

Własności ekstremalne figur izoperymetrycznych na płaszczyźnie

rozważania geometryczne

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

I. Trochę historii zamiast wstępu.

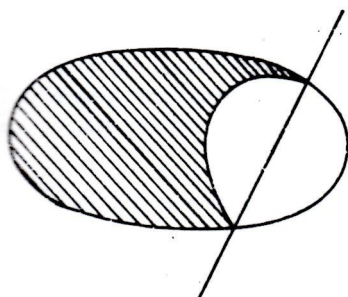
Problemy znajdowania maksymalnych i minimalnych wielkości geometrycznych (kształtów, pól figur) intrygowały matematyków od dawna. Początkowo zagadnienia te rozwiązywano doświadczalnie, ale wraz z rozwojem geometrii rozwiązania te przybierały charakter dowodu. W starożytnej Grecji (i nie tylko tam) wiadomo było na przykład, że koło ma największe pole ze wszystkich figur o takim samym obwodzie.

Pytania związane z wyznaczaniem maksymalnych i minimalnych wielkości były wtedy dziedziną badań. I tak na przykład Zenodor (III i II w.p.n.e.) zawarł uzyskane wyniki w traktacie *O figurach mających jednakowy obwód*. Zachowane fragmenty dzieła, cytowane przez Pappusa i Teona z Aleksandrii (ok. III-IV w.n.e.) podają m.in. następujące stwierdzenia:

Trójkąt równoramienny ma pole większe, niż każdy inny trójkąt o tej samej podstawie i równym obwodzie,

Wśród wielokątów o ustalonym obwodzie i o jednakowej liczbie boków wielokąt foremny ma największe pole.

W średniowieczu nie kontynuowano badań rozpoczętych przez Zenodora. Dopiero wiek XVII, wraz z rozwojem rachunku różniczkowego, przynosi zainteresowanie matematyków problemami izoperymetrycznymi. Rozwiązania Jacoba Bernoulliego, Leonharda Eulera i Josepha L. Lagrange'a doprowadzają do powstania w drugiej połowie XVIII wieku rachunku wariacyjnego. Efektywność nowej metody usunęła w cień geometryczne sposoby rozwiązywania tych zadań. Jednak pojawiali się geometryści, którzy zadania izoperymetryczne rozwiązywali na drodze elementarnych rozważań. Należeli do nich m.in. Gabriel Cramer (1704-1752), Simon Antoine Jean l'Huilier (1750-1840), Jacob Steiner (1796-1863). Zawdzięczamy im wiele elementarnych rozwiązań. Kilka z nich niżej przypominamy.



Rys. 1

II. Twierdzenie podstawowe. Metoda Steinera.

Od czasów Starożytnych wiadomo, że koło jest figurą o największym polu wśród figur płaskich o ustalonym obwodzie. Metoda Steinera przedstawia elementarne usadnienie tego faktu.

Rozpoczniemy od następującej obserwacji: figura, która przy ustalonym obwodzie ma największe pole jest wypukła! (rys. 1). Zatem tylko takie figury będziemy rozważać.

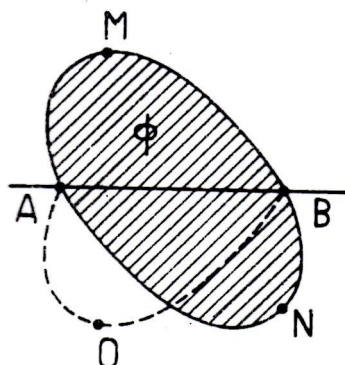
Niech ϕ będzie figurą wypukłą, która przy ustalonym obwodzie ma największe pole.

Lemat 2.1. Każda cięciwa dzieląca na połowę obwód figury ϕ połówi jej pole.

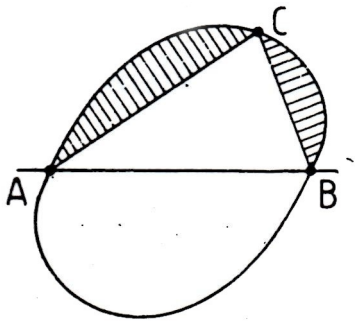
Dowód. Załóżmy, że krzywa $ANBMA$ jest brzegiem figury ϕ i cięciwa AB dzieli tę krzywą na dwie części o jednakowej długości (rys. 2). Jeżeli pole ograniczone krzywą $AMBA$ jest większe od pola ograniczonego krzywą $ABNA$, to wówczas nowa krzywa $AMBOA$ (której łuk $A\hat{O}B$ jest symetryczny do łuku $A\hat{M}B$ względem cięciwy AB) przy nie zmienionym obwodzie ogranicza figurę o większym polu. Jest to sprzeczne z określeniem figury ϕ .

Lemat 2.2. Ze wszystkich trójkątów o danych dwóch bokach największe pole ma ten, w którym boki te są prostopadłe.

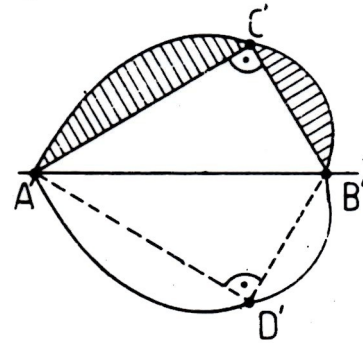
Dowód. Wynika to ze znanego wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2}ab \sin x$, gdzie $0 < x < \pi$ jest miarą łukową kąta zawartego między bokami a i b .



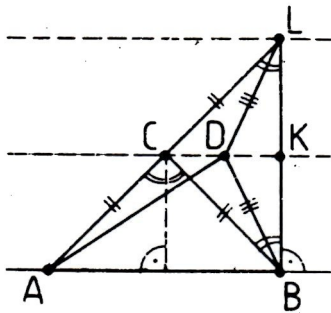
Rys. 2



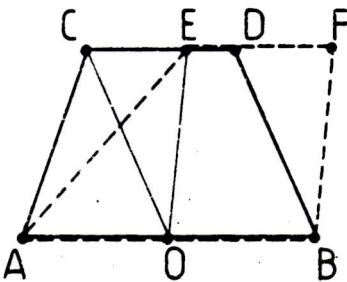
Rys. 3



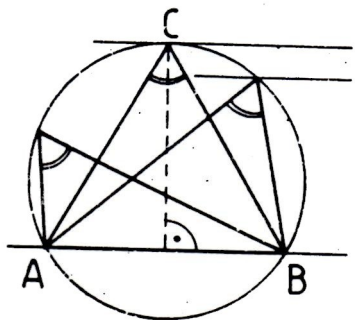
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Lemat 2.3. Każda cięciwa połowiąca obwód figury ϕ jest widziana z każdego punktu na brzegu $\partial\phi$ (różnego od końców cięciwy) pod kątem prostym.

Dowód. Załóżmy, że AB jest cięciwą połowiącą obwód figury ϕ , którą widać z punktu $C \in \partial\phi$ ($C \neq A$ i $C \neq B$) pod kątem różnym od prostego (rys. 3). Zbudujmy taki trójkąt prostokątny $A'B'C'$, że $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ i C' jest wierzchołkiem kąta prostego (rys. 4). Punkty A' , C' i B' , C' łączymy odpowiednio łukami przystającymi do łuków AC i BC . Na podstawie Lematu 2.2

$$|\Delta A'B'C'| > |\Delta ABC|,$$

wobec czego pole figury ograniczonej krzywą $A'B'C'A'$ jest większe od pola figury ograniczonej krzywą $ABCA$. Jeżeli do figury $A'B'C'A'$ dodamy figurę symetryczną względem $A'B'$, to otrzymamy figurę $A'C'B'D'A'$, która przy nie zmienionym obwodzie ma pole większe od pola figury ϕ . Sprzeczność!

Twierdzenie 2.4. (Podstawowe twierdzenie izoperymetryczne) Wśród wszystkich krzywych izoperymetrycznych na płaszczyźnie figurę o największym polu ogranicza okrąg.

Dowód. Niech ϕ będzie figurą o największym polu wśród figur izoperymetrycznych. Z lematu 2.3 wynika, że zbiór $\partial\phi$ jest miejscem geometrycznym punktów, z których dany odcinek (cięciwę połowiącą obwód figury ϕ) widać pod kątem prostym. Jest to cecha charakterystyczna okręgu! Zatem ϕ jest kołem.

Uwaga 2.5. Powyższe rozumowanie opiera się na przyjętym milcząco założeniu, że wśród figur o ustalonym obwodzie istnieje figura o największym polu. Ani Zenodor, ani jego następcy (aż do Steinera włącznie) nie wątpili w istnienie takiej figury. Uzupełnienie tej luki zawdzięczamy F. Edlerowi (*Göttingen Nachrichten*, 1882, str. 73–80).

Uzasadnienie istnienia rozwiązania jest konieczne. Ilustruje to następujący przykład: wśród wszystkich figur wypukłych o obwodzie mniejszym od $L > 0$ nie istnieje figura o największym polu. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie małą liczbą rzeczywistą. Dla figury wypukłej o obwodzie $L_1 = L - \varepsilon$ można znaleźć figurę podobną o obwodzie $L_2 = L - \varepsilon/2 > L_1$, której pole jest większe.

III. Dowód Edlera.

Uzupełnienie dowodu Steinera o część egzystencjalną można przeprowadzić używając pewnych twierdzeń granicznych [2, 3]. Pomyśl Edlera nie wymaga stosowania przejść granicznych! Jest on oparty na rozważaniach geometrycznych, a poszczególne etapy same stanowią interesujące zadania izoperymetryczne.

Lemat 3.1. Ze wszystkich trójkątów o ustalonej podstawie i równych wysokościach (czyli równych polach) trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód.

Dowód. Patrz rysunek 5.

Lemat 3.2. Ze wszystkich trapezów o równych podstawach i równych wysokościach trapez równoramienny ma najmniejszy obwód.

Dowód. Rozpatrzmy dwa trapezy – $ABCD$ (równoramienny) i drugi trapez $ABEF$, dla których AB jest jedną wspólną podstawą i $|CD| = |EF|$. Rysujemy odcinki $CO \parallel DB$ oraz $EO \parallel FB$, które przecinają podstawę AB w jednym punkcie O (rys. 6). Wówczas

$$|AC| + |DB| = |AC| + |CO|, \quad |AE| + |FB| = |AE| + |EO|.$$

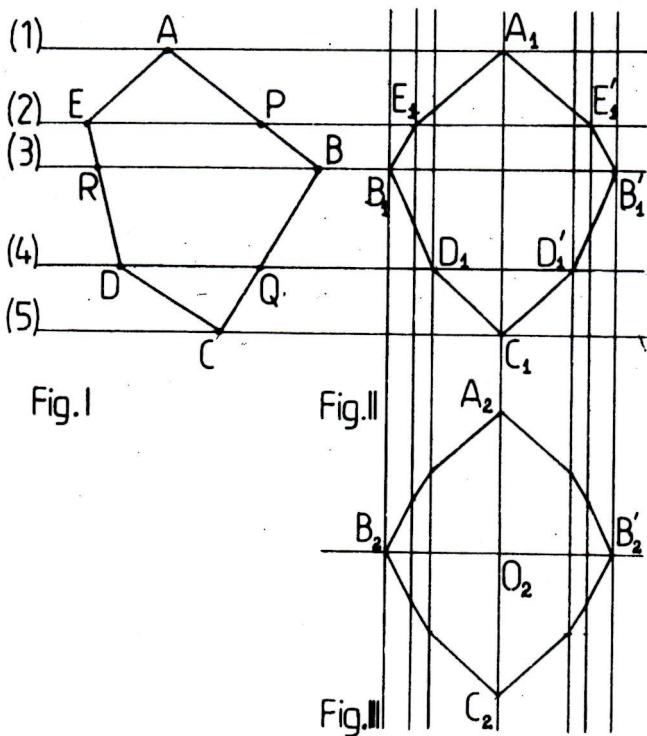
Trójkąty ACO i AEO mają wspólne podstawy, równe wysokości, więc z Lematu 3.1 otrzymujemy tezę.

Lemat 3.3. Ze wszystkich trójkątów o równych podstawach i równych kątach przeciwległych podstawie największe pole ma trójkąt równoramienny.

