Czy szeregi rozbieżne mogą mieć skończoną sumę?

O związkach między teorią sumowalności i teorią prawdopodobieństwa

Tadeusz GERSTENKORN, Łódź

Pierwsze rozważania dotyczące ciągów i szeregów nieskończonych pojawiły się już w XVII i XVIII w. Tacy matematycy jak Szwajcar Leonhard Euler (1707–1783), Niemiec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Anglik Isaac Newton (1643–1727) wielokrotnie używali w swoich pracach ciągów i szeregów nieskończonych.

Szeregi nieskończone były dla nich wynikami pewnych rachunków, narzucały się im niejako bezpośrednio przy niektórych działaniach. Tak np. szereg geometryczny $1 + x + x^2 + \ldots$ rozpatrywano jako wynik nie kończącego się działania dzielenia 1 przez $1-x$ $(1/(1-x))$.

W owym czasie zagadnienia zbieżności, rozumiane współcześnie, były tym matematykom obce. Gdy tak popatrzymy na sprawę, to nie powinno nas dziwić, że wybitny matematyk Euler obliczał sumę szeregu geometrycznego

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

również dla $x = -1$ lub $x = -2$ i bez wahania pisał

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}, \quad 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots = \frac{1}{3}$$

oraz analogicznie ze wzoru

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

wnioskował, że

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}$$

oraz podobnie w innych przypadkach.

Tymczasem dzisiaj każdy uczeń szkoły średniej wie (a przynajmniej powinien wiedzieć), że szereg geometryczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < 1$ i wówczas jego suma jest równa $\frac{1}{1-x}$. Jeśli $x \geq 1$, to szereg ten ma sumę równą $+\infty$, a jeśli $x \leq -1$, to nie ma on sumy. W pierwszym zdaniu użyliśmy terminu „szereg zbieżny", a w drugim – „szereg ma sumę", gdyż pamiętamy, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywa się zbieżny, jeśli ma on sumę będącą liczbą skończoną, tzn. jeśli ciąg sum częściowych

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,, \quad n \in \mathbf{N} \quad (\mathbf{N} \text{ – zbiór liczb naturalnych})$$

tego szeregu ma granicę skończoną, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Tak więc Euler, inaczej niż to czynimy obecnie, dopuszczał możliwość przypisywania szeregowi sumy w każdym przypadku, jeżeli szereg był rozwinięciem pewnego wyrażenia algebraicznego, które przy danej wartości zmiennej miało określoną wartość liczbową. Wartość tę uważał w każdym przypadku za sumę szeregu.

Prosty przykład wykazuje, że takie podejście jest niesłuszne, gdyż nie precyzuje dokładnie warunków konstruowania szeregu.

Zauważmy, że szereg: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ powstaje z dzielenia 1 przez $1-x$ dla $x = -1$ i w oparciu o metodę eulerowską powinien mieć sumę równą $1/2$. Nie widać jednak powodów, dla których ten sam szereg nie mógłby być otrzymany z zupełnie innego wyrażenia i w związku z tym nie mógłby mieć całkiem innej sumy.

Istotnie, powyższy szereg powstaje także z dzielenia

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3} = 1 - x^2 + x^3 - \ldots \quad \text{dla} \quad x = 1\,.$$

Na podstawie tego sposobu powstawania szeregu należałoby zatem przyjąć, że $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 2/3$.

Zasada, którą kierował się Euler, jako niejednoznaczna w wynikach, nie może być uznana za pewną. Jest ciekawe, że niezwykłe, instynktowne wyczucie matematycznej prawdy ustrzegło tego wielkiego matematyka od dochodzenia do fałszywych wyników przy formułowaniu ogólnych twierdzeń.

Dopiero w latach dwudziestych XIX w. matematyk francuski Augustin Louis Cauchy (1789–1857) i matematyk norweski Niels Henrik Abel (1802–1829) sprecyzowali pojęcie zbieżności, a zarazem odrzucili wszystkie szeregi rozbieżne (nie zbieżne).

