Artykuł związany jest z odczytem *(Nie)zależnie od liczby wymiarów*, wygłoszonym podczas L Szkoły Matematyki Poglądowej *(Nie)zależność* w styczniu 2013 r. w Nadarzynie.

Podziały

Joanna JASZUŃSKA, Warszawa

Centrum Studiów Zaawansowanych, Politechnika Warszawska

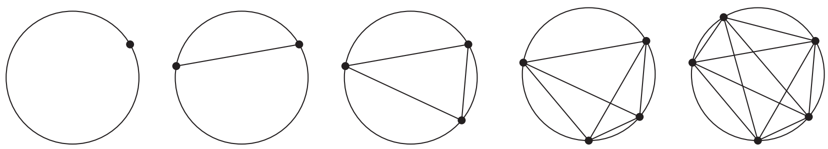
Niniejszy artykuł składa się z trzech niezależnych części. W każdej z nich przestawione jest inne kombinatoryczne zagadnienie dotyczące podziałów oraz liczby otrzymywanych w ich wyniku części lub liczby sposobów ich zrealizowania.

1. Koło i jego cięciwy

Na okręgu narysowano n punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.
Na ile co najwyżej obszarów mogą one dzielić koło?

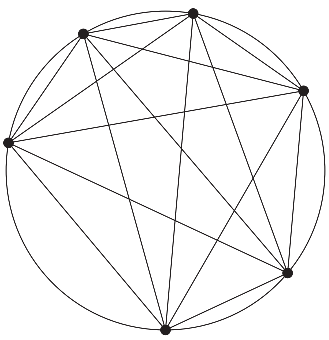
Celem naszym jest wyznaczenie maksymalnej możliwej do uzyskania liczby obszarów, załóżmy więc, że punkty na okręgu ułożone są tak, by żadne trzy spośród łączących je odcinków nie przecinały się w jednym punkcie.

Zbadajmy na początek sytuację dla małych wartości n (rys. 1). Dla $n = 1$ całe, niepodzielone koło stanowi jeden obszar. Dla $n = 2$ mamy jedną cięciwę, która dzieli koło na dwa obszary. Dla $n = 3$ uzyskujemy cztery obszary, dla $n = 4$ obszarów jest osiem, a dla $n = 5$ — szesnaście.



Rys. 1. Podziały koła dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ punktów.

Wszystko wskazuje na to, że szukana liczba obszarów równa jest 2^{n-1}.
Czy rzeczywiście?



Rys. 2. Podział koła dla 6 punktów.

Okazuje się, że nie! Wystarczy cierpliwie przeanalizować przedstawioną na rysunku 2 sytuację dla $n = 6$ i policzyć obszary, aby przekonać się, że jest ich 31, a nie $2^5 = 32$, jak można by się spodziewać.

W celu wyznaczenia wzoru ogólnego przyjrzyjmy się, jak powstają kolejne obszary. Dopóki nie połączymy punktów odcinkami, jest jeden obszar (wnętrze danego koła). Zastanówmy się, ile nowych obszarów przybywa wraz z dorysowaniem kolejnego odcinka. Każda taka nowa cięciwa okręgu przecina tyle obszarów, ile wcześniej narysowanych cięciw przetnie, plus jeszcze jeden. Zatem jeśli dorysowanie jej zwiększa liczbę wszystkich punktów przecięcia cięciw o k, to liczba obszarów rośnie o $k + 1$.

Oznacza to, że po narysowaniu wszystkich odcinków, liczba obszarów równa jest

$$1 + o + p,$$

gdzie o oznacza liczbę odcinków, natomiast p — łączną liczbę ich punktów przecięcia.

Odcinków jest tyle, na ile sposobów można wybrać ich końce, czyli dwa punkty spośród n. Stąd $o = \binom{n}{2}$.

Każdemu punktowi przecięcia cięciw jednoznacznie odpowiada czwórka z danych punktów — końce tych cięciw. Zauważmy, że również na odwrót, wybór czterech z danych punktów jednoznacznie wyznacza pewien punkt przecięcia cięciw — wystarczy połączyć odcinkami przeciwległe z tych czterech punktów.
Stąd punktów przecięcia odcinków jest tyle, ile czwórek punktów, czyli $p = \binom{n}{4}$.

Ostatecznie więc szukana maksymalna liczba obszarów, na które rozważane odcinki dzielą koło, równa jest

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

i jest ona osiągana, gdy żadne trzy odcinki nie przecinają się w jednym punkcie.

Kolejno dla $n = 1, 2, \ldots, 10$ uzyskujemy wartości: $1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256$.