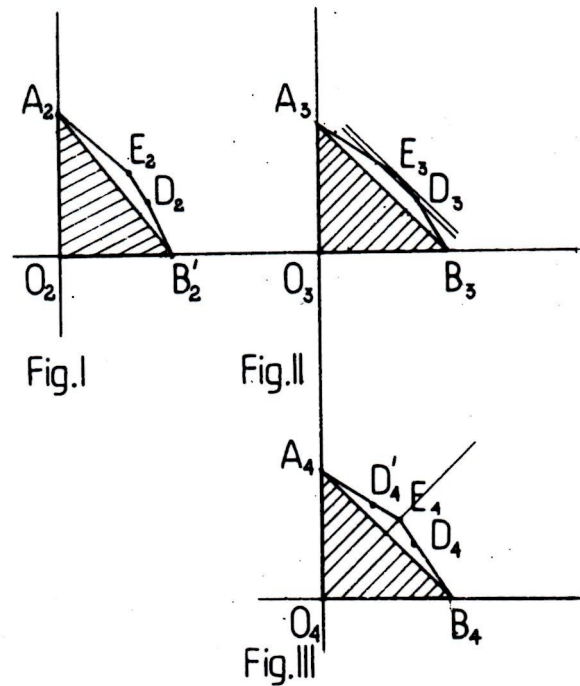
Dowód. Patrz rysunek 7.

Twierdzenie 3.4. Dla każdego nieforemnego wielokąta wypukłego istnieje izoperymetryczny z nim wielokąt foremny o większym polu.

Dowód. Opiszemy teraz konstrukcję znaną pod nazwą symetryzacji Steinera. Weźmy dowolny nieforemny wielokąt wypukły $ABCDE$ (rys. 8, fig. 1). Przez jego wierzchołki prowadzimy wzajemnie równoległe proste w kierunku różnym od wyznaczonych przez boki wielokąta. Proste te dzielą wielokąt na trójkąty i trapezy, których łączna liczba



Rys. 8



Rys. 9

w n -kącie jest mniejsza lub równa $n-1$. Punkt A przenosimy wzdłuż prostej (1) w dowolny punkt A_1 . Przez punkt A_1 prowadzimy prostą do wyznaczonych już równoległych. Odcinki leżące wewnątrz wielokąta EP, RB, DQ odkładamy na odpowiednich prostych równoległych tak, by były one symetryczne względem prostej A_1C_1 , czyli mamy: $EP = E_1E_1', RB = B_1B_1', DQ = D_1D_1'$. Końce tych odcinków w nowym położeniu wyznaczają wierzchołki nowego wielokąta $A_1E_1'B_1D_1C_1D_1B_1E_1$, o co najwyżej $2(n-1)$ bokach (gdy mowa o n -kącie), z następującymi własnościami:

1. pola obu wielokątów są równe!
2. prosta A_1C_1 jest osią symetrii (rys. 8, fig. 2),
3. obwód nowego wielokąta jest mniejszy (!) od obwodu wielokąta wyjściowego, co wynika z Lematów 3.1, 3.2.

Konstrukcję tę powtarzamy w kierunku prostym do wyznaczonego przez punkty A_1, C_1 . Otrzymujemy w ten sposób nowy wielokąt (rys. 8, fig. 3), który zachowuje własności 1, 3, a przy tym ma dwie wzajemnie prostopadłe osie symetrii i liczbę boków mniejszą lub równą $4(n-2)$.

Zajmiemy się teraz czwartą częścią tak otrzymanego wielokąta. Dzielimy ją na trójkąt $O_2A_2B_2$ i „Część” $A_2B_2D_2E_2$ (rys. 9, fig. 1). Nie zmieniając długości boku A_2B_2 przekształcamy $\triangle O_2A_2B_2$ na trójkąt prostokątny $O_3A_3B_3$ tak, by $|A_3B_3| = |A_2B_2|$, $|O_3A_3| = |O_2B_2|$. Z Lematu 3.3, $|\triangle O_3A_3B_3| \geq |\triangle O_2A_2B_2|$. „Część” $A_2B_2D_2E_2$ przekształcamy na figurę podobną $A_3B_3D_3E_3$ (rys. 9, fig. 2). Przez punkty D_3 i E_3 prowadzimy teraz proste równoległe do A_3B_3 i opisanym już sposobem przekształcamy wielokąt $A_3B_3D_3E_3$ na „Część” symetryczną $A_4B_4D_4E_4D_4$ względem $O_4E_4 \perp A_4B_4$ (rys. 9, fig. 3). Otrzymujemy w ten sposób nowy fragment wielokąta $O_4A_4D_4E_4D_4B_4$ o:

