

Graf stochastyczny jako środek matematyzacji i rozumowania

Adam PŁOCKI, Kraków

1. Wprowadzenie.

Szkolny rachunek prawdopodobieństwa został zawężony do skończonych modeli probabilistycznych m.in. z powodu braku w matematyce elementarnej właściwych narzędzi konstrukcji i badań modeli nieskończonych.

Modelem probabilistycznym doświadczenia losowego o przeliczalnym (tj. równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych) zbiorze Ω możliwych wyników (zwanym przestrzenią zdarzeń elementarnych) jest w istocie para (Ω, p) , gdzie p jest funkcją ze zbioru Ω w zbiór liczb rzeczywistych spełniającą układ warunków

$$(1) \quad p(\omega) \geq 0 \text{ dla każdego } \omega \in \Omega,$$

$$(2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Funkcję p nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω . Parę (Ω, p) nazywamy dyskretnym albo siarniatym modelem probabilistycznym nieskończonym. Rodzina S wszystkich podzbiorów zbioru Ω jest σ -ciałem, a funkcja P określona na S wzorem

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest co najmniej} \\ & \text{dwuelementowym podzbiorem } \Omega, \end{cases}$$

jest prawdopodobieństwem na S .

Aby określić trójkę (Ω, S, P) w przypadku zbioru Ω co najwyżej przeliczalnego potrzeba i wystarcza określić parę (Ω, p) .

Przebieg wieloetapowych doświadczeń losowych daje się symulować błędzeniem losowym po grafie stochastycznym. Wprowadzenie grafu stochastycznego do matematycznej obróbki wielu schematów losowych (tj. doświadczeń losowych wieloetapowych) wnosi – jak wykażemy – specyficzne formy aktywności matematycznej do nauczania oraz pozwala budować i badać nieskończone modele probabilistyczne dyskretnie środkami dostępnymi dla ucznia. Konstrukcja grafu, różne formy jego upraszczania oparte na analogiach i symetriach, odkrywanie izomorfizmu dwóch wizualnie różnych grafów stochastycznych, wykorzystywanie tych izomorfizmów we wnioskowaniach probabilistycznych (i matematycznych w ogólności) są specyficznymi formami matematycznej aktywności. Sama konstrukcja grafu jest pewną formą matematyzacji sytuacji i towarzyszących jej stosunków jakościowych i ilościowych.

Graf stochastyczny jest parą (W, Q) , gdzie W jest skończonym zbiorem, którego elementy nazywamy węzłami albo wierzchołkami grafu i przedstawiamy jako punkty płaszczyzny, a Q – taką funkcją ze zbioru $W \times W$ w zbiór liczb rzeczywistych, że

$$(g1) \quad Q(j, k) \geq 0 \text{ dla każdego } j, k \in W,$$

$$(g2) \quad \sum_{k \in W} Q(j, k) = 1 \text{ dla każdego } j \in W.$$

Liczbę $Q(j, k)$ oznaczamy przez p_{jk} i nazywamy **prawdopodobieństwem przejścia w jednym kroku z węzła j do węzła k** . Jedną z form prezentacji funkcji Q jest macierz $[p_{jk}]$. Jest to macierz o wyrazach nieujemnych. Suma wyrazów każdego jej wiersza wynosi 1.

Macierz $Q = [p_{jk}]$ jest więc macierzą stochastyczną.

Przez **krawędź grafu** rozumiemy każdą uporządkowaną parę $j \rightarrow k$, dla której $p_{jk} > 0$. Krawędź $j \rightarrow k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek (prostej lub krzywej) o początku w punkcie j oraz końcu w punkcie k . Krawędź $j \rightarrow j$ nazywamy **petlą**.

Jeżeli $p_{jj} = 1$, to węzeł j nazywamy **meta** albo **węzłem brzegowym**. Zbiór wszystkich węzłów brzegowych nazywamy **brzegiem grafu** i oznaczamy przez B .

Niektóre kolumny macierzy Q mogą być zerowe. Dalsze rozważania ograniczymy do przypadków, gdy w macierzy Q istnieje co najwyżej jedna kolumna złożona z samych zer. Gdy $p_{jk} = 0$ dla każdego $j \in W$, to węzeł k nazwiemy **startowym**. Graf stochastyczny (W, Q) można wówczas traktować jako trójkę (\bar{w}_0, W^0, Q^0) , gdzie \bar{w}_0 jest wektorem powstałym z k -tego wiersza macierzy Q przez usunięcie wyrazu p_{kk} , macierz Q^0 jest macierzą powstałą z Q przez usunięcie k -tego wiersza i k -tej kolumny, zaś $W^0 = W \setminus \{k\}$. Współrzędna j -ta wektora \bar{w}_0 jest prawdopodobieństwem wyjścia z węzła startowego k do węzła j ($j \in W^0$). Wektor \bar{w}_0 jest wektorem stochastycznym (współrzędne nieujemne, a ich suma równa 1) i przedstawia model probabilistyczny tzw. etapu wstępnego.

Mówimy, że dwa grafy stochastyczne (W_1, Q_1) i (W_2, Q_2) są **izomorficzne** albo **stochastycznie równoważne**, jeśli istnieje taka bijekcja h ze zbioru W_1 na zbiór W_2 , że dla każdego $j_2, k_2 \in W_2$ z tego, że $j_2 = h(j_1)$ i $k_2 = h(k_1)$ wynika, że $Q_2(j_2, k_2) = Q_1(j_1, k_1)$. Izomorfizm grafów jest – jak wykażemy – wygodnym środkiem uzasadnienia pewnych analogii.

Macierzą przejść grafu stochastycznego (W, Q) nazywamy macierz $R = [r_{jk}]$, gdzie

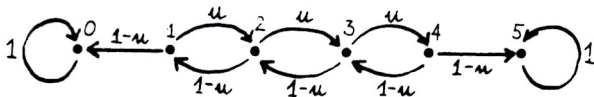
$$r_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_{jk} > 0, \\ 0, & \text{gdy } p_{jk} = 0. \end{cases}$$

2. Graf stochastyczny jako środek matematyzacji. Graf jako plansza do gry losowej.

W grze uczestniczy dwóch graczy: G_0 i G_1 . Każdy startuje z pewną liczbą złotych jako kapitałem wstępnym. Załóżmy, że G_1 ma na początku k złotych, a G_0 ma ich $m - k$ ($0 < k < m$). W kolejnych jednostkach czasu (choć to jedynie umowa) przeprowadzana jest ta sama próba Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym u ($0 < u < 1$). Ilekoć próba zakończy się sukcesem, gracz G_0 przekazuje złotówkę graczowi G_1 , gdy zakończy się porażką – gracz G_0 dostaje złotówkę od gracza G_1 . Próba powtarzana jest tak długo, aż jeden z graczy straci wszystkie złotówki (mówimy wtedy o ruinie tego gracza).

Próbą Bernoulliego nazywamy doświadczenie losowe o modelu probabilistycznym (Ω, p) , gdzie $\Omega = \{0, 1\}$, $p(1) = u > 0$ i $p(0) = 1 - u > 0$. Wynik (zdarzenie elementarne) 1 nazywamy **sukcesem**, wynik (zdarzenie elementarne) 0 nazywamy **porażką**. Próbą Bernoulliego jest więc rzut monetą, a także losowanie kuli z urny o dwóch kolorach kul.

Stan gry po kolejnej próbie jednoznacznie opisuje liczba złotych posiadanych przez gracza G_1 (jako stan jego kapitału). Postawmy na początku pionek w punkcie k na osi liczbowej. Jeżeli próba zakończy się sukcesem, pionek ów przesuwamy o jednostkę w prawo, gdy porażką – o jednostkę w lewo. Próbę i przesuwanie pionka powtarzamy tak długo, aż pionek trafi do punktu m (ruina gracza G_0) albo do punktu 0 (ruina gracza G_1). Punkty 0 i m na osi są jakby metami. Łatwo zaakceptować umowę, że ilekroć pionek trafi do którejś z tych met, to z prawdopodobieństwem 1 już w niej pozostaje w każdej następnej jednostce czasu. W przypadku $k = 3$ i $m = 5$ odpowiedni graf, jako planszę do owej gry, przedstawia rysunek 1. Wzdłuż każdej krawędzi (jako możliwego przejścia w jednym kroku) wpisano odpowiednie prawdopodobieństwo.



Rys. 1

Rysunek 1 przedstawia graf stochastyczny (W, Q) , gdzie $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-u & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-u & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-u & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

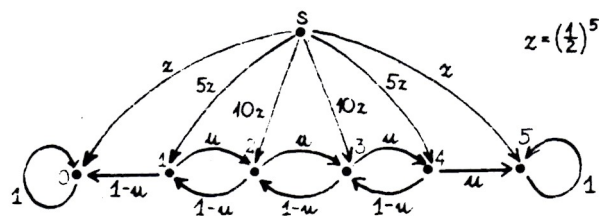
Załóżmy, że właściwa gra jest poprzedzana jakby etapem wstępnym, na którym rozstrzyga się, ile spośród m monet będzie miał na początku każdy z graczy. Wszystkie monety zostają rzucone. Te, które upadły do góry reszka, stanowią wstępny kapitał gracza G_1 , pozostałe – wstępny kapitał gracza G_0 . Wstępny kapitał gracza G_1 (przed rzutem monetami) jest zmienną losową $X : b(m, 1/2)$.

Zapis $X : b(m, u)$ oznacza, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy (zwany także rozkładem Bernoulliego albo binomialnym) o parametrach m i u , tzn. rozkład określony wzorem

$$p_X(k) = \binom{m}{k} u^k (1-u)^{m-k} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots, m,$$

gdzie m jest ustaloną liczbą naturalną większą od 1, u zaś ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$.

Planszą do tej nowej gry jest w przypadku $m = 5$ graf z rysunku 2.



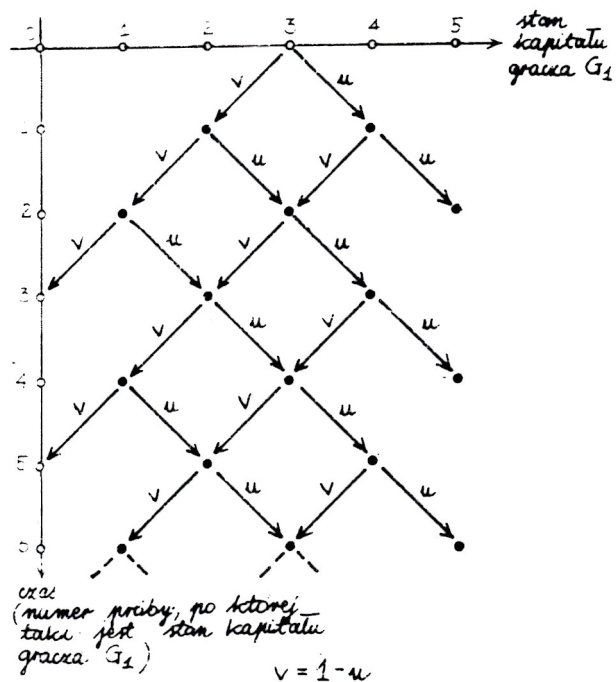
Rys. 2

Jest to graf stochastyczny (W_1, Q_1) , gdzie $W_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, s\}$, a Q_1 jest macierzą powstałą z macierzy Q (o której była mowa uprzednio) przez dołączenie siódmej kolumny zerowej i siódmej wiersza postaci: $[u^5, 5u^5, 10u^5, 10u^5, 5u^5, u^5, 0]$, gdzie $u = 1/2$. Graf stochastyczny (W_1, Q_1) można uznać za trójkę (\bar{w}_0, W, Q) ,

gdzie: $\bar{w}_0 = [u^5, 5u^5, 10u^5, 10u^5, 5u^5, u^5]$ i $u = 1/2$, zaś (W, Q) jest grafem stochastycznym odpowiadającym poprzedniej wersji gry.

3. Graf stochastyczny rozwinięty w czasie. Dwuwymiarowy graf stochastyczny.

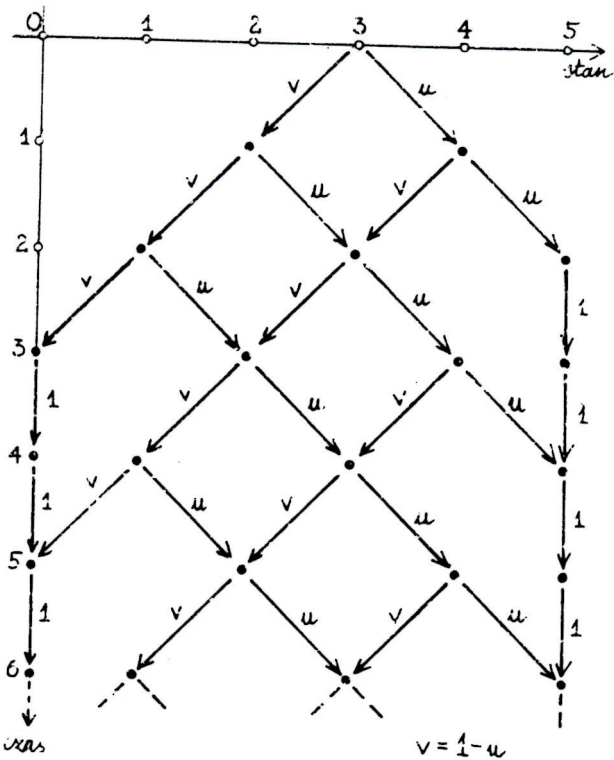
Powróćmy do poprzedniej wersji gry. Oznaczmy przez X_n stan kapitału (tj. liczbę posiadanych złotych) na końcu n -tej jednostki czasu. Nazywamy koniec n -tej jednostki czasu chwilą n . Graf z rysunku 1 nie pozwala rozstrzygnąć, jakie wartości przyjmuje zmienna losowa X_n dla $n > 2$ i z jakim prawdopodobieństwem. Jest tak dlatego, że uwzględniamy jedynie zmiany stanu kapitału, a nie bierzemy pod uwagę czasu, w którym te zmiany następują. Problem rozkładu zmiennej losowej X_n inspirował potrzebę wprowadzenia do analizy gry czasu jako istotnego parametru. Obok osi, na której zaznaczane były stany, rozważmy prostopadłą do niej oś, na której odmierzamy czas. Oś rzędnych, jako oś czasu, skierujmy w dół. Ilekroć próba zakończy się sukcesem, pionek przesuwamy o wektor $\bar{a} = [1, 1]$, gdy próba zakończy się porażką, pionek przesuwamy o wektor $\bar{b} = [-1, 1]$. Każdy węzeł grafu jest teraz punktem w układzie współrzędnych. Odcięta oznacza liczbę monet (stan kapitału) gracza G_1 , rzędna zaś – czas (numer próby), po którym ten stan został osiągnięty. Graf, o którym teraz mowa, nazywamy **dwuwymiarowym grafem stochastycznym**. Dla $k = 3$ i $m = 5$ taki graf przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3

Pionek błądzi tak długo, aż dotrze do prostej $x = m$ (zwycięża gracz G_1), albo do prostej $x = 0$ (gracz G_1 zostaje zrujnowany). Odpowiednikiem pętli w węźle $m = 5$ na grafie z rysunku 1 jest teraz pionowa krawędź łącząca węzeł $(n-1, m)$ z węzłem (n, m) z przypisanym jej prawdopodobieństwem 1. Odpowiada to założeniu, że ilekroć gracz G_1 posiadał w danej chwili wszystkie złotówki, to posiada je także w każdej chwili następnej. Podobnie jest w przypadku węzłów-met leżących na prostej $x = 0$.

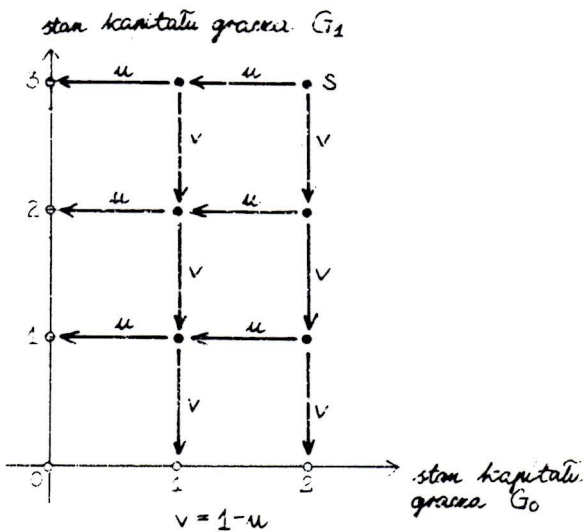
Taki uzupełniony graf przedstawia rysunek 4.



Rys. 4

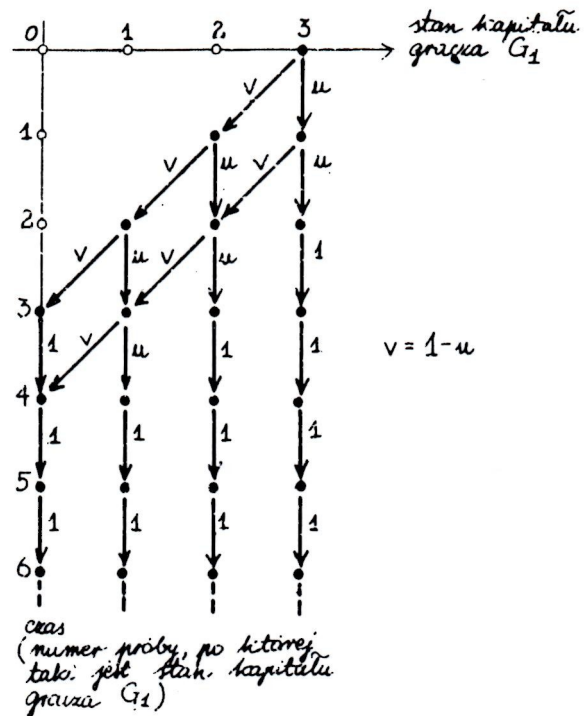
Istotną cechą wyróżniającą dwuwymiarowy graf stochastyczny spośród innych grafów stochastycznych – czasem także rozważanych w układzie współrzędnych – jest sens obu współrzędnych każdego węzła (odcięta jest pewnym stanem, rzędna – czasem, w którym ten stan osiągnięto).

Zmieńmy regulamin omawianej gry losowej. Zamiast przekazywać przegraną złotówkę przeciwnikowi gracz kładzie ją do puli. Próba powtarzana jest dopóty, dopóki jeden z graczy nie straci wszystkich złotych. Stan gry po kolejnej próbie określa para (x, y) , gdzie x jest kapitałem gracza G_0 , zaś y kapitałem gracza G_1 . Planszą do takiej gry (przy $k = 3$ i $m = 5$) jest graf z rysunku 5, który nie jest dwuwymiarowym grafem stochastycznym.



Rys. 5

Rejestrujemy przebieg gry parą (x, t) , gdzie x jest stanem kapitału gracza G_1 , a t – czasem, po którym gracz G_1 osiągnął ten stan. W tej interpretacji przebiegu gry planszą jest dwuwymiarowy graf stochastyczny z rysunku 6.

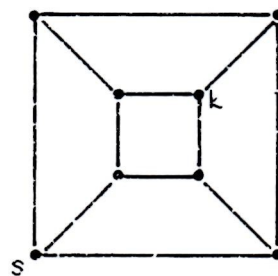


Rys. 6

4. Konstrukcja grafu stochastycznego jako specyficzna działalność matematyczna.

Konstrukcja grafu stochastycznego jako matematycznego schematu danej sytuacji i towarzyszących jej stosunków jakościowych i ilościowych może inicjować rozmaite formy matematycznej aktywności (zob. [4]). Tę rolę grafu stochastycznego w matematycznej aktywizacji ucznia zilustrujemy na przykładach kilku gier losowych.

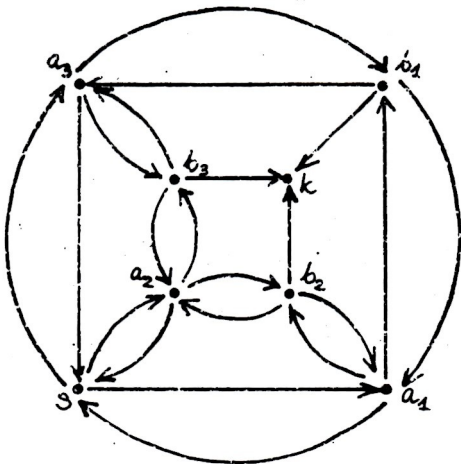
1^o Planszą do gry jest płaski obraz sześciangu (zob. rys. 7).



Rys. 7

Gracz, opłaciwszy wstęp m złotych losuje dla swego pionka (startującego z wierzchołka s) trasę błądzenia. Każde wyjście jest jednakowo prawdopodobne. Błądzenie trwa aż do momentu, gdy pionek trafi do przeciwległego wierzchołka k , a gracz zdobywa tyle złotych, ile kroków wykonał pionek. Wygrana gracza jest czasem błądzenia, a więc zmienną losową T . Pytanie, przy jakim m gra jest sprawiedliwa, dotyczy wyznaczenia $E(T)$.

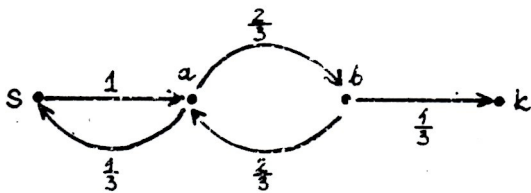
W istocie chodzi tu o błądzenie losowe po grafie stochastycznym z rysunku 8 (każdej krawędzi odpowiada prawdopodobieństwo $1/3$).



każdej krawędzi odpowiada prawdopodobieństwo $1/3$

Rys. 8

Z uwagi na analogiczną rolę węzłów oznaczonych literą a (także węzłów oznaczonych literą b) na drodze między startem s a metą k każdy z nich reprezentuje ten sam stan. Graf stochastyczny uwzględniający te analogie przedstawia rysunek 9.



Rys. 9

2^o „Crepes” to popularna w Ameryce gra, w której gracz rzuca dwiema kostkami i obserwuje sumę z wyrzuconych łącznie oczek. Gdy $z = 7$ lub $z = 11$, gracz od razu wygrywa. Gdy $z = 2$ lub $z = 3$ lub $z = 12$ - wtedy od razu przegrywa. Każda inna suma daje mu prawo do powtarzania rzutu dwiema kostkami tak długo, aż wypadnie ponownie ta sama suma - i wtedy wygrywa - albo aż wypadnie suma 7 i wtedy przegrywa. Można pytać o sprawiedliwość tej gry, a także o średnią liczbę rzutów wykonanych w grze (średni czas trwania gry). Jak wykazaliśmy, wygodnym narzędziem rozwiązywania obu tych problemów może być graf stochastyczny.

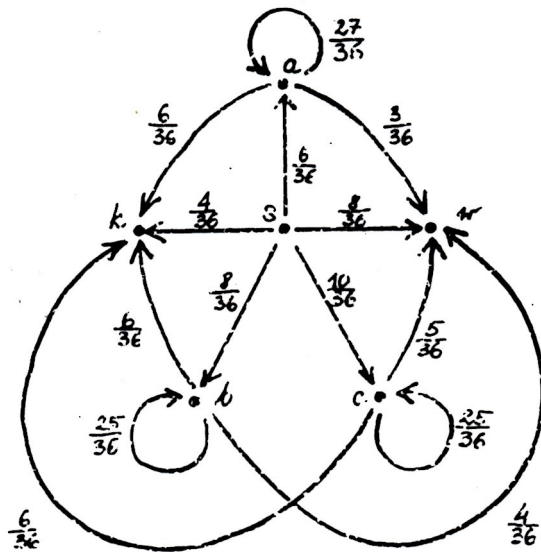
Łatwo wykazać, że

$$P(\text{gracz wygrywa po 1 rzucie}) = p_{sw} = 8/36,$$

$$P(\text{gracz przegrywa po 1 rzucie}) = p_{sk} = 4/36,$$

gdzie literą s oznaczono start (węzeł startowy), literą w zwycięstwo, zaś literą k porażkę, jako pewne stany tej gry. Jeśli po 1 rzucie gra się nie kończy, to z pewnych symetrii wynika, że sytuacja gracza przy $z = 4$ jest analogiczna jak przy $z = 10$. Obie sumy $z = 4$ i $z = 10$ reprezentują ten sam stan gry. Oznaczmy go literą a. Analogicznie sumy $z = 5$ i $z = 9$ reprezentują ten sam stan b, a sumy $z = 6$ i $z = 8$ ten sam stan c. Konstrukcja grafu obejmuje wyznaczanie liczb p_{jk} dla $j, k \in \{s, a, b, c, w\}$.

Obliczanie prawdopodobieństw pewnych zdarzeń ma tu więc pewne motywacje. Ostateczny graf stochastyczny - jako planszę do gry „creps” - przedstawia rysunek 10.



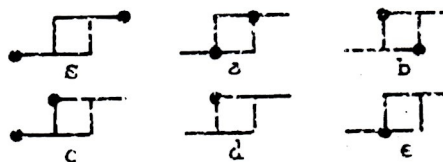
Rys. 10

3^o Rozważmy równoczesne błądzenie dwóch pionków po figurze z rysunku 11a.

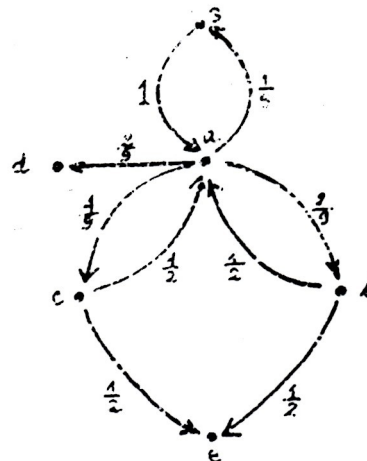


Rys. 11

Każde wyjście z danego wierzchołka jest jednakowo prawdopodobne. Błądzenie trwa tak długo, aż pionki spotkają się w tym samym wierzchołku. Możliwe stany przedstawia rysunek 12, ostateczną zaś postać grafu stochastycznego - rysunek 13.