Przyjęta została zatem umowa, polegająca na ograniczeniu rozważań tylko do ciągów zbieżnych, tj. takich, których wyrazy zbliżają się, w sensie precyzyjnie ujętym, do pewnej określonej liczby. Liczbę tę przyporządkowano ciągowi jako jego granicę.

Przyjęta przez matematyków początku wieku XIX umowa wydaje się prosta, choć nasuwa wątpliwości, czy jest korzystna.

Powstaje bowiem pytanie, czy dałoby się określić metodę, która w pewien „racjonalny sposób" każdemu ciągowi przyporządkowałaby pewną wartość s.

W „racjonalny sposób" mogłoby, na przykład oznaczać, że metoda, która ma dać s, będzie pozostawać w bliskim związku z dotychczasowym pojęciem zbieżności (tzn. z granicą $\lim_{n\to\infty} s_n = s$), pojęciem na tyle wypróbowanym, że nie chcielibyśmy się od niego oddalać bez poważnych powodów.

Objaśnijmy te ogólne wskazówki na przykładzie.

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

a więc szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ dla $x = -1$, czyli ciąg $(s_n) = 1, 0, 1, \ldots,$ był dotychczas odrzucany, jako rozbieżny. Wyrazy tego ciągu nie zbliżają się do żadnej określonej granicy, lecz przyjmują na przemian wartości 0 i 1. Ale właśnie ten przykład nasuwa myśl o utworzeniu ciągu (s'_n) średnich arytmetycznych:

$$s'_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zauważmy, że podany wyżej ciąg (s_n) daje się zapisać następująco:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} s'_n &= \frac{\frac{1}{2}\left(1 + (-1)^0\right) + \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^1\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)}{n+1} = \\ &= \frac{1 + (-1)^0 + 1 + (-1)^1 + \ldots + 1 + (-1)^n}{2(n+1)} = \\ &= \frac{n + 1 + \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

Widoczne jest, że ciąg s'_n jest zbieżny (w dotychczasowym znaczeniu) do liczby 1/2:

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \frac{1}{2}.$$

Udało się nam przeto, tworząc średnie arytmetyczne, nadać sens paradoksalnemu wzorowi Eulera

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

tzn. przyporządkować szeregowi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ wartość 1/2, wydobywając niejako tę wartość z szeregu.

Metoda średnich arytmetycznych, która okazała się celowa dla szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, gdyż przekształciła go w szereg zbieżny w nowym znaczeniu, o sumie 1/2, jest także pożyteczna dla innych szeregów.

Wiadomo, na przykład, że szereg Fouriera funkcji ciągłej może okazać się rozbieżny. W początku XX w. węgierski matematyk Leopold Fejér (1880–1959) udowodnił twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli $f(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą dla $0 \le x \le 2\pi$, mającą okres 2π, a $s_n(x)$ jest sumą częściową jej szeregu Fouriera

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

to ciąg średnich arytmetycznych

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}$$

jednostajnie dąży do $f(x)$ dla wszystkich x (tzn. $\sup\limits_x |\sigma_n(x) - f(x)| \to 0$).

Oprócz wymienionej tutaj metody średnich arytmetycznych powstało wiele innych metod, które z dobrym wynikiem ciągowi (s_n) przyporządkowują wartość s i mogą zastąpić dotychczasowe pojęcie zbieżności. Przedstawimy ogólny ich zarys.

Niech będzie dany szereg liczbowy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Oznaczmy przez s_k jego k-tą sumę częściową

$$s_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k .$$

Wtedy $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$, jeżeli istnieje, jest sumą danego szeregu w zwykłym rozumieniu.

Określenie każdej uogólnionej metody sumowania szeregu polega na wskazaniu reguły, zgodnie z którą $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$ zastępujemy wyrażeniem, mogącym mieć sens również wtedy, gdy $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$ nie istnieje, a które nazwiemy uogólnioną sumą tego szeregu.

Zdefiniujemy obecnie bardzo szeroką klasę uogólnionych metod sumowania. W tym celu weźmy nieskończoną macierz $A = (a_{nk})$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ i połóżmy

$$(*) \qquad t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k , \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Jeżeli powyższy szereg jest zbieżny w zwykłym sensie dla każdego n i jeżeli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, to liczbę t nazwiemy **uogólnioną sumą** szeregu $\sum u_n$, szereg ten nazwiemy **sumowalnym** metodą A, a ciąg (s_n) **limesowalnym** metodą A.