- 1° polu nie mniejszym od wyjściowego,
- 2° osi symetrii, która dzieli kąt $A_4O_4B_4$ na połowy,
- 3° długości łamanych spełniających warunek

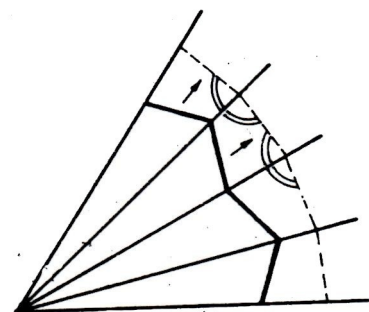
$$|A_4D_4'| + |D_4'E_4| + |E_4D_4| + |D_4B_4| \leq |A_2E_2| + |E_2D_2| + |D_2B_2'|.$$

Wykonując analogiczne operacje w pozostałych trzech fragmentach wielokąta otrzymujemy nowy wielokąt o liczbie boków mniejszej lub równej $8(n-3)$ i 4 osiach symetrii. Podobną operację przeprowadzamy teraz z $\frac{1}{8}$ wielokąta, czyli figurą $O_4E_4D_4B_4$ (rys. 9, fig. 3). W konsekwencji otrzymujemy nowy (piąty) wielokąt z 8 osiami symetrii. Kontynuując to postępowanie otrzymujemy kolejne wielokąty, których liczba osi symetrii wynosi odpowiednio

$$0, 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots,$$

a liczba boków nie przekracza liczb

$$n, 2(n-1), 2^2(n-2), 2^3(n-3), 2^4(n-4), \dots$$



Rys. 10

Po skończonej liczbie kroków (co najwyżej $n - 1$) otrzymujemy wielokąt mający 2^k osi symetrii, gdzie $k \leq n - 2$ i 2^{k+1} boków tak, że między dwiema sąsiednimi „półosiąmi” symetrii będzie jeden bok wielokąta (rys. 10). Przesuwamy teraz boki wielokąta tak, aby kąty między każdymi dwoma kolejnymi bokami były równe. Otrzymujemy w ten sposób wielokąt foremny mający co najwyżej 2^{n-1} boków, nie mniejsze pole i nie większy obwód od wielokąta wyjściowego.

Z twierdzenia tego wynika

Wniosek 3.5. (Zenodor) Ze wszystkich izoperymetrycznych n -kątników ($n \geq 3$) największe pole ma n -kątnik foremny.
(Inny dowód tego faktu przedstawimy w części VI.)

Twierdzenie 3.6. Dowolny wielokąt foremny ma pole mniejsze niż izoperymetryczne z nim koło.

Dowód. Niech koło K o promieniu r i wielokąt foremny W mają ten sam obwód p . Oznaczamy przez r' promień koła wpisanego w wielokąt W . Na okręgu ∂K opisujemy wielokąt W' podobny do wielokąta W i oznaczamy jego obwód przez $p' > p$. Prawdziwe są proporcje

$$\frac{|W|}{|K|} = \frac{r'}{r}.$$

Z drugiej strony promienie okręgów wpisanych w wielokątach podobnych W i W' mają taki sam stosunek jak ich obwody, czyli

$$\frac{r'}{r} = \frac{p}{p'} < 1,$$

stad $|W| < |K|$.

Twierdzenie 3.7. (Podstawowe twierdzenie izoperymetryczne) Wśród wszystkich figur izoperymetrycznych na płaszczyźnie największe pole ma koło.