Rys. 12



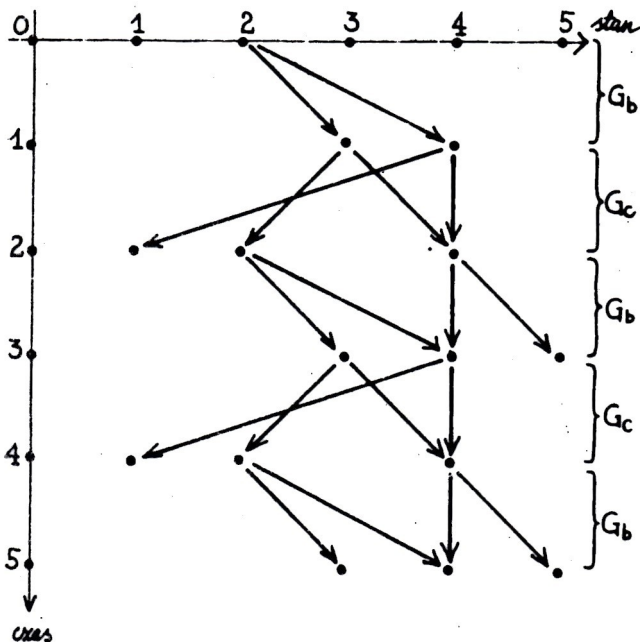
Rys. 13

Wyróżnianie możliwych stanów wraz z redukcją ich ilości do minimum (przez wykorzystanie pewnych analogii), rachowanie prawdopodobieństw przejść – to specyficzne dla tej problematyki formy matematycznej aktywności (por. błądzenie po figurze z rysunku 11b).

4^o Konstrukcja grafu o minimalnej ilości węzłów, jako pewien proces matematyzacji, może rozpoczynać się od grafu rozwiniętego w czasie. Ilustruje to przykład gry „białe lub czarne”. Każdy z dwóch graczy G_b i G_c ma monetę i pewną liczbę żetonów. G_b ma białe żetony, G_c – czarne. Plansza składa się z dwóch pól. Każde odpowiada innemu wynikowi rzutu monetą. Gracze rzucają na przemian monetą i kładą swój żeton (jeden na drugim) na polu odpowiadającym wynikowi rzutu. Jeśli oba powstałe stosy żetonów mają na górze żetony tego samego koloru, gra się kończy. Jeśli na górze w obu stosach są żetony białe, zwycięża gracz G_b , jeśli czarne – zwycięża gracz G_c . Któryś z graczy ma prawo pierwszeństwa. Pytanie, czy jest ono dlań przywilejem (czy gra jest sprawiedliwa?) może inspirować konstrukcję grafu. Wydaje się, że możliwe stany to

- 1(cc) – dwa stosy żetonów, oba czarne na górze (koniec gry, zwycięża gracz G_c),
- 2(c) – jeden stos z czarnym żetonem na górze,
- 3(b) – jeden stos z białym żetonem na górze,
- 4(bc) – dwa stosy z żetonami różnych kolorów na górze,
- 5(bb) – dwa stosy, oba żetony na górze białe (koniec gry, zwycięża gracz G_b).

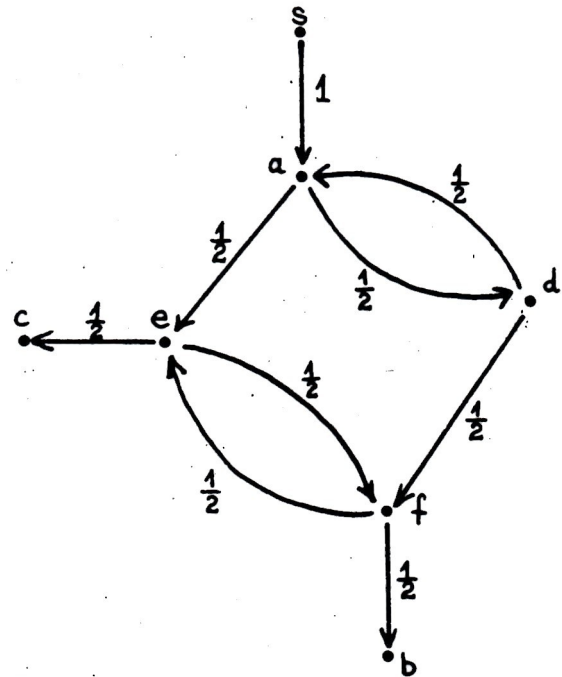
Rysunek 14 opisuje, jak może toczyć się gra, gdy rozpoczyna ją gracz G_c .



każdej krawędzi odpowiada prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$

Rys. 14

Ten dwuwymiarowy graf stochastyczny ukazuje potrzebę wyróżnienia nowych stanów. W przypadku wyżej wyróżnionego stanu – 4 – istotne jest, który z graczy do tego stanu grę doprowadził. Graf stochastyczny uwzględniający te nowe stany przedstawia rysunek 15.



Rys. 15

Węzły prezentują następujące stany:

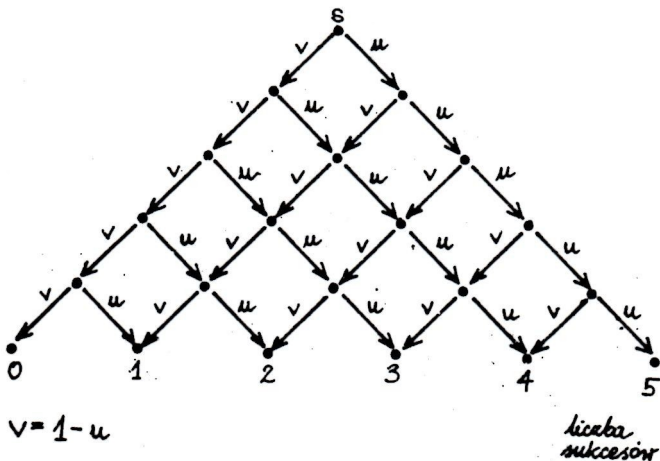
- a – jeden stos, czarny u góry,
- b – dwa stosy, oba białe u góry,
- c – dwa stosy, oba czarne u góry,
- d – jeden stos, biały u góry,
- e – dwa stosy, biały i czarny, po rzucie gracza G_b ,
- f – dwa stosy, biały i czarny, po rzucie gracza G_c .

Można wykazać (środki argumentacji zaproponujemy dalej), że gra nie jest sprawiedliwa, że prawo pierwszeństwa jest w tej grze przywilejem (gracz, który rozpoczyna, zwycięża z prawdopodobieństwem $5/9$, a więc szanse graczy nie są równe). Nasuwa się pytanie, jak zmienić regulamin gry, aby niezależnie od tego, kto pierwszy rzuca monetą i stawia żeton, gra była sprawiedliwa. Graf stochastyczny może być środkiem argumentacji, że gra jest sprawiedliwa, gdy rozpoczyna się ona od etapu wstępnego, na którym w drodze sprawiedliwego losowania (losowania dającego każdemu równe szanse) rostrzygać się będzie, kto pierwszy rzuca monetą i stawia żeton.

5. Grafy stochastyczne niektórych schematów losowych.

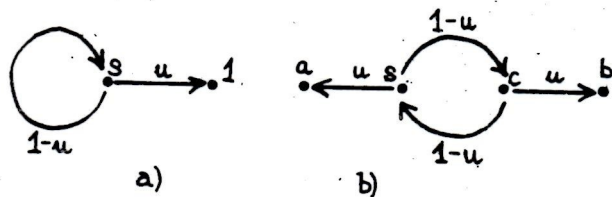
Naturalnym modelem błądzenia losowego po grafie stochastycznym jest spadanie kulki po desce Galtona o m poziomach (zob. [7]). Grafem jest w tym przypadku schemat kanalikowego labiryntu na desce. Każdej z dwu krawędzi o wspólnym początku odpowiada prawdopodobieństwo $1/2$.

Rysunek 16 przedstawia graf stochastyczny do symulowania przebiegu schematu Bernoulliego o $m = 5$ próbach i o prawdopodobieństwie sukcesu w jednej próbie równym u ($0 < u < 1$).



Rys. 16

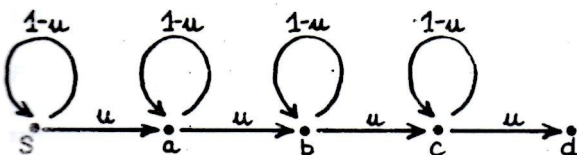
Powtarzanie tej samej próby Bernoulliego tak długo, aż zakończy się sukcesem, nazywamy **oczekiwaniem na pierwszy sukces**. Graf stochastyczny tego schematu losowego (tzn. graf służący do symulowania jego przebiegu błędzeniem losowym po grafie) przedstawia rysunek 17a.