Na ile co najwyżej obszarów przekątne mogą podzielić n-kąt wypukły?

Odpowiedź wynika natychmiast z uzyskanego powyżej wyniku. Zauważmy bowiem, że rozumowanie, które do niego doprowadziło, nie zmienia się, jeśli zamiast okręgu rozważymy dowolną inną ściśle wypukłą krzywą zamkniętą, na przykład opisaną na danym wielokącie.

Na każdym wielokącie wypukłym można opisać ściśle wypukłą krzywą zamkniętą.

Wykazaliśmy powyżej, że boki i przekątne n-kąta dzielą obszar ograniczony przez opisaną na nim krzywą na $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ części. Spośród nich, n to obszary na zewnątrz wielokąta, ograniczone przez jego bok oraz łuk krzywej opisanej, pozostałe zaś to obszary wewnątrz. Zatem szukana maksymalna liczba obszarów, na które przekątne mogą podzielić n-kąt wypukły, równa jest

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - n$$

i jest ona osiągana, gdy żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie.

Kolejno dla $n = 3, 4, \ldots, 10$ uzyskujemy wartości: $1, 4, 11, 25, 50, 91, 154, 246$.

2. Punkty na prostej, proste na płaszczyźnie, płaszczyzny w przestrzeni...

Bibliografia do części 2:
Martin Erickson *Aha! Solutions*, The Mathematical Association of America, 2008.

Na ile co najwyżej części n punktów może podzielić prostą?

Pytanie to nie jest zbyt ambitne, oczywiście n punktów zawsze dzieli prostą na dokładnie $n + 1$ części. Zapiszmy tę odpowiedź w formie nieco ekstrawaganckiej:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

i spróbujmy odpowiedzieć na trudniejszy, dwuwymiarowy odpowiednik naszego pytania.

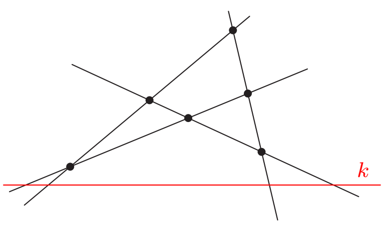
Na ile co najwyżej części n prostych może podzielić płaszczyznę?

Jedna prosta dzieli płaszczyznę na dwie części, dwie proste — na najwyżej cztery części. Czy n prostymi da się podzielić płaszczyznę na 2^n części? Trzeba by rysować każdą kolejną prostą tak, by przecinała wszystkie wcześniej uzyskane obszary. Proszę spróbować trzema prostymi podzielić płaszczyznę na osiem części... i pozostańmy na razie przy stwierdzeniu, że

n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż 2^n części.

Rozważamy układy n prostych *w położeniu ogólnym*: żadne dwie proste nie są równoległe ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Nietrudno sprawdzić, że proste niespełniające tych założeń dzielą płaszczyznę na mniej części.

Rozważmy n prostych *w położeniu ogólnym* (definicja na marginesie). Ustawmy rysunek tak, by żadna z nich nie była pozioma i narysujmy pomocniczą poziomą prostą k poniżej wszystkich punktów przecięcia naszych prostych (rys. 3). Powyższe postulaty można zrealizować, ponieważ danych prostych, ich kierunków oraz ich punktów przecięcia jest skończenie wiele.



Rys. 3. Pomocnicza kolorowa pozioma prosta k pod punktami przecięcia, przypadek 4 prostych.

Obszary, na które naszych n prostych dzieli płaszczyznę, są częściami wspólnymi półpłaszczyzn, zatem są wypukłe i „wielokątne” (być może nieograniczone). Wobec tego, dzięki odpowiedniemu ustawieniu rysunku i wyborowi prostej k, każdy z tych obszarów albo

(a) ma dokładnie jeden najniższy punkt (w sensie wysokości nad k), punkt ten jest wtedy wyznaczony przez przecięcie pewnych dwóch z danych prostych, albo

(b) jest przecinany przez prostą k.

Jednocześnie również każdy punkt przecięcia danych prostych jest najniższym punktem dokładnie jednego z obszarów nieprzecinanych przez k. Wynika to z obserwacji, że spośród czterech obszarów, których wierzchołkiem jest taki punkt, dla dokładnie jednego jest on właśnie punktem najniższym.

Wobec tego obszarów typu (a) jest tyle, ile punktów przecięcia danych prostych. czyli tyle, na ile sposobów można wybrać dwie z nich, a więc $\binom{n}{2}$.

Ponieważ k nie jest równoległa do żadnej z danych prostych, to każdą z nich przecina, więc dzielą ją one, jak już wiemy, na $n+1$ części. Stąd obszarów typu (b) jest $n+1$, bo każda taka część prostej k rozcina jeden obszar płaszczyzny.