Dowód. Niech dane będą figury K i F (K – koło, F – dowolna figura płaska różna od koła K) o równych obwodach p . Tworzymy figurę F' o obwodzie p (używając metod opisanych wcześniej) taką, że

$$|F'| - |F| = d > 0.$$

W figurę F' wpisujemy wielokąt W z tak dobranymi bokami, by

$$|F'| - |W| < d.$$

Wystarczy w tym celu, aby wszystkie punkty brzegowe $\partial F'$ były oddalone od najbliższego boku wielokąta o mniej niż $\frac{d}{p}$ (rys. 11). Obwód wielokąta W wynosi $p' < p$. Na podstawie Twierdzenia 3.4 istnieje wielokąt foremny W' o obwodzie p' taki, że $|W'| \geq |W|$. Jeżeli K' jest kołem izoperymetrycznym z W' , to wobec Twierdzenia 3.6 jest $|W'| < |K'|$. Ponieważ $p' < p$, więc $|K'| < |K|$ i ostatecznie

$$|F| < |W| \leq |W'| < |K'| < |K|.$$

Uwaga 3.8. Inne dowody (również nie wymagające stosowania przejść granicznych) podali C. Carathéodory i E. Study [1,2]

IV. Problem odwrotny izoperymetrii (problem izoareometryczny).

Zdecydujmy teraz, która ze wszystkich figur płaskich o danym polu ma najmniejszy obwód.

Podstawowe twierdzenie izoperymetryczne (Tw. 2.4, Tw. 3.7) orzeka, że największe pole wśród figur o obwodzie p ma koło o promieniu $r = \frac{p}{2\pi}$. Niech F oznacza pole figury o obwodzie p . Wówczas powyższe stwierdzenie możemy wyrazić za pomocą nierówności:

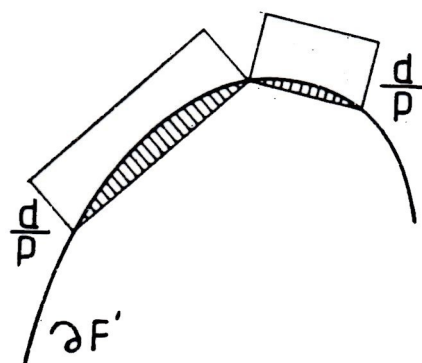
$$F \leq \pi \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = \frac{p^2}{4\pi}, \quad p^2 - 4\pi F \geq 0,$$

przy czym znak równości ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy rozważana figura jest kołem. Stąd otrzymujemy nierówność

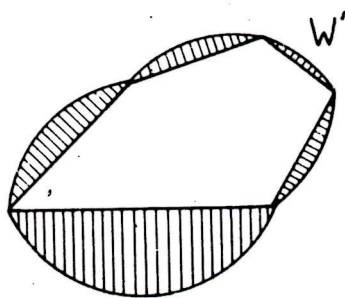
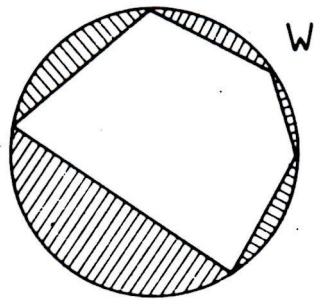
$$p \geq 2\sqrt{\pi F},$$

którą można odczytać następująco:

Twierdzenie 4.1. Wśród wszystkich krzywych płaskich ograniczających figury o danym polu najmniejszy obwód ma okrąg.



Rys. 11



Rys. 12

Załóżmy, że prawdziwe jest

Twierdzenie 4.2. Wśród wszystkich figur izoperymetrycznych na płaszczyźnie należących do klasy S (np. trójkątów, czworokątów, itp.) największe pole ma figura ϕ o kształcie \mathcal{F} .

Wówczas prawdziwe jest

Twierdzenie 4.3. Ze wszystkich figur płaskich o ustalonym polu, należących do klasy S , najmniejszy obwód ma figura o kształcie \mathcal{F} .

Dowód. Niech ϕ będzie figurą z klasy S o kształcie \mathcal{F} i polu P , zaś ψ inną figurą z klasy S o polu P . Tworzymy figurę ϕ' podobną do figury ϕ o obwodzie równym obwodowi figury ψ . Z Twierdzenia 4.2 mamy $|\phi'| \geq |\psi| = |\phi|$. Ponieważ figury ϕ' i ϕ są podobne, więc obwód figury ϕ' jest nie mniejszy od obwodu figury ϕ .

V. Problem przegubowego wielokąta.

Wraz z wynalezieniem rachunku różniczkowego i rozpowszechnieniem badań nad teorią maksimów i minimów powstało następujące zadanie: wśród wszystkich wielokątów, jakie dadzą się utworzyć z danych odcinków występujących w ustalonym porządku, znaleźć ten, który ma największe pole.

Jego rozwiązanie zawdzięczamy Cramerowi.

Zacznijmy od nietrywialnej obserwacji: z odcinków danych w ustalonym porządku o długościach a_1, a_2, \dots, a_n (jeśli tylko $|a_i| < |a_1| + \dots + |a_{i-1}| + |a_{i+1}| + \dots + |a_n|$, $i = 1, 2, \dots, n$) można utworzyć wielokąty o ogromnej liczbie kształtów, jednak tylko w jednym przypadku taki wielokąt można wpisać w okrąg [1, 5].

Twierdzenie 5.1. (Cramer, 1752) Ze wszystkich wielokątów złożonych z odcinków następujących w danym porządku o długościach a_1, a_2, \dots, a_n , największe pole ma ten, na którym można opisać okrąg.

Dowód. Oznaczmy przez W wielokąt z danymi bokami a_1, a_2, \dots, a_n wpisany w pewien okrąg O , zaś przez W' dowolny inny wielokąt o takich samych bokach (rys. 12). Oznaczmy przez o_i łuki okręgu O rozpięte na cięciwach a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) wielokąta W' . Otrzymujemy w ten sposób figurę F , której obwód jest równy obwodowi okręgu O . Na podstawie twierdzenia izoperymetrycznego jest $|O| > |F|$. Pomijając pola ograniczone łukami o_i rozpiętymi na cięciwach a_i , stwierdzamy, że $|W| > |W'|$.

Podobne twierdzenie do powyższego podał l'Huilier w 1782 r., brzmi ono następująco:

Twierdzenie 5.2. Ze wszystkich n -kątów z danymi kątami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i danym obwodzie największe pole ma ten, który można opisać na okręgu.

Dowód. Patrz [3, 6], dla czworokątów zaś [5].

VI. Twierdzenie Zenodora.

Rozpoczniemy od następującego faktu:

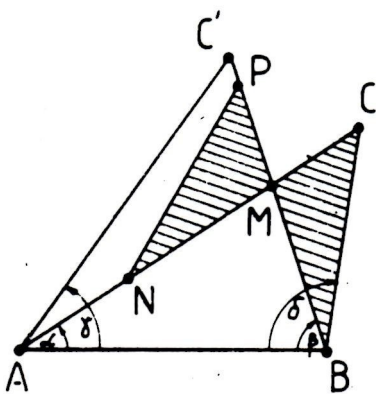
Lemat 6.1. Jeżeli dwa trójkąty mają równe podstawy i obwody, to większe pole ma ten trójkąt, w którym różnica miar kątów przy podstawie (lub, co na jedno wychodzi – różnica boków) jest mniejsza.

Dowód. Niech $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$ spełniają założenia lematu (rys. 13). Przy oznaczeniach takich jak na rysunku: $\alpha < \gamma, \beta < \delta$, a ponadto $\gamma - \alpha < \delta - \beta$. Niech M oznacza punkt przecięcia prostych AC i BC' . Odkładamy na prostej MA odcinek $MN = MB$ i na prostej MC' odcinek $MP = MC$. Punkt N leży między punktami A i M , zaś punkt P między punktami C' i M (!). Ponieważ trójkąty BMC i NMP są identyczne, więc $|\triangle ABC| < |\triangle ABC'|$.

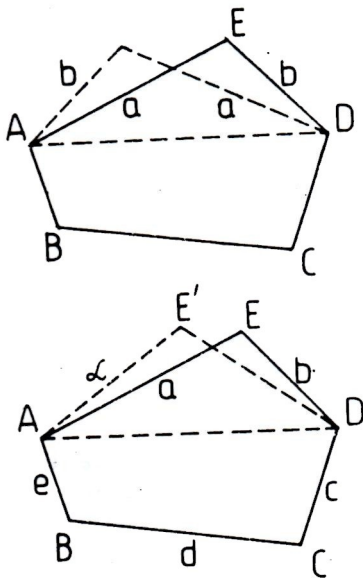
Wniosek 6.2. Ze wszystkich trójkątów o wspólnej podstawie i ustalonym obwodzie największe pole ma trójkąt równoramienny.

Twierdzenie 6.3. (Zenodor) Ze wszystkich izoperymetrycznych n -kątów ($n \geq 3$) największe pole ma n -kąt foremny.

Dowód. Wystarczy wykazać, że dowolny n -kąt z nierównymi bokami ma pole mniejsze od izoperymetrycznego z nim n -kąta o równych bokach. Wtedy ten ostatni na podstawie Twierdzenia Cramera ma pole nie większe od pola n -kąta foremnego.



Rys. 13



Rys. 14

Niech dany będzie dowolny n -kąt $ABCD \dots E$ o nierównych bokach długości a, b, c, d, \dots, e (rys. 14). Pokażemy, że ma on pole powierzchni mniejsze niż n -kąt o bokach długości $\alpha = \frac{a+b+c+d+\dots+e}{n}$. Dwa sąsiednie boki n -kąta możemy ze sobą zamieniać bez zmiany obwodu i pola powierzchni wielokąta. Pozwala to zbudować wielokąt z bokami ułożonymi w zadanym porządku. Jeżeli nie wszystkie boki n -kąta mają długość α , to nie istnieją boki a, b takie, że $|a| > \alpha$ i $|b| < \alpha$. Niech a i b będą bokami sąsiednimi. Wtedy trójkąt $\triangle ADE$ zastąpimy trójkątem $\triangle ADE'$ o takim samym obwodzie, dla którego $|AE'| = \alpha$. Wówczas

$$\begin{aligned} |AE'| + |E'D| &= |AE| + |ED|, \\ |AE| &> |AE'| > |ED|, \\ |E'D| &> |ED| = |b|, \quad |E'D| < |AE| = |a|, \end{aligned}$$

czyli

$$|a| > |E'D| > |b|,$$

Stąd

$$||AE'| - |E'D|| < |a| - |b|.$$

Na podstawie Lematu 6.1,

$$|\triangle ADE'| > |\triangle ADE|.$$

Opisaną procedurę powtarzamy do momentu, gdy wszystkie boki n -kąta mają długość α . Ostatecznie otrzymujemy n -kąt o równych bokach i większej powierzchni przy nie zmienionym obwodzie.

Uwaga 6.4. Jeszcze inny dowód Twierdzenia Zenodora zawiera praca [1], str. 308–391.

VII. Zakończenie

Analogiczne problemy można rozważać w euklidesowych przestrzeniach \mathbb{R}^n ($n > 2$). Ich rozwiązania podali: H. Schwarz w 1890 r. dla $n = 3$ [1], L. Lusternik w 1935 r. i E. Schmidt w 1939 r. dla wszystkich $n \geq 2$.

Literatura

- [1] O. Chisini, *Elementarna teoria izoperymetrów*, X artykuł w pracy: „Zagadnienia geometrii” zebrane i ułożone przez F. Enriquesa, tom II, Konstrukcje geometryczne i teoria izoperymetrów, Warszawa 1917, str. 331–407.
- [2] J. Górnicki, *Mitologia i twierdzenie izoperymetryczne*, „Delta” 11/1984, str. 6–7.
- [3] I.M. Jagłom, W.G. Bołtański, *Figury wypukłe*, PWN, Warszawa 1955.
- [4] M. Kerner, *Maksima i minima w dziedzinie geometrii*, Biblioteczka Matematyczna t. 7., Lwów – Warszawa.
- [5] Д.А. Крыжановский, „Изопериметры, максимальные и минимальные свойства геометрических фигур”, Москва 1959.
- [6] Л.А. Люстерник, „Выпуклые фигуры и многогранники”, Гостехиздат, 1956.
- [7] H. Rademacher, O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956.