Rys. 17

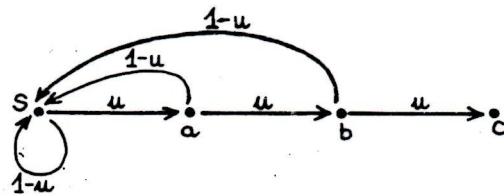
Rozważmy grę z udziałem dwóch graczy G_A i G_B . Gracze na przemian powtarzają tę samą próbę Bernoulliego (o prawdopodobieństwie sukcesu równym u), a zwycięża ten, kto pierwszy uzyskał sukces. W grze przeprowadzane jest więc oczekiwanie na pierwszy sukces. Załóżmy, że rozpoczyna gracz G_A . W tym kontekście wygodniejszy w użyciu jest graf stochastyczny (dla oczekiwania na pierwszy sukces) z rysunku 17b.

Powtarzanie tej samej próby Bernoulliego aż do k -krotnego uzyskania sukcesu nazywamy **schematem Pascala**. Dla $k = 4$ graf stochastyczny tego schematu losowego przedstawia rysunek 18.



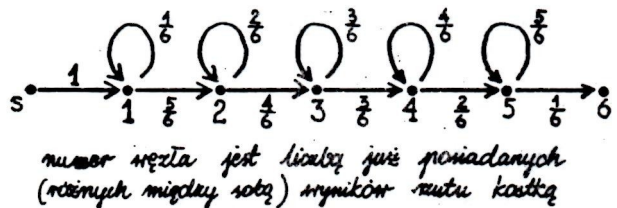
Rys. 18

Rysunek 19 przedstawia graf stochastyczny schematu losowego polegającego na powtarzaniu próby Bernoulliego tak długo, aż sukces pojawi się dokładnie $k = 3$ razy pod rząd.



Rys. 19

Założmy, że model probabilistyczny doświadczenia losowego jest skończony. Powtarzanie tego doświadczenia tak długo, aż uzyskamy każdy z możliwych wyników co najmniej raz, nazywamy **schematem kolekcjonera**. Przykładem takiego schematu losowego jest powtarzanie rzutu kostką tak długo, aż każda z liczb oczek wypadnie co najmniej raz. Graf stochastyczny tego schematu losowego przedstawia rysunek 20.



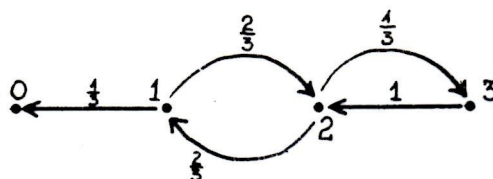
Rys. 20

Z wyjątkiem schematu Bernoulliego wszystkie wyżej opisane schematy losowe są doświadczeniami o losowej liczbie etapów. Czas ich trwania (wymierzany liczbą etapów) jest zmienną losową. Jak wykazemy dalej graf stochastyczny pozwala znajdować jej wartość oczekiwaną bez znajomości rozkładu tego czasu (a więc z pominięciem definicji wartości oczekiwanej).

6. Graf stochastyczny jako środek wykrywania analogii.

Dane są dwa pudełka U i V . W pudełku V są trzy ponumerowane kule, drugie z pudełek jest puste. Dana jest także urna z trzema ponumerowanymi kulami. W kolejnych jednostkach czasu (co jest jedynie umową) losowana jest ze zwracaniem kula z urny, a następnie przekładana z pudełka do pudełka kula o tym numerze, jaki ma wylosowana kula z urny. Losowanie kuli z urny i przekładanie kuli z pudełka do pudełka powtarzane jest tak długo, aż pudełko V będzie puste.

Liczbę kul w pudełku V po kolejnym losowaniu kuli z urny możemy traktować jako stan tego pudełka w kolejnej chwili. Przebieg tego schematu losowego daje się symulować błędzeniem po grafie stochastycznym z rysunku 21.



Rys. 21

Zauważmy, że ten graf i graf z rysunku 9 są izomorficzne. Gdyby rozważyć czas błądzenia po sześciannie (trwającego aż do momentu osiągnięcia przeciwległego wierzchołka) i czas trwania wyżej opisanego schematu losowego, to oba czasy są zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach. Środkiem uzasadniania tego faktu stał się graf stochastyczny.

7. Graf stochastyczny jako forma opisu i badania jednorodnych łańcuchów Markowa.

Rozważmy wieloetapowe doświadczenie losowe, którego każdy etap jest doświadczeniem o tym samym m -elementowym zbiorze wyników. Numerując te wyniki za przestrzeni wyników (przestrzeń zdarzeń elementarnych) każdego etapu możemy uważać zbiór $W = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Załóżmy, że kolejne etapy przeprowadzane są w kolejnych jednostkach czasu. Koniec n -tej jednostki czasu nazywamy chwilą n .

Najpierw, w zerowej jednostce czasu, przeprowadzane jest doświadczenie o modelu probabilistycznym (W, p^0) . Niech $p^0(j) = p_j^0$ dla $j \in W$. Jest więc $p_j^0 \geq 0$ dla każdego

$j \in W$ i $\sum_{j=1}^m p_j^0 = 1$. Model probabilistyczny tego etapu

wstępnego jest określony przez wektor stochastyczny $\bar{w}_0 = [p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0]$. Kolejne etapy przeprowadzane są według następującej zasady: jeśli etap $(n-1)$ -szy zakończy się wynikiem j , to etapem n -tym jest doświadczenie o modelu probabilistycznym (W, p^j) . Niech $p^j(k) = p_{jk}$ dla $j, k \in W$. Liczba p_{jk} jest więc prawdopodobieństwem, z jakim dany etap zakończy się wynikiem k , skoro etap poprzedni zakończył się wynikiem j ($j, k \in W$). Opisany w ten sposób schemat losowy nazywamy **jednorodnym łańcuchem Markowa o m stanach**. Istotą tego schematu losowego jest to, że model probabilistyczny każdego etapu (z wyjątkiem etapu wstępnego) zależy tylko od wyniku etapu poprzedniego. Jeśli etap n -ty zakończył się wynikiem k , to mówimy, że w chwili n pewien układ σ znalazł się w stanie k (wyniki każdego etapu interpretowane są jako pewne stany).

Niech $[p_{jk}] = Q$. Jest to macierz stochastyczna. Nazywamy ją **macierzą prawdopodobieństw przejść**. Model probabilistyczny jednorodnego łańcucha Markowa jest określony trójką (\bar{w}_0, W, Q) . Ta trójka określa graf stochastyczny. Ów graf możemy zatem uważać za formę (ikoniczną) prezentacji jednorodnego łańcucha Markowa. Wspomniany graf może służyć do symulacji przebiegu łańcucha Markowa błądzeniem losowym po grafie. W tej interpretacji przebiegu łańcucha Markowa można łatwo wyrażać rozmaite treści probabilistyczne związane z tym procesem stochastycznym.

W [6] opisano konstrukcję modelu probabilistycznego dla jednorodnego łańcucha Markowa o ograniczonym czasie jego trwania opartą na powyższej formie symulacji. Mowa tam o błądzeniu po grafie stochastycznym dwuwymiarowym, powstałym przez rozwinięcie w czasie grafu (\bar{w}_0, W, Q) .

Niech X_n będzie wynikiem n -tego etapu (a więc stanem, w jakim znajdzie się układ σ w chwili n). X_n jest zmienną losową, której rozkład określony jest wektorem $\bar{w}_n = [p_1^n, p_2^n, \dots, p_m^n]$, gdzie $p_j^n = P(X_n = j)$ dla $j \in W$

i $n = 0, 1, 2, \dots$ W [6] pokazano, jak za pomocą dwuwymiarowego grafu stochastycznego dowodzić, że

$$\bar{w}_n = \bar{w}_{n-1} Q \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dwuwymiarowy graf stochastyczny został tam ukazany jako pewne narzędzie dedukcji. Pokazano tam także, jak opierając się na grafie stochastycznym łatwo uzasadnić, że pewien schemat losowy nie jest łańcuchem Markowa.

Każdy węzeł grafu (\bar{w}_0, W, Q) reprezentuje inny stan. Stan reprezentowany przez węzeł brzegowy j (tj. węzeł, dla którego $p_{jj} = 1$) nazywa się w teorii procesów stochastycznych stanem pochłaniającym.

Rozważmy łańcuch Markowa o co najmniej jednym stanie pochłaniającym. Przestrzenią wyników (przestrzenią zdarzeń elementarnych) tego schematu losowego jest zbiór Ω tras na wspomnianym wyżej grafie stochastycznym. Trasą jest każdy taki ciąg krawędzi, że początkiem krawędzi pierwszej jest węzeł startowy s , końcem ostatniej węzeł brzegowy, przy czym koniec krawędzi poprzedniej jest zarazem początkiem krawędzi następnej.

