Postmodernizm – w kulturze, matematyce i matematyce szkolnej

Wacław ZAWADOWSKI, Warszawa

W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych w wielu obszarach naszej kultury pojawiła się nowa tendencja, która przerodziła się w nowy styl, zwany postmodernizmem. Ten nowy styl bardzo wyraźnie zaznaczył się w sztuce – w architekturze, literaturze, malarstwie i przeniknął do nauki, a w końcu zaczął zaglądać do szkół i wreszcie do szkolnej matematyki. Postaram się opisać cechy tego nowego stylu w matematyce i w nauczaniu matematyki szkolnej.

Uchwycenie tych zmian dla mało wprawnego oka może być trudne. Przywykliśmy do tradycyjnych paradygmatów szkolnych i tradycyjnych paradygmatów w szkolnej matematyce, a z góry wydaje się mało prawdopodobne, żeby można było coś znaleźć wspólnego w sztuce i w matematyce, o czym z sensem można by mówić. Dlatego spróbuję na początek wziąć się za łatwiejsze zadanie. Spróbuję opowiedzieć, czym jest postmodernizm w architekturze. Zmiana paradygmatu przy przejściu od modernismu do postmodernizmu na przykładzie architektury jest łatwiejsza do zrozumienia.

Bardzo polecam do przeczytania książkę, którą napisał Charles Jencks i która w tłumaczeniu polskim z roku 1987 nosi tytuł *Architektura postmodernistyczna*. Tytuł oryginału, który ukazał się w roku 1977, jest nieco inny: *The Language of Postmodern Architecture*. Książka, właściwie album bogato ilustrowany zdjęciami fotograficznymi z dobrymi komentarzami, doczekała się wielu wydań. I już sam tytuł polskiego tłumaczenia jest znamienny. Tłumacz opuścił, schował wstydliwie *język*. Tak jakby bał się polskiego czytelnika, nie przygotowanego jeszcze na takie ekstrawagancje. A tymczasem podstawową tezą książki Jencksa jest właśnie to, że architektura to nie tylko domy, budynki, bloki i miasta jako obiekty, przedmioty, ale sposób ich ułożenia i wygląd, który przemawia do nas jak wielki system znaków, który zaczyