowicie nieprostowalnych prostymi. Każda krzywa gładka ma dobrze zdefiniowaną styczną w każdym punkcie, co oznacza z grubsza rzecz biorąc, że krzywą gładką można lokalnie dobrze przybliżać prostymi. Można się spodziewać, że zbliżone własności powinny dziedziczyć zbiory prostowalne. Wprawdzie styczna w punkcie zbioru prostowalnego na ogół nie jest zdefiniowana, ale możemy posłużyć się pojęciem stycznych aproksymatywnych.

Definicja 6. *Prostą l nazywamy styczną aproksymatywną zbioru A w punkcie x jeśli*

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^1\big(A\cap B(x,r)\big)}{2r} > 0$$

oraz dla każdego $\alpha \in (0,\pi)$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\mathcal{H}^1\Big(\big(A\cap B(x,r)\big)\setminus C(x,l,\alpha)\Big) = 0,$$

gdzie $C(x,l,\alpha)$ oznacza stożek o wierzchołku w x, osi l i kącie rozwarcia α.

Pierwszy warunek powyższej definicji oznacza, że w każdym otoczeniu punktu x jest sporo (w sensie miary) punktów zbioru A, drugi zaś mówi, że punkty w otoczeniu punktu x skupiają się wokół prostej l. Posługując się wprowadzonym wcześniej terminem gęstości zbioru powiemy, że l jest styczną aproksymatywną, gdy $\theta^*(A,x)>0$, oraz gdy dla dowolnego $\alpha>0$ zbiór powstały przez wyrzucenie ze zbioru A wszystkich punktów zawartych w stożku $C(x,l,\alpha)$ ma zerową gęstość w x. Oczywiście styczna aproksymatywna istnieje w każdym punkcie krzywej gładkiej i pokrywa się z jej styczną w klasycznym sensie. Przytoczymy teraz Twierdzenie [4, Tw. 15.19], które charakteryzuje zbiory prostowalne i całkowicie nieprostowalne w języku stycznych aproksymatywnych.

Twierdzenie 9. *Jeśli A jest zbiorem $\mathcal{H}^1$-mierzalnym, takim że $0<\mathcal{H}^1(A)<\infty$, to*

- *A jest prostowalny $\Leftrightarrow$ w $\mathcal{H}^1$–prawie każdym punkcie A istnieje styczna aproksymatywna,*
- *A jest całkowicie nieprostowalny $\Leftrightarrow$ aproksymatywna styczna nie istnieje w $\mathcal{H}^1$–prawie każdym punkcie zbioru A.*

Opisane w powyższym paragrafie zbiory nazywane są 1–prostowalnymi i 1–całkowicie nieprostowalnymi dla odróżnienia od ich wyżej wymiarowych uogólnień — zbiorów m–prostowalnych i zbiorów m–całkowicie nieprostowalnych, których definicję uzyskujemy poprzez zamianę w definicjach 2 i 3 krzywych gładkich m–wymiarowymi powierzchniami gładkimi.

Hipoteza Vitushkina.

Zbiory całkowicie nieprostowalne znalazły się w centrum uwagi licznej grupy matematyków, gdy pojawiły się w sformułowaniu hipotezy Vitushkina. Historia samej hipotezy i długiej drogi do jej udowodnienia, to materiał na odrębny artykuł (zainteresowanemu Czytelnikowi polecam artykuł przeglądowy P. Mattili [5]), zaś jej dowód stanowi treść ponad trzystustronicowej monografii autorstwa J. Dudziaka [1]. W bieżącym tekście ograniczymy się do sformułowania hipotezy, zanim jednak do tego przystąpimy niezbędne jest wprowadzenie definicji zbioru usuwalnego.

Definicja 7. *Zbiór zwarty $E\subset\mathbb{C}$ nazywamy zbiorem usuwalnym dla ograniczonej funkcji analitycznej wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego $U\supset E$ i dla dowolnej ograniczonej funkcji analitycznej $f: U\setminus E\to\mathbb{C}$ istnieje przedłużenie analityczne określone na zbiorze U, tzn. istnieje funkcja analityczna $\tilde f: U\to\mathbb{C}$, taka, że $\tilde f_{|U\setminus E} = f$.*

Najprostszym przykładem zbioru usuwalnego jest punkt. Istotnie, jeśli funkcja f jest analityczna i ograniczona na zbiorze otwartym $U\setminus\{x_0\}$, to na mocy twierdzenia Riemanna ma w punkcie x_0 osobliwość pozorną, zatem kładąc $f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$ przedłużamy f do funkcj analitycznej na całym U. W sprawdzaniu usuwalności zbiorów pomocna będzie następująca obserwacja.

Stwierdzenie 1. *Jeśli zbiór zwarty $E\subset\mathbb{C}$ jest usuwalny dla ograniczonej funkcji analitycznej, to wszystkie funkcje analityczne na $\mathbb{C}\setminus E$ są ograniczone.*

Stwierdzenie 1 charakteryzuje zbiory usuwalne tzn. zbiór zwarty E jest usuwalny $\Leftrightarrow$ wszystkie funkcje analityczne i ograniczone na $\mathbb{C}\setminus E$ są stałe. Dowód implikacji „$\Leftarrow$” znaleźć w [1].

Dowód powyższego twierdzenia jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia Liouville'a stwierdzającego, że wszystkie funkcje analityczne i ograniczone na $\mathbb{C}$ są stałe. Gdy zbiór zwarty E jest usuwalny, to każda funkcja f określona na $\mathbb{C} \setminus E$ ma przedłużenie analityczne, oznaczmy je przez $\tilde{f}$, na całą płaszczyznę zespoloną. Oczywiście $\tilde{f}$ jest ograniczona na zbiorze $\mathbb{C} \setminus E$ oraz na zbiorze zwartym E, czyli jest analityczna i ograniczona na $\mathbb{C}$, zatem jest stała. Co za tym idzie wyjściowa funkcja f również jest stała na $\mathbb{C} \setminus E$.

Wykorzystując Stwierdzenie 1 możemy natychmiast wykazać następujący fakt.

Fakt 1. *Dla dowolnego $r > 0$ dysk $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ nie jest usuwalny.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że funkcja $f = \frac{1}{z-z_0}$ jest analityczna i ograniczona na $\mathbb{C} \setminus D(z_0, r)$, ale nie jest stała.

Około 1880 roku Painlevé rozpoczął poszukiwania warunku wystarczającego i koniecznego by zbiór zwarty był usuwalny. Udowodnił on następujące twierdzenie [1, Tw. 2.7].

Twierdzenie 10. *Jeśli E jest zwarty i $\mathcal{H}^1(E) = 0$, to E jest usuwalny.*

Znacznie później wykazano następujący fakt ([1, Wn. 2.12]).

Twierdzenie 11. *Jeśli E jest zwarty i dla pewnego $s > 1$ miara $\mathcal{H}^s(E) > 0$, to E nie jest usuwalny.*

Twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu mówi, że każdy jednospójny i otwarty podzbiór $\bar{\mathbb{C}}$, którego dopełnienie ma co najmniej dwa punkty, można przekształcić analitycznie i różnowartościowo na dysk jednostkowy. Stosując ten fakt dla $\bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ stwierdzamy, że łuk gładki (bez samoprzecięć) γ nie jest usuwalny.

Wykorzystując twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu można wykazać, że żadna krzywa gładka nie jest usuwalna. Okazuje się jednak, że nie wszystkie zbiory usuwalne spełniają warunek $\mathcal{H}^1(E) = 0$. Garnett i Ivanov niezależnie wykazali, że zbiór C opisany na początku tego artykułu, o mierze $\mathcal{H}^1(E) = \sqrt{2}$, nie jest usuwalny. Historycznie pierwszy przykład nieusuwalnego zbioru o dodatniej jednowymiarowej mierze Hausdorffa podał Vitushkin, który sformułował następującą hipotezę.

Hipoteza Vitushkina. *Zbiór zwarty E taki, że $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ jest usuwalny dla ograniczonych funkcji analitycznych wtedy i tylko wtedy, gdy E jest całkowicie nieprostowalny.*

Hipoteza Vitushkina została udowodniona w 1998 roku przez Guy Davida.

Literatura

[1] J. Dudziak, *Vitushkin's Conjecture for Rectifiable Sets*, Springer, 2010.

[2] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.

[3] K. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[4] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, 1995.

[5] P. Mattila, *Rectifiability, Analytic Capacity and Singular Integrals*, Documenta Mathematica, Extra Volume ICM 1998, II (1998), 657664.