Do tak określonej klasy metod sumowalności należy także zwyczajny sposób sumowania szeregów. Otrzymujemy go kładąc w macierzy $A : a_{nn} = 1$ i $a_{nk} = 0$ dla $n \neq k$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$. W tym przypadku szereg przybiera postać

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k = s_n , \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

W tym przypadku skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ istnieje tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny w zwykłym sensie i przy tym jego uogólniona suma pokrywa się ze zwykłą.

Także przytoczoną wyżej metodę średnich arytmetycznych możemy otrzymać wykorzystując podany schemat; wystarczy, aby macierz A była następującej postaci

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & 0, & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{bmatrix}$$

w której $a_{nk} = \frac{1}{n}$ dla $k \leq n$ oraz $a_{nk} = 0$ dla $k > n$. Wtedy

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k ,$$

to znaczy t_n jest średnią arytmetyczną n pierwszych sum częściowych s_k.

Największe znaczenie praktyczne mają, oczywiście, te metody, które ciągom zbieżnym w dotychczasowym znaczeniu przypisują taką samą granicę, a szeregom zbieżnym – taką samą sumę. Takie metody nazywamy **regularnymi** lub **permanentnymi**. Poszukiwanie warunków dla regularności metody jest ważnym zadaniem **teorii sumowalności**.

Bardzo ważne i szeroko znane jest twierdzenie Toeplitza (Otto Toeplitz 1881–1940).

Niech $A = (a_{nk})$ będzie taką macierzą, że

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = M < \infty \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1 .$$

Wtedy dla dowolnego ciągu $(s_k)_{k\geq 0}$ (ogólnie biorąc o elementach z tzw. przestrzeni unormowanej E), jeżeli istnieje $\lim_{k\to\infty} s_k = s$, to istnieje $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k = s$.

Znaczenie założeń jest ewidentne z zapisu, ale można je w słowach ująć tak:

1) jeśli wyrazy macierzy sumujemy w poszczególnych wierszach, biorąc ich bezwzględne wartości, to kres górny tych sum ma być skończony;

2) ciągi wyrazów macierzy, tworzące kolumny, mają zmierzać do zera;

3) suma wyrazów w wierszu ma granicę 1, gdy numer wiersza wzrasta do nieskończoności.

Zaproponujemy teraz pewną metodę sumowalności, którą można zinterpretować na gruncie bardzo nowoczesnej teorii matematycznej, znajdującej różnorodne zastosowania praktyczne, tj. na gruncie **teorii prawdopodobieństwa**. Mianowicie:

Niech $A = (a_{nk})$ będzie pewną macierzą nieskończoną o elementach nieujemnych, wierszach sumujących się do 1 i taką, że elementy wszystkich kolumn zbiegają do zera, tzn.

$$a_{nk} \geq 0, \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Można łatwo wykazać (Czytelnik wykona to bez trudu opierając się na twierdzeniu Toeplitza), że metoda limesowalności odpowiadająca podanej macierzy A jest regularna.

Powyższą metodę można w następujący sposób interpretować probabilistycznie.

Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych przyjmujących tylko wartości naturalne lub zero z odpowiadającymi prawdopodobieństwami

$$P(X_n = k) = a_{nk}, \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Warunki (1) i (2) wyrażają to, że ciągi (a_{nk}), dla każdego ustalonego n, są rozkładami prawdopodobieństwa. Wiadomo bowiem (mówi się o tym w szkole średniej), że **rozkład prawdopodobieństwa** zmiennej losowej (scharakteryzowanej jak wyżej) jest to taki ciąg nieujemnych wartości liczbowych przypisanych poszczególnym wartościom tej zmiennej losowej, że suma wszystkich wartości zwanych prawdopodobieństwami jest równa 1.

Jest bezpośrednio widoczne, że ograniczamy się w tych rozważaniach tylko do zmiennych przyjmujących co najwyżej przeliczalną liczbę wartości.