Dalej będziemy także rozważać na grafie trasy prowadzące z węzła j (niekoniecznie startowego) do węzła k (niekoniecznie brzegowego) jako ciągi krawędzi o tej własności, że koniec każdej krawędzi poprzedniej w tym ciągu jest zarazem początkiem krawędzi następnej, przy czym początkiem pierwszej krawędzi jest węzeł j , końcem zaś ostatniej węzeł k .

Określmy na zbiorze tras funkcję p , która każdej trasie przypisuje iloczyn prawdopodobieństw odpowiadających kolejnym krawędziom tej trasy. Nietrudno wykazać, że funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω , a zatem para (Ω, p) jest modelem probabilistycznym tego łańcucha Markowa. Graf stochastyczny stał się w tym przypadku wygodnym narzędziem określania modelu probabilistycznego dla jednorodnego łańcucha Markowa o niepustym zbiorze stanów pochłaniających.

Powróćmy do dowolnego łańcucha Markowa określonego trójką (\bar{w}_0, W, Q) . Przez $p_{jk}(n)$ oznaczymy prawdopodobieństwo przejścia układu σ ze stanu j w danej chwili t do stanu k w chwili $t+n$. W kontekście grafu stochastycznego $p_{jk}(n)$ jest prawdopodobieństwem przejścia (błądzącej po grafie cząstki) z węzła j do węzła k w dokładnie n krokach.

Dla $n = 1$ jest $p_{jk}(1) = p_{jk}$, a więc $[p_{jk}(1)] = Q^1$. Weźmy $n = 2$. Dla węzła j i węzła k rozważmy zbiór $W_{jk}(2)$ tych węzłów grafu, do których można przejść w jednym kroku z węzła j i z których w jednym kroku można przejść do węzła k . Węzeł l należy do $W_{jk}(2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{jl} > 0$ i $p_{lk} > 0$. Jeśli $l \in W_{jk}(2)$, to przejściu z j do k przez węzeł l odpowiada prawdopodobieństwo równe $p_{jl}p_{lk}$. Prawdopodobieństwo przejścia z j do k w dokładnie dwu krokach, a więc $p_{jk}(2)$ jest sumą

$$\sum_{l \in W_{jk}(2)} p_{jl}p_{lk}.$$

Jeśli którykolwiek z węzłów l należących do W nie należy do $W_{jk}(2)$, to jest dlań $p_{jl}p_{lk} = 0$. Ostatnią sumę można zatem rozciągnąć (rozszerzyć) na wszystkie węzły ze zbioru W , a zatem

$$p_{jk}(2) = \sum_{l=1}^m p_{jl}p_{lk} \quad \text{dla} \quad j, k \in W.$$

co oznacza, że

$$[p_{jk}(2)] = Q^2.$$

Te odkrycia sugerują, że dla każdego naturalnego n jest

$$[p_{jk}(n)] = Q^n.$$

Udowodnimy to korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Założmy, że $[p_{jk}(n)] = Q^n$.

Wykażemy, że $[p_{jk}(n+1)] = Q^{n+1}$.

Rozważmy wszystkie trasy o długości $n+1$ prowadzące z węzła j do węzła k (mówiąc tu i dalej o trasie prowadzącej z węzła j mamy na uwadze ciąg krawędzi rozpoczynający się w węźle j). „Wagą” (masą) trasy nazywamy przypisany jej iloczyn prawdopodobieństw (odpowiadających kolejnym krawędziom tej trasy). Liczba $p_{jk}(n+1)$ jest sumą „wag” wspomnianych tras.

Niech $W_{jk}(n+1)$ będzie zbiorem tych węzłów, do których z węzła j można przejść w dokładnie n krokach i z których istnieje przejście (krawędź) do węzła k . Uwzględniając założenie (indukcyjne) mamy

$$p_{jk}(n+1) = \sum_{l \in W_{jk}(n+1)} p_{jl}(n)p_{lk}.$$

Jeśli węzeł l nie należy do $W_{jk}(n+1)$, to $p_{jl}(n) = 0$ lub $p_{lk} = 0$, a więc sumę po prawej stronie powyższej równości można rozciągnąć na wszystkie węzły zbioru W . Jest zatem

$$p_{jk}(n+1) = \sum_{l=1}^m p_{jl}(n)p_{lk}.$$

Liczba $p_{jk}(n+1)$ jest więc iloczynem skalarnym j -tego wiersza macierzy Q^n i k -tej kolumny macierzy Q , co oznacza, że:

$$[p_{jk}(n+1)] = Q^{n+1}, \quad \text{c.n.u.}$$

Graf stochastyczny był tu środkiem odkrywania pewnej własności jednorodnego łańcucha Markowa, a zarazem narzędziem organizacji rozumowania (dowodu tej własności). W tym sensie graf stochastyczny jest pewnym środkiem dydaktycznym.

W badaniach nad łańcuchami Markowa pewną rolę odgrywa problem liczby możliwych przejść ze stanu j do stanu k w dokładnie n krokach. W kontekście grafu stochastycznego jest to problem liczby tras o długości n prowadzących z węzła j do węzła k .

Rozważmy macierz R określoną na wstępie, a zwaną **macierzą przejść**. Oznaczmy przez $l_{jk}(n)$ liczbę tras o długości n prowadzących z węzła j do węzła k .

Dla $n=1$ jest $l_{jk}(1) = r_{jk}$, a więc $[l_{jk}(1)] = R = R^1$. Nietrudno sprawdzić – odnosząc rozumowanie do grafu – że $[l_{jk}(2)] = R^2$. Te dwa szczególne przypadki sugerują zatem twierdzenie, że dla każdego naturalnego n jest $[l_{jk}(n)] = R^n$, które łatwo udowodnić metodą indukcji.

8. Graf stochastyczny jako środek racjonalizacji rachunków – redukcje grafu stochastycznego.

Wyjdźmy od gry losowej, dla której planszą jest graf stochastyczny z rysunku 18. Problem prawdopodobieństwa zwycięstwa każdego z graczy w tradycyjnym ujęciu rachunku prawdopodobieństwa rozwiązuje się w geometrycznym modelu probabilistycznym (Ω, p) , gdzie

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\} \quad \text{i} \quad p(\omega_k) = (1-u)^{k-1}u$$

dla $k=1, 2, 3, \dots$

Funkcja p jest ciągiem geometrycznym, stąd jej nazwa **geometryczny rozkład prawdopodobieństwa**, albo krótko: **rozkład geometryczny**. Parę (Ω, p) , w której Ω jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a p geometrycznym rozkładem prawdopodobieństwa na Ω , nazywamy **geometrycznym modelem probabilistycznym**.

W tym modelu rozpatruje się zdarzenia:

A : zwycięży gracz G_A (sukcesem zakończy się po raz pierwszy próba nieparzysta),

B : zwycięży gracz G_B (sukcesem zakończy się po raz pierwszy próba parzysta).

W modelu probabilistycznym (Ω, p) jest

$$A = \{\omega_{2k-1} : k = 1, 2, 3, \dots\}, \quad B = \{\omega_{2k} : k = 1, 2, 3, \dots\},$$

a więc

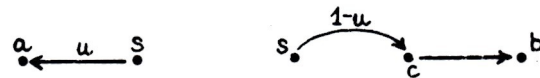
$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-u)^{2k-2}u,$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-u)^{2k-1}u = 1 - P(A).$$

Problem prawdopodobieństwa zdarzeń A i B odnieśmy do grafu stochastycznego z rysunku 18. Wynikowi ω_k oczekiwania na pierwszy sukces (wspomniana para (Ω, p) jest modelem probabilistycznym tego właśnie schematu losowego) odpowiada na grafie trasa o długości k .

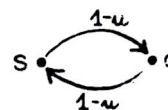
W kontekście grafu stochastycznego zdarzenie A jest zbiorem wszystkich tras prowadzących z węzła startowego do mety a (w trakcie symulacji gry błądzeniem po grafie zdarzenie A zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy błądzący pionek dotrze do mety a). Zdarzenie B jest w tym ujęciu modelem zbiorem tras prowadzących do mety b .

Najkrótsze trasy do każdej z met przedstawia rysunek 22.

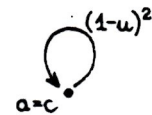


Rys. 22

Każda z pozostałych tras zawiera wielokrotność cyklu z rysunku 23. Ten cykl można zastąpić pętlą (zob. rys. 24).

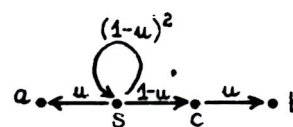


Rys. 23



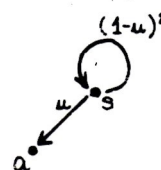
Rys. 24

Rysunek 25 jest protokołem tej „przeróbki” grafu.

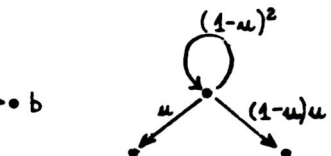


Rys. 25

Rozważmy fragment grafu obejmujący wszystkie trasy prowadzące do mety a (zob. rys. 26).