Zatem szukana maksymalna liczba części, na które n prostych dzieli płaszczyznę, równa jest

$$\binom{n}{2} + n + 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

i jest ona osiągana dla prostych w położeniu ogólnym.

Na ile co najwyżej części n płaszczyzn może podzielić przestrzeń trójwymiarową?

Podobnie jak w wyżej opisanej dwuwymiarowej wersji tego pytania,

n płaszczyzn dzieli przestrzeń trójwymiarową na nie więcej niż 2^n części.

Nietrudno wskazać trzy płaszczyzny, które dzielą przestrzeń na osiem części, ale już czterema płaszczyznami nie da się podzielić jej na szesnaście części.

Rozważamy płaszczyzny *w położeniu ogólnym*: żadne dwie nie są równoległe, żadne trzy nie mają wspólnej prostej, żadne cztery nie mają wspólnego punktu.

Rozważmy n płaszczyzn w położeniu ogólnym. Analogicznie jak w wersji płaskiej, poprowadźmy pomocniczą poziomą płaszczyznę k, nierównoległą do żadnej z danych n płaszczyzn ani do żadnej z prostych należących do dwóch spośród nich oraz położoną poniżej wszystkich punktów przecięcia trójek z danych płaszczyzn. Podobnie jak powyżej, da się tak ustawić rysunek, aby powyższe postulaty były zrealizowane, gdyż rozważanych płaszczyzn, prostych i punktów jest skończenie wiele.

Obszarów, na które dane płaszczyzny dzielą przestrzeń jest wówczas $a+b$, gdzie a to liczba obszarów, które mają dokładnie jeden najniższy punkt (w sensie wysokości nad k), punkt ten jest wtedy wyznaczony przez przecięcie pewnych trzech z danych płaszczyzn, natomiast b to liczba obszarów przecinanych przez płaszczyznę k.

Punktów przecięcia płaszczyzn jest tyle, na ile sposobów można wybrać trzy z nich, zatem $a = \binom{n}{3}$.

Płaszczyzna k nie jest równoległa do żadnej z danych płaszczyzn, więc każdą z nich przecina i tych n płaszczyzn wyznacza na niej n prostych. Okazuje się, że otrzymane w ten sposób proste są w położeniu ogólnym. Istotnie, gdyby pewne trzy z nich przecinały się w jednym punkcie, punkt ten należałby jednocześnie do wyznaczających je płaszczyzn i do płaszczyzny k, sprzecznie z jej definicją — znajduje się ona poniżej wszystkich wspólnych punktów trójek z danych płaszczyzn. Gdyby z kolei pewne dwie z otrzymanych prostych były równoległe, to — ponieważ wyznaczające je płaszczyzny z założenia nie są równoległe — istniałaby wspólna prosta tych dwóch płaszczyzn i również byłaby równoległa do tych dwóch prostych. Wtedy jednak byłaby ona także równoległa do płaszczyzny k, sprzecznie z jej definicją. Oznacza to, że faktycznie n prostych uzyskanych na płaszczyźnie k jest w położeniu ogólnym.

Jak już wiemy, dzielą one wobec tego płaszczyznę k na $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ części i tyle właśnie równe jest b, bo każdy taki płaski obszar na k rozcina jedną część przestrzeni.

Zatem szukana maksymalna liczba części, na które n płaszczyzn dzieli przestrzeń, równa jest

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

i jest ona osiągana dla płaszczyzn w położeniu ogólnym.

Hiperpłaszczyzna w przestrzeni d-wymiarowej to dowolna jej podprzestrzeń $(d-1)$-wymiarowa, np. prosta na płaszczyźnie, płaszczyzna w przestrzeni trójwymiarowej etc.

Położenie ogólne n hiperpłaszczyzn definiujemy analogicznie do powyżej zdefiniowanego położenia ogólnego prostych na płaszczyźnie i płaszczyzn w przestrzeni trójwymiarowej.

Analogicznie można udowodnić ogólne twierdzenie:
n hiperpłaszczyzn dzieli przestrzeń d-wymiarową na co najwyżej

$$\binom{n}{d} + \ldots + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \text{ części}$$

i liczba ta jest osiągana dla hiperpłaszczyzn w położeniu ogólnym.

Z uwagi na znaną tożsamość

$$\binom{n}{n} + \ldots + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 2^n,$$

zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami części tych rzeczywiście jest co najwyżej 2^n, przy czym równość zachodzi dla $n \leqslant d$.

3. Podziały zbioru na niepuste podzbiory

Na ile sposobów można podzielić zbiór złożony z n rozróżnialnych elementów na niepuste podzbiory?

Liczbę takich podziałów nazywa się *liczbą Bella* i oznacza przez B_n, przyjmujemy $B_0 = 1$.

Wyznaczmy najpierw wzór rekurencyjny. Rozważmy zbiór o $n+1$ elementach i jeden z nich wyróżnijmy. Gdy dokonujemy podziału całego zbioru, element ten trafia oczywiście do pewnego spośród uzyskanych podzbiorów. Na ile sposobów można wybrać i podzielić na podzbiory te elementy, które **nie są** z nim w podzbiorze? Oznaczmy liczbę takich elementów przez i, gdzie $0 \leqslant i \leqslant n$. Wówczas można je wybrać na $\binom{n}{i}$ sposobów oraz — z definicji — podzielić na podzbiory na B_i sposobów. Stąd zależność rekurencyjna

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

W celu wyznaczenia wzoru jawnego na n-tą liczbę Bella B_n (czyli wzoru niezależnego od innych B_i), posłużymy się teorią funkcji tworzących. Konkretniej, zdefiniujmy wykładniczą funkcję tworzącą

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \tag{$*$}$$

Jest to szereg formalny; pochodną funkcji $B(x)$ obliczyć można, różniczkując ten szereg wyraz po wyrazie:

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n.$$

Korzystając z wyznaczonej powyżej zależności rekurencyjnej, otrzymujemy dalej:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} B_i \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{B_i x^n}{i!(n-i)!}.$$

Ostatnie z powyższych wyrażeń jest sumą wszystkich takich składników $\frac{B_i x^n}{i!(n-i)!}$, dla których n oraz i są nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $i \leqslant n$. To samo uzyskamy, jeśli zamienimy kolejność sumowania w następujący sposób:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{B_i x^n}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{B_i x^n}{i!(n-i)!}.$$

Prowadzi to do dalszych równości:

Warto przypomnieć, że $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{B_i x^n}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{B_i}{i!} x^i \sum_{n=i}^{\infty} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{B_i}{i!} x^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = B(x) e^x.$$

W efekcie otrzymujemy więc równanie różniczkowe

$$B'(x) = B(x)e^x,$$

czyli

$$\frac{B'(x)}{B(x)} = e^x.$$

Prowadzi to kolejno do:

$$\begin{aligned} \Big(\ln\big(B(x)\big)\Big)' &= e^x, \\ \ln\big(B(x)\big) &= e^x + C, \\ B(x) &= e^{e^x + C}, \end{aligned}$$

gdzie C jest pewną stałą. Wyznaczymy ją, obliczając $B(0)$. Z powyższego wzoru wiemy, że $B(0) = e^{e^0 + C}$. Jednocześnie z definicji szeregu $B(x)$ (wzór $(*)$) uzyskujemy $B(0) = \frac{B_0}{0!} = 1$. Stąd $e^{e^0+C} = 1$, zatem $e^0 + C = 0$, czyli $C = -1$. Ostatecznie więc

$$B(x) = e^{e^x - 1}.$$

Korzystając z otrzymanego wzoru na $B(x)$, wyznaczymy teraz szukane liczby Bella B_n, występujące we współczynnikach szeregu $(*)$. Przyjrzyjmy się w tym celu procedurze wielokrotnego różniczkowania szeregów. Zauważmy, że przy każdym kolejnym różniczkowaniu każdy jednomian ax^k zostaje zastąpiony przez akx^{k-1}, w szczególności pochodną wyrazu wolnego jest zero. Stąd w n-tej pochodnej szeregu nie występuje żaden z wyrazów wyjściowego szeregu o wykładniku przy x mniejszym od n. Ponadto jako wyraz wolny występuje współczynnik przy x^n w wyjściowym szeregu, pomnożony przez $n!$ (bo n-tą pochodną jednomianu $a_n x^n$ jest stała $a_n n!$). Zatem n-ta pochodna szeregu $B(x)$ ma jako wyraz wolny $\frac{B_n}{n!} n! = B_n$.

Wobec tego nasze zadanie sprowadza się do wyznaczenia wyrazu wolnego funkcji $B^{(n)}(x)$. W celu wyznaczenia wyrazu wolnego dowolnego szeregu, wystarczy rozważyć wartość tego szeregu dla $x = 0$. Otrzymujemy w ten sposób poszukiwany wzór jawny na n-tą liczbę Bella:

$$B_n = \left(e^{e^x - 1}\right)^{(n)}(0).$$

Zadziwiający wydaje się fakt, że wszystkie te liczby są naturalne!