Warunek (3) mówi nam, że ciąg zmiennych losowych (X_n) zbiega **stochastycznie** (tzn. według prawdopodobieństwa) do $+\infty$.

Co to znaczy?

Ujmując rzecz dokładnie należałoby napisać, że żądamy, by

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq N) = 1,$$

gdzie N jest dowolnie dużą liczbą naturalną. Związek ten rozumiemy następująco: Utwórzmy ciąg wyrażeń

$$P(X_1 \geq N) = \sum_{k\geq N}^{\infty} P(X_1 = k) = \sum_{k\geq N}^{\infty} a_{1k},$$

$$P(X_2 \geq N) = \sum_{k\geq N}^{\infty} P(X_2 = k) = \sum_{k\geq N}^{\infty} a_{2k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(X_n \geq N) = \sum_{k\geq N}^{\infty} P(X_n = k) = \sum_{k\geq N}^{\infty} a_{nk},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Naszym wymaganiem jest, by powyższe sumy prawdopodobieństw zbliżały się wraz ze wzrostem numeru (indeksu) zmiennej losowej do 1. Kiedy to jest możliwe?

Zauważmy, że szereg $\sum_{k\geq N}^{\infty} a_{nk}$ można zapisać w postaci różnicy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{N-1} a_{nk}.$$

Wtedy, pamiętając o wymienionej własności rozkładu sumowania się do 1 oraz własności granicy (granica sumy równa się sumie granic), otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq N) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{N-1} a_{nk}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_{nk}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} a_{nk} = 1 - \sum_{k=0}^{N-1}\lim_{n\to\infty} a_{nk}.$$

Granica ta będzie równa 1 tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,$$

tzn. gdy ze wzrostem n maleje do zera prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną X_n wartości k, gdzie $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Ujmując rzecz mniej precyzyjnie, ale może bardziej intuicyjnie, powiemy, że spodziewamy się, iż ze wzrostem indeksu zmiennej będzie ona przyjmowała większe wartości.

Jak już mówiliśmy, metody sumowalności polegają na wskazaniu reguły, zgodnie z którą możemy przekształcić ciąg (s_k) na ciąg $(t_n) = A(s_n)$, gdzie transformacja dana jest wzorem (*) i rozważamy granicę ciągu (t_n). Jak interpretować ten związek probabilistycznie?

Powszechnie wiadomo (z doświadczenia życiowego i nauczania szkolnego), że dla scharakteryzowania wielu procesów istotne jest podanie tzw. **średniej wartości** badanej cechy. W rachunku prawdopodobieństwa wartość średnia, nazywana **wartością oczekiwaną** i oznaczana przez $E(X)$, jest określana jako suma iloczynów wartości zmiennej losowej X przez odpowiadające jej prawdopodobieństwo, tzn.

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k).$$

Zauważmy, że taka sama jest budowa wzoru (*). Przedstawmy sobie bowiem sytuację, w której wyrazy ciągu (s_k) wybieramy losowo, tzn. wskaźnik (indeks) wyrazów tego ciągu jest zmienną X_n o rozkładzie prawdopodobieństwa a_{nk}. Wzór (*) przedstawia wówczas wartość oczekiwaną zmiennej s_{X_n}, czyli

$$t_n = E(s_{X_n}).$$

Następnym etapem rozważań jest badanie granicy t_n, czyli granicy wartości oczekiwanej przy n dążącym do nieskończoności i wyznaczenie jej wartości, jeśli ona istnieje.

Przedstawione tutaj idee włączenia problemów teorii sumowalności do rozważań **stochastycznych** (jeszcze inny termin określający teorię prawdopodobieństwa i nauki pokrewne) pochodzą od słynnego matematyka węgierskiego Alfréda Rényiego (1921–1970). On też podał przykłady ciekawych powiązań niektórych ważnych metod sumowalności z podstawowymi rozkładami prawdopodobieństwa np. metody Hausdorffa z rozkładem dwumianowym (Bernoulliego). Widzimy więc, że obserwowany ostatnio ogólny trend przenikania się różnych dziedzin nauki nie omija również różnych gałęzi matematyki.