Rys. 26



Rys. 27

Wagi kolejnych (gdy chodzi o długość) tras tworzą ciąg: $u, (1-u)^2u, (1-u)^4u, \dots$, a więc waga zbioru tych tras prowadzących do mety a jest sumą szeregu geometrycznego i wynosi $\frac{u}{1-(1-u)^2}$. Odcinek grafu z rysunku 26 można więc zastąpić krawędzią z wagą $\frac{u}{1-(1-u)^2}$. Analogicznie postępując ze zbiorem tras prowadzących do mety b dostajemy prosty graf z rysunku 27, z którego wynika, że

$$P(A) = \frac{u}{1-(1-u)^2} \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{u(1-u)}{1-(1-u)^2}.$$

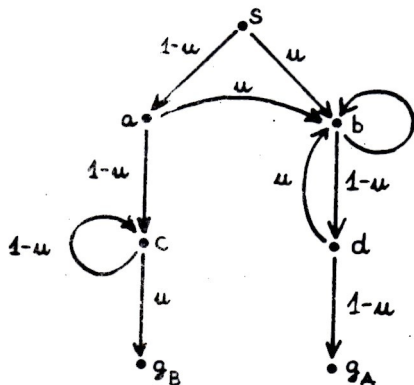
Ostatnie rozważania pozwoliły wyróżnić dwa różne typy redukcji grafu stochastycznego. Te i kilka innych typów zebrano w poniższej tabeli.

taki fragment grafu:	można zastąpić takim:
1*	1*
2*	2*
3*	3*
4*	4*
5*	5*

Wyznaczanie pewnych prawdopodobieństw w nieskończonym (ale przeliczalnym) modelu probabilistycznym poprzez etapową redukcję grafu zilustrujemy na przykładzie kolejnej gry losowej.

Dwóch uczestniczących w niej graczy oznaczmy przez G_A i G_B . Próba Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym u ($0 < u < 1$) powtarzana jest tak długo, aż po sukcesie dwa razy pod rząd pojawi się porażka (...100) i wtedy zwycięża gracz G_A , albo po dwu pod rząd porażkach wystąpi sukces (...001) i wtedy zwycięża gracz G_B . Nazywajmy ją grą „sukces, dwie porażki – dwie porażki, sukces”.

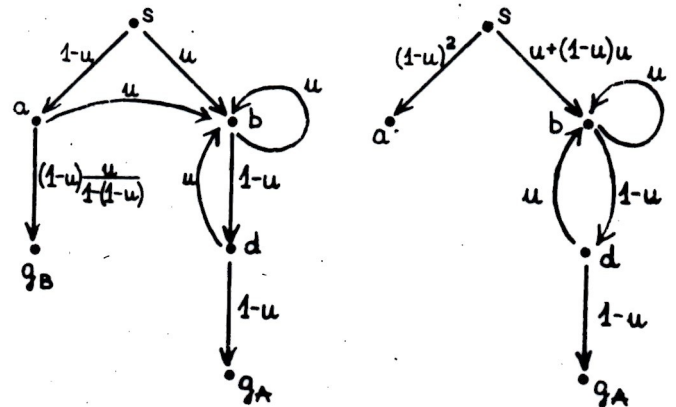
Graf stochastyczny do symulowania przebiegu tej gry błędzeniem losowym przedstawiono na rysunku 28.



Rys. 28

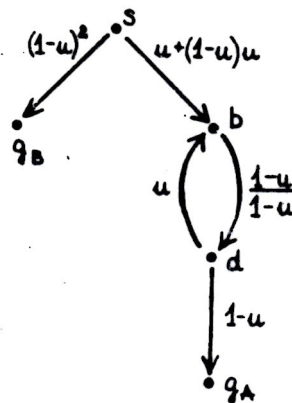
Na pytanie, przy jakim u ta gra jest sprawiedliwa, każdy bez wahania odpowiada, że dla $u = 1/2$. Ten przypadek kojarzymy z rzutem monetą. Wyrzucenie reszki traktujemy jako sukces. Równość szans w tej grze (nazywajmy ją w tym przypadku grą „reszka i dwa orły – dwa orły i reszka”) zdaje się wynikać z równości prawdopodobieństw wyników: „reszka, orzeł, orzeł” i „orzeł, orzeł, reszka”. Jak pokażemy ta intuicyjna (wszak podana bez głębszego zastanowienia) odpowiedź jest błędna. Intuicja podsuwa nam niewłaściwe skojarzenie pewnych symetrii ($u = 1-u$) z równością prawdopodobieństwa.

Rysunek 29 jest protokołem etapowej redukcji grafu stochastycznego.

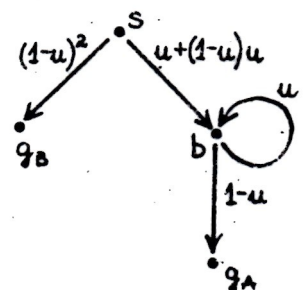


redukcja węzła c
a)

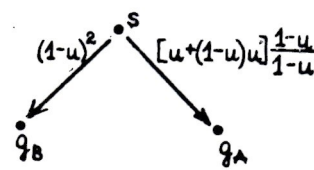
redukcja węzła a
b)



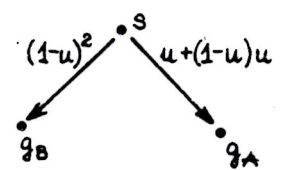
redukcja pętli w węzle b
c)



redukcja węzła b
d)



redukcja węzła d
e)



ostateczna postać
f)

Rys. 29

Zwycięstwo gracza G_A jest równoznaczne z dotarciem błądzącej po grafie cząstki (pionka) do mety g_A , zwycięstwo jego przeciwnika – z dotarciem do mety g_B .

Mamy więc – co wynika z ostatniego grafu z rysunku 29 –
 $P(A) = P(\text{zwycięży gracz } G_A) = u + u(1-u)$,
 $P(B) = P(\text{zwycięży gracz } G_B) = (1-u)^2$.

Dla $u = 1 - u = 1/2$ jest więc: $P(A) = 3/4$ i $P(B) = 1/4$.

Ale odnosząc problem sprawiedliwości gry (jako problem dotyczący prawdopodobieństwa zdarzeń A i B) do grafu stochastycznego z rysunku 28 można powyższe rozwiązanie otrzymać natychmiast. Zauważmy, że dotarcie do węzła b na tym grafie jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza G_A , gdyż z węzła b można jedynie dotrzeć do mety g_A , w żaden sposób zaś nie można dotrzeć do mety g_B .

Analogicznie dotarcie do węzła c jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza G_B . Prawdopodobieństwo dotarcia do węzła c jest równe $(1-u)(1-u)$, zaś do węzła b jest ono sumą: $u + u(1-u)$. Graf stochastyczny stał się więc środkiem racjonalizacji rachunków.

9. Algorytm pochłaniania dla grafu stochastycznego o niepustym brzegu.

Rozważmy graf stochastyczny o brzegu B . Niech C będzie podzbiorem (w szczególności jednoelementowym) zbioru B . Przez p_{jk} oznaczamy prawdopodobieństwo przypisane krawędzi $j \rightarrow k$. Przez p_{jc} oznaczamy prawdopodobieństwo dotarcia z węzła j do zbioru C . Jest oczywiste, że

- a) $p_{jc} = 1$ dla $j \in C$ oraz
- b) $p_{jc} = 0$ dla $j \in B \setminus C$.

Niech $j \notin B$. Przez A_{jc} oznaczmy zdarzenie: błądząca cząstka z węzła j dotrze do którejś z met zbioru C (dotrze do zbioru C). $P(A_{jc}) = p_{jc}$.

Niech K_j będzie zbiorem węzłów, które są końcami krawędzi o początku w węźle j . K_j jest zbiorem węzłów bezpośrednio (tzn. w jednym kroku) osiągalnych z węzła j . Przez D_{jkc} oznaczamy zdarzenie: błądzący pionek z węzła j dotrze do zbioru C przez węzeł k ($k \in K_j$).

Rozważmy lokalny model probabilistyczny odpowiadający błądzeniu rozpoczynającemu się w węźle j . W tym modelu zdarzenie D_{jkc} jest zbiorem tras, które z węzła j przez węzeł k prowadzą do met zbioru C . Przypisane tym trasom prawdopodobieństwa są iloczynami o wspólnym czynniku p_{jk} . Sumą tych iloczynów jest $P(D_{jkc})$. Wylączając przed nawias ów wspólny czynnik p_{jk} dostajemy w nawiasie sumę, która jest prawdopodobieństwem dotarcia z węzła k do zbioru C , a więc p_{kc} . Mamy więc: $P(D_{jkc}) = p_{jk}p_{kc}$ dla $k \in K_j$. Zdarzenia ze zbioru $\{D_{jkc} : k \in K_j\}$ są parami rozłączne i $A_{jc} = \bigcup_{k \in K_j} D_{jkc}$, a zatem

$$p_{jc} = P(A_{jc}) = \sum_{k \in K_j} P(D_{jkc}) = \sum_{k \in K_j} p_{jk}p_{kc}.$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli j nie jest węzłem brzegowym (meta), to

- c) $p_{jc} = \sum_k p_{jk}p_{kc}$, gdzie k przebiega wszystkie węzły bezpośrednio osiągalne z węzła j .

