Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLIX Szkole Matematyki Poglądowej, *Wyjątki*, Nadarzyn, sierpień 2012.

Zasada Arnolda

Zdzisław POGODA, Kraków

Twierdzenia, które odkrywają matematycy mają zazwyczaj swoje nazwy. Czasami nadają je sami odkrywcy nawiązując do treści twierdzenia albo do głosu dochodzi tradycja — zwyczajowo przez lata nazywane jest dane twierdzenie i tak się po prostu przyjmuje. Jest więc na przykład twierdzenie o pochodnej iloczynu funkcji, ale mówi się też o wzorze Leibniza. Regułę dodawania wektorów nazywaną regułą równoległoboku Francuzi chętnie nazywają regułą Chaslesa i takich przykładów osoby zajmujące się matematyką z pewnością wskażą więcej. Często się zdarza, że do pojęcia lub twierdzenia przypisane jest jakieś nazwisko, a prawdziwym autorem jest zupełnie ktoś inny. Zjawisko jest tak częste, że, trochę przekornie uznano je niemal za regułę. W literaturze można je spotkać pod nazwą zasady Arnolda lub twierdzenia Arnolda, chociaż nie jest to twierdzenie matematyczne. Pisał o tym sam Arnold w artykule *O nauczaniu matematyki* [1] opublikowanym najpierw w *Uspiechach Matematiczeskich Nauk* w 1998 roku i przetłumaczonym na język polski dla *Postępów fizyki* (w 2000 roku) i przedrukowanym również w *Wiadomościach Matematycznych.*

W cytowanym artykule Arnold przytacza tę zasadę powołując się na profesora Michaela Berryego, który miał ją tak nazwać:

Zasada Arnolda: *Jeśli jakieś pojęcie jest związane z czyimś nazwiskiem, to nie jest ono nazwiskiem odkrywcy.*

Równocześnie formułuje zasadę nazywając ją zasadą Berryego:

Zasada Berryego: *Zasada Arnolda stosuje się do siebie samej.*

Trudno się dziwić, gdyż z pewnością wcześniej zauważono tę dziwną zależność. Może tylko nie sformułowano jej wprost.

Sztandarowym przykładem jest, często opisywana, reguła de l'Hospitala. Historia jest dobrze znana, więc przypomnijmy tylko pokrótce. Markiz Guillaume de l'Hôpital (albo Hospital) poprosił o prywatne wykłady z rachunku różniczkowego jednego z najlepszych w tym czasie specjalistów Johanna Bernoullego, naturalnie za sowitą opłatą. Johann Bernoulli był znakomitym matematykiem, jednym z najznamienitszych przedstawicieli rodu Bernoullich. Ponadto odznaczał się dużymi zdolnościami dydaktycznymi. Bez wahania przyjął propozycję de l'Hôpitala chociaż zawierała jeszcze jeden warunek: za dodatkową, pokaźną, opłatą markiz zastrzegł sobie prawo wyłączności do tych wykładów — wykupił do nich prawa autorskie. W 1696 roku opublikował ważne dzieło zatytułowane *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes Courbet* cytowane najczęściej jako *Analiza nieskończenie małych.* Był to pierwszy w historii podręcznik rachunku różniczkowego. Zawierał wiele najnowszych rezultatów, w tym twierdzenie nazywane dziś powszechnie regułą de l'Hôpitala. Prawdziwym autorem tego faktu był Johann Bernoulli, które sprzedał je de l'Hôpitalowi wraz innymi faktami w czasie zakontraktowanych wykładów. Warto zwrócić uwagę na niezwykłość samego twierdzenia. Obecnie jest ono jednym ze standardów w kursach analizy, bardzo użytecznym narzędziem. Zostało jednak sformułowane w czasach, gdy nie było precyzyjnych definicji granicy, gdy dopiero poznawano własności pochodnej. A trzeba przyznać, że nie jest to fakt narzucający się. Jego sformułowanie wymagało głębokiej wiedzy i nieprzeciętnej intuicji. Johann Bernoulli, związany umową, początkowo milczał. Dopiero po śmierci w 1704 roku de l'Hôpitala, próbował odzyskać prawa do twierdzeń z książki markiza. Mimo różnych publikacji nie udało się, los zadecydował inaczej. Obecnie nawet gdy znana jest historia twierdzenia, nikt nie próbuje zmieniać jego nazwy, pozostanie regułą de l'Hôpitala. Historia w ogóle źle się obeszła z Johannem. Choć znanych jest kilka pojęć i faktów noszących nazwisko Bernoullego, to żadne nie jest związane z Johannem. Większość przypisana jest bratu Jacobowi a jedno, prawo Bernoullego z fizyki związane jest z synem Johanna Danielem.

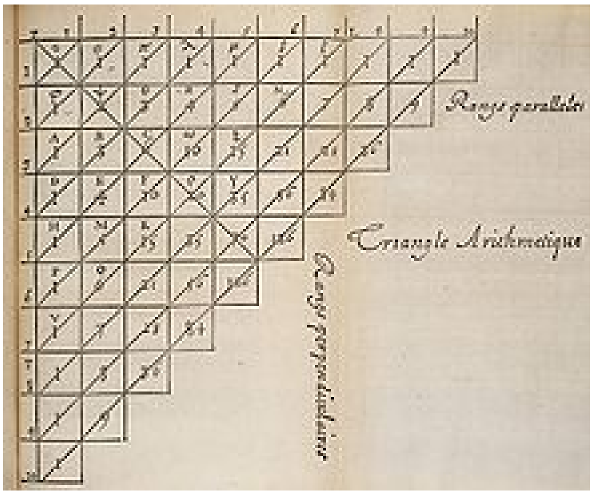
Innym znanym przykładem z historii matematyki są wzory Cardano na pierwiastki równania trzeciego stopnia. Historia ta ma wiele wersji i narosło wokół niej sporo nieporozumień. Najczęściej przytacza się tę najmniej korzystną dla Cardano. Oto pewien samouk Nicolo Fontana o przezwisku Tartaglia odkrył wzory na rozwiązanie równań trzeciego stopnia. Była to pierwsza połowa XVI wieku (dokładniej połowa lat trzydziestych), więc tak naprawdę nie zapisywano wtedy jeszcze wzorów algebraicznie, lecz opisywano schemat postępowania przy wyliczaniu pierwiastków. Świat dowiedział się o sukcesie Tartaglii dzięki matematycznemu pojedynkowi tegoż z uczniem bolońskiego matematyka Scipona del Ferro o nazwisku Mario Fior. Tartaglia wygrał ten pojedynek i dla znawców było jasne, że zwycięzca musi znać ogólny schemat postępowania z równaniami trzeciego stopnia. Wiadomość dotarła do Girolamo Cardano barwnej postaci tego okresu, człowieka o dość mocno zakręconym życiorysie i niezbyt kryształowej reputacji. Interesował się różnymi dziedzinami, w szczególności matematyką i postanowił zdobyć tajemnicę rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Dobrze rozumiał znaczenie tego odkrycia, które było pierwszym wielkim oryginalnym rezultatem od czasów starożytnych. Nie poradzili sobie z problemem nawet Arabowie, mimo iż posługiwali się potężnym narzędziem, algebrą. Cardano zaprosił do siebie Tartaglię i goszcząc go próbował zdobyć jego przyjaźń. Cardano w przeciwieństwie do Tartaglii był człowiekiem zamożnym (albo przynajmniej za takiego uchodził), co bardzo imponowało Tartaglii. Mimo to opierał się przed ujawnieniem tajemnicy. W końcu jednak uległ namowom Cardano i zdradził swoje rezultaty, przyjmując w zamian przysięgę od Cardano, że wzory nie ujrzą światła dziennego, nie zostaną przekazane innym. Tymczasem Cardano wydał w 1545 roku książkę *Ars magna*, w której opublikował wyniki Tartaglii jako swoje. Nietrudno zgadnąć, że spowodowało to ogromną awanturę.

Cardano rzeczywiście opublikował w *Ars magna* wzory Tartaglii. Jednak nie jest prawdą, że nie wspomniał o Tartaglii. Tak samo nie jest prawdą, że rezultaty przypisał sobie. Już na pierwszej stronie dzieła pojawia się nazwisko Tartaglii i autor dokładnie tłumaczy, dlaczego nie dochował przysięgi zachowania tajemnicy. Jego wersja jest następująca. Otóż udał się on wraz ze współpracownikiem do Bolonii w celu przejrzenia materiałów pozostałych po Scipionie del Ferro. Tam odkryli zapiski świadczące o tym, że del Ferro znał metody odkryte przez Tartaglię, a to zwalniało Cardana z zachowania tajemnicy. Omawiając same wzory Cardano ponownie wspomina Tartaglię. Ten jednak nie był zadowolony z rozwoju sytuacji i protestował w różnoraki sposób. Historia potoczyła się swoją drogą — zależności odkryte przez Tartaglię czy też Scipiona del Ferro nazywane są powszechnie wzorami Cardana.

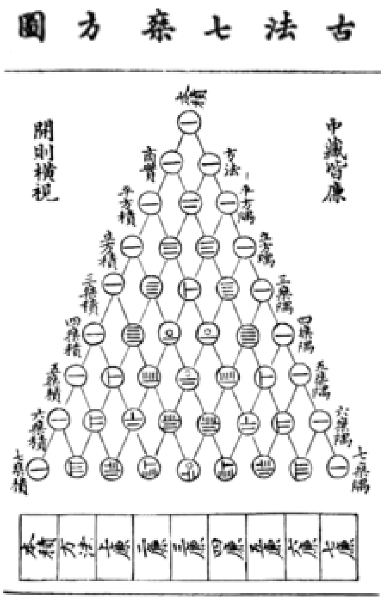
Kolejnym przykładem, znanym głównie historykom matematyki są współrzędne kartezjańskie. Naucza się powszechnie, że układ współrzędnych prostokątnych został odkryty przez René Descartesa, czyli Kartezjusza, który stworzył nową ogólną metodę tłumaczenia problemów geometrycznych na język algebry. W 1637 roku opublikował słynną *Rozprawę o metodzie*, do której dopisał trzy załączniki w tym *La Géométrie*, z nowymi ideami. Jednak rok wcześniej Pierre de Fermat badał własności krzywych stożkowych i dla tych celów także wprowadził układ współrzędnych. Taki układ kojarzy się nam z dwiema osiami prostopadłymi i odpowiednio liczonymi współrzędnymi. U Kartezjusza wygląda to inaczej. Jest tylko jedna oś odciętych, a w zasadzie półoś dodatnia. Nie ma osi rzędnych. Drugą współrzędną wyznacza się jako odległość punktu od osi odciętych. Fermat liczy to niemal identycznie jak my obecnie. Jednak jego wyniki nie zostały przez niego opublikowane i dla Fermata było to tylko narzędzie do rozwiązania konkretnego problemu, a nie nowa ogólna metoda. Niektórzy historycy matematyki początków idei układu współrzędnych dopatrują się w dziele *Stożkowe* Apoloniusza z Pergi. Twierdzą, że właśnie od Apoloniusza Fermat i Kartezjusz zaczerpnęli pomysł współrzędnych.

W XVII wieku pojawił się jeszcze jeden obiekt, do odkrycia którego pretenduje wiele osób. Jest to trójkąt Pascala, dobrze znana trójkątna tabela liczb o niezwykłych własnościach.

0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .



Rys. 1. Trójkąt Pascala w pracy Pascala



Rys. 2. Chińska wersja trójkąta Pascala

Pascal opisał tę konfigurację w 1653 roku w rozprawie *Traité du triangle arithmétique*, a jego nazwisko zostało przypisane do trójkąta przez de Moivre'a i de Montmorta. We Włoszech mówi się o trójkącie Tartaglii, ale i tym razem nie miał szczęścia, bo nazwa nie przyjęła się powszechnie. Historia trójkąta jest jednak bardziej skomplikowana i znacznie dłuższa, bowiem już w X wieku w Indiach można znaleźć wzmianki o nim. Co więcej komentarze te dotyczą dzieła z drugiego wieku przed Chrystusem. W Persji trójkąt też był znany dużo wcześniej. W XI wieku znakomity matematyk i poeta Omar Chajjam studiował jego własności. Chińczycy nie byli gorsi, również w XI wieku trójkątem zajmował się matematyk o nazwisku Jia Xian i później w XIII wieku Yang Hui i obecnie w Chinach trójkąt Pascala nosi jego imię.

Jak widać, trudno przewidzieć, jak historia potraktuje dane odkrycie. Często zdarza się, że o nazwie jakiegoś pojęcia lub twierdzenia decyduje zbieg okoliczności. Niektóre fakty odkrywane są wielokrotnie, najpierw wydają się mało znaczące, by później znaleźć się w centrum zainteresowania matematyków. Specyficzny jest los funkcji dzeta Riemanna

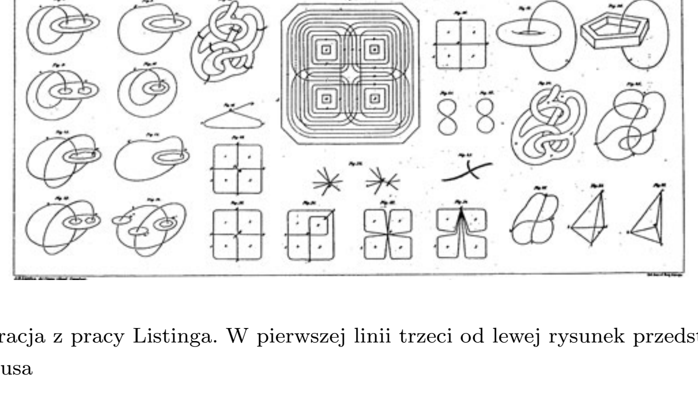
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^z .$$

Dla szczególnych wartości badano ją już w XIII wieku. Mikołaj z Oresme udowodnił rozbieżność szeregu harmonicznego (czyli dla $z = 1$). Bracia Jacob i Johann Bernoulli zastanawiali się, ile wynosi suma odwrotności kwadratów, co w końcu wyznaczył Leonhard Euler, który wyliczył także wartości funkcji dzeta dla liczb parzystych. Euler studiował funkcję dzeta, ale tylko dla wartości rzeczywistych. Jego największym osiągnięciem w tej dziedzinie było przedstawienie funkcji dzeta w postaci iloczynowej

$$\zeta(z) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-z}} ,$$

gdzie p przebiega wszystkie liczby pierwsze. Zależność ta stała się punktem wyjścia do rozważań dla Bernharda Riemanna. W 1859 roku napisał jedyną niewielką pracę poświęconą teorii liczb *„Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"*, w której głównym bohaterem była funkcja dzeta. Riemann rozszerzył ją na liczby zespolone, zanotował szereg własności i sformułował słynną hipotezę o miejscach zerowych nazwaną później hipotezą Riemanna. Choć reprezentacja Eulera odegrała kluczową rolę, to dopiero spostrzeżenia Riemanna ukazały znaczenie funkcji dzeta. Nic więc dziwnego, że nazwano ją jego nazwiskiem. Tylko nieliczni próbują nieśmiało mówić o funkcji Eulera-Riemanna.

Z analogicznych powodów mówimy o wstędze Möbiusa a nie Listinga. Mało kto wie, że matematyk Johann Benedict Listing, autor terminu topologia, również opisał wstęgę Möbiusa i zrobił to nieco wcześniej od Möbiusa. Jego tekst noszący tytuł *Census* ukazał się w 1858 roku.



Rys. 3. Ilustracja z pracy Listinga. W pierwszej linii trzeci od lewej rysunek przedstawia wstęgę Möbiusa

W tym samym roku Möbius przygotował pracę na konkurs Paryskiej Akademii. W pracy tej także pojawia się wstęga. Möbius jednak poświęca jej znacznie więcej miejsca niż Listing, zwraca uwagę na nieorientowalność. Tekst został opublikowany dopiero w 1865 roku pod tytułem *Über die Bestimmung des Inhaltes von Polyedern.* A zatem pierwszeństwo odkrycia należy się Listingowi. Jednak Möbius zbadał dokładniej niezwykłe własności wstęgi. Listing w zasadzie tylko zauważył jej istnienie. Nic więc dziwnego, że historia wybrała nazwisko Möbiusa.

Tym razem widać, że czasem o nazwie nie decyduje czysty przypadek i zbieg okoliczności, lecz zaangażowanie danej osoby w „rozpracowanie" pojęcia lub jego rozpropagowanie. Tak też było miedzy innymi z dywanem Sierpińskiego. W pracy, w której Sierpiński przedstawia konstrukcję zbioru nazwanego później trójkątem Sierpińskiego pod sam koniec artykułu zwraca uwagę, że Stefan Mazurkiewicz poinformował go o konstrukcji ciekawej krzywej na bazie kwadratu. Opisana konstrukcja jest niczym innym jak właśnie dywanem Sierpińskiego. Przeglądając literaturę na ten temat stwierdzamy, że Mazurkiewicz nie zajął się więcej opisanym przez siebie obiektem. Natomiast Sierpiński udowodnił szereg własności dywanu oraz napisał kilka prac.

Zauważymy, że już przed rokiem p. Stefan Mazurkiewicz znalazł przykład krzywej (cantorowskiej i jordanowskiej jednocześnie), której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia rzędu nieskończonego (t. j. w każdym punkcie p krzywej schodzi się nieskończenie wiele kontynuów, będących podmnogościami tej krzywej, z których każde dwa posiadają tylko punkt p jako wspólny).

Przykładu swego p. Mazurkiewicz dotąd drukiem nie ogłosił, a dowód jego jest mi nieznany. Samą krzywą otrzymuje p. Mazurkiewicz, dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów (zapomocą równoległych do boków) i usuwając wnętrze kwadratu środkowego, a z każdym z pozostałych 8-miu kwadratów postępując taksamo jak z pierwotnym kwadratem, i t. d. in infinitum.

Rys. 4. Tekst z pracy Sierpińskiego [4] opisujący konstrukcję dywanu.

Zdarza się czasem, że trochę na siłę próbuje się szukać nowego autora znanego pomysłu lub odkrycie przypisuje się osobie, która być może nie miała z nim nic wspólnego. W historii matematyki bardzo dobrze znany jest przypadek wielościanów archimedesowych inaczej półforemnych, czyli takich, których ściany są wielokątami foremnymi, niekoniecznie przystającymi, a naroża są przystające. Nieznana jest żadna praca Archimedesa, w której zajmowałby się tymi wielościanami. Co więcej, do czwartego wieku naszej ery nikt nie wspomniał o wielościanach Archimedesa. Uczynił to dopiero Pappus z Aleksandrii w dziele *Synagoge* pochodzącym z ok. 415 roku. Czyżby nikt wcześniej nie zwrócił uwagi na wynik Archimedesa, a może Pappus był pewien, że kto jak kto, ale Archimedes musiał znać te obiekty. Dopiero Kepler w *Harmonices mundi* w 1619 roku udowodnił, że istnieje dokładnie 13 typów wielościanów archimedesowych. Kepler znał graniastosłupy i antygraniastosłupy, ale nie zaliczał ich do brył archimedesowych.

Działającemu w pierwszej połowie XVII wieku Kartezjuszowi przypisuje się odkrycie wzoru Eulera dla wielościanów, to znaczy wzoru, że suma liczby ścian i wierzchołków jest o dwa większa od liczby krawędzi. W połowie XIX wieku odnaleziono pewien list Kartezjusza, w którym podaje on wzór na sumę kątów zewnętrznych w wielościanie. Wzór ten ewidentnie wynika ze wzoru Eulera, którego Kartezjusz nigdzie nie cytuje. Wielu historyków jest przekonanych, że Kartezjusz musiał znać tę zależność, żeby uzyskać wzór na sumę kątów. Są jednak i tacy, którzy uważają, że twierdzenie można uzyskać na innej drodze bez wzoru Eulera. Niewykluczone, że Kartezjusz w ogóle nie znał dowodu, a twierdzenie sprawdził na kilku przypadkach. W czasach Kartezjusza nie przejmowano się zbytnio dowodami zostawiając je czytelnikom prac lub adresatom listów. Sam Euler opisał i udowodnił wzór dla wielościanów w pracach [2] i [3] z 1752 roku. Kuszące jest przypuszczenie, że ponad sto lat wcześniej wzór był już znany Kartezjuszowi. Dotychczas odkryte materiały nie są wstanie potwierdzić tego w stu procentach. W tym przypadku działanie zasady Arnolda jest raczej problematyczne.

Niejednoznacznych przykładów z historii matematyki można przytaczać jeszcze wiele. Niezbyt jasna jest już historia twierdzenia Talesa i Pitagorasa, kto i kiedy sformułował definicję granicy funkcji, jak wygląda naprawdę historia płaszczyzny Gaussa i oktonionów nazywanych oktawami Cayleya? To tylko kilka pytań, na które odpowiedź potwierdza skuteczność zasady Arnolda. Można się zastanawiać, jaka sytuacja jest lepsza, gdy mamy kilku autorów pretendujących do pierwszeństwa, czy też mamy pojęcie lub twierdzenie, które jest „bezimienne" — nikt nie potrafi wskazać autora. Jedno jest pewne: matematykę tworzyli ludzie — stwierdzenie banalne w swojej oczywistości. Jednak nie dla wszystkich. Uczniowie a nawet studenci nie potrafią wymienić nazwisk kilku znanych matematyków. Warto więc przy każdej okazji przypominać tę oczywistą tezę, nawet gdy zasada Arnolda jest źródłem niejednoznaczności i prowadzi do nieporozumień. Z pewnością zmusza do poszukiwania prawdy.

Literatura

[1] Arnold, *O nauczaniu matematyki*, Wiadomości Matematyczne, XXXVII, 2001, 17-26.

[2] Euler L.: *Elementa Doctrinae Solidorum*, Novi Commentarii Academiae Scient. Petropolit. 4, 1752/53, 109-140.

[3] Euler L.: *Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris...*, Novi Commentarii Academiae Scient. Petropolit. 4, 1752/53, 140-160.

[4] Sierpiński W.: *O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia*, Prace Matematyczno-Fizyczne t.27, nr 1, 1916, 77-86.

[5] Sierpiński W.: *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée.* C. r. hebd. Seanc. Acad. Sci., Paris 162, 1916, 629-632.

[6] Stillwell J.: *Mathematics and its History*, SpringerVerlag, New York, 1974.