Warunek c) wraz z warunkami brzegowymi a) i b)

stanowi kolejne narzędzie obliczania prawdopodobieństw zdarzeń w przeliczalnych (równolicznych ze zbiorem liczb naturalnych) przestrzeniach wyników bez odwoływania się do szeregów. Układ warunków a), b) i c) nazywamy algorytmem pochłaniania.

Zastosowanie algorytmu pochłaniania ilustrujemy na przykładzie problemu sprawiedliwości gry, w której dwaj gracze G_A i G_B powtarzają na przemian tę samą próbę Bernoulliego tak długo, aż zakończy się ona sukcesem. Zwycięża ten, kto pierwszy ów sukces uzyskał, a rozpoczyna gracz G_A .

Problem prawdopodobieństwa zwycięstwa każdego z graczy odnieśmy do grafu stochastycznego. Chodzi o graf z rysunku 18. Mamy tu: $B = \{a, b\}$. Niech $C = \{b\}$. Zapytajmy o p_{bc} , jako o prawdopodobieństwo tego, że zwycięzcą zostanie gracz G_B .

Mamy tu

$$p_{bc} = 1 \quad \text{i} \quad p_{ac} = 0.$$

Z c) wynika, że

$$p_{ac} = (1-u)p_{ac} + up_{ac}, \quad p_{bc} = (1-u)p_{bc} + up_{bc},$$

a więc

$$p_{ac} = (1-u)((1-u)p_{ac} + u), \quad \text{czyli} \quad p_{ac} = \frac{u(1-u)}{1-(1-u)^2}.$$

Wprowadzony wyżej algorytm pochłaniania pozwala zastępować w rachunkach szeregi liczbowe układami prostych równań liniowych. Nasuwa się tu problem niezawodności tego algorytmu. Chodzi o rozstrzygnięcie, czy zawsze wspomniany układ równań (układ tylu równań, ile węzłów ma graf stochastyczny) ma rozwiązanie możliwe do przyjęcia z uwagi na probabilistyczny sens niewiadomych. Ten problem pozostawiamy otwarty.

10. Algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym z niepustym brzegiem.

Niech T będzie czasem błądzenia po grafie z co najmniej jednym węzłem brzegowym. W odpowiednim modelu T jest zmienną losową (funkcją), która każdej trasie błądzenia przypisuje jej długość. Załóżmy, że istnieje $E(T)$. Niech T_j będzie czasem błądzenia rozpoczynającego się w węźle j tegoż grafu. Oznaczmy $E(T_j)$ przez e_j .

Jest oczywiste, że dla $j \in B$ jest $T_j = 0$, a więc

- a) $e_j = 0$ dla $j \in B$.

Gdy wszystkie krawędzie z węzła j prowadzą na brzeg, to $T_j = 1$, a zatem

- b) $e_j = 1$ dla powyższych j .

Rozważmy pozostałe węzły grafu. Wszystkie trasy prowadzące z węzła j na brzeg sklasyfikujmy pod kątem tego, do którego z węzłów zbioru K_j prowadzi ich pierwsza krawędź. Klasyfikacja ta prowadzi do układu zupełnego zdarzeń $\{D_{jkb} : k \in K_j\}$, o którym była mowa w poprzednim ustępie. Weźmy, pod uwagę tę klasyfikację przy analizowaniu sumy

$$E(T_j) = \sum (długość\ trasy) \times \\ \times (prawdopodobieństwo\ błądzenia\ tą\ trasą),$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie trasy prowadzące z węzła j na brzeg grafu.

Weźmy składniki powyższej sumy odpowiadające trasom tworzącym klasę D_{jkB} . Przypisane tym trasom prawdopodobieństwa są iloczynami o wspólnym czynniku p_{jk} . Sumę tych składników można przedstawić w postaci

$$\sum (1 + \text{długość trasy z węzła } k) \times$$

$(p_{jk} \times \text{prawdopodobieństwo przypisane tej trasie z węzła } k)$,

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie trasy rozpoczynające się w węźle k zbioru K_j . Ostatnia suma jest równa

$$p_{jk} + p_{jk} \sum (\text{długość trasy z węzła } k) \times$$

$(\text{prawdopodobieństwo przypisane tej trasie z węzła } k)$,

a suma rozciąga się na wszystkie trasy wychodzące z węzła k . Ale

$$\sum (\text{długość trasy z węzła } k) \times$$

$(\text{prawdopodobieństwo przypisane tej trasie z węzła } k) = E(T_k)$.

Mamy więc związek

$$\begin{aligned} E(T_j) &= \sum_{k \in K_j} (p_{jk} + p_{jk} E(T_k)) = \\ &= 1 + \sum_{k \in K_j} p_{jk} E(T_k), \quad \text{bo } \sum_{k \in K_j} p_{jk} = 1. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy tym samym, że gdy j nie jest metą i j nie jest węzłem, z którego wszystkie krawędzie prowadzą na brzeg, to

$$c) \quad e_j = 1 + \sum_k p_{jk} e_k,$$

gdzie k przebiega wszystkie węzły, do których prowadzi krawędź z węzła j . Wzór b) można uznać za szczególny przypadek wzoru c). Tak więc w istocie układ warunków a) i c) określa pewien algorytm wyznaczania średniego czasu błędzenia po grafie stochastycznym o niepustym brzegu. Nazywamy go **algorytmem średniego czasu błędzenia**.

Niech T będzie czasem trwania schematu losowego zwanego oczekiwaniem na pierwszy sukces. Nietrudno stwierdzić, że czasem oczekiwania na pierwszy sukces jest czas trwania gry losowej, której odpowiada graf stochastyczny z rysunku 18, czyli czas błędzenia po tym grafie.

Korzystając z definicji wartości oczekiwanej dowodzi się (m.in. korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych, por. [5] s. 151), że $E(T) = 1/u$, gdzie u jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie ($0 < u < 1$). Wzór na wartość oczekiwaną czasu oczekiwania na pierwszy sukces wyprowadzimy prościej korzystając z algorytmu średniego czasu błędzenia po grafie stochastycznym. Powróćmy zatem do rysunku 18. Mamy

$$E(T) = e_a \text{ oraz } e_a = 0 \text{ i } e_b = 0, \text{ a ponadto}$$

$$e_a = 1 + u e_a + (1-u) e_c, \quad e_c = 1 + u e_b + (1-u) e_a,$$

skąd wynika, że

$$e_a = 1 + (1-u)(1 + (1-u)e_a),$$

a więc $e_a = 1/u$.

Celem niniejszych rozważań była próba prezentacji grafu stochastycznego jako wygodnego w nauczaniu (i ogólnie w przekazywaniu wiedzy probabilistycznej na każdym etapie nauki) środka dydaktycznego umożliwiającego adaptację treści zaawansowanego rachunku prawdopodobieństwa na grunt matematyki „dla wszystkich” (a więc także matematyki szkolnej).

Graf stochastyczny ukazano jako:

- narzędzie opisu i rozumowania,
- jako środek organizacji i wspierania matematycznego myślenia zainicjowanego procesami matematyzacji i dedukcji,
- jako środek racjonalizacji postępowania, w tym środek upraszczający rachunki, ale także konkretne eksperymentowanie (błądzenie losowe po grafie jako specyficzna forma symulacji przebiegu schematu losowego, graf jako plansza do gry zastępująca inne rekwizyty itd.),
- jako narzędzie wykrywania i uzasadniania analogii, a także wykorzystywania tych analogii we wnioskowaniach,
- jako środek wykrywania symetrii istotnie upraszczających wnioskowania,
- jako środek inicjujący i wspomagający matematyczne odkrycie (por. odkrywanie na drodze indukcyjnej pewnych własności łańcuchów Markowa),
- jako wygodny środek argumentacji.

Literatura

- N. Deo, *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*, PWN, Warszawa 1980.
- A. Engel, *The Probabilistic Abacus*, Educational Studies in Mathematics, vol. 6 nr 1(1975), s. 1-22.
- A. Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1,2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973.
- Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki nr 6(1986), s. 25-41,
- L.T. Kubik, *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1986.
- A. Płocki, *Łańcuchy Markowa w aspekcie dwuwymiarowego grafu stochastycznego i stochastycznego grafu przepływu*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki I, zeszyt 114, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1987, s. 7-45.
- A. Płocki, *Rachunek prawdopodobieństwa dla szkoły średniej*, wyd. V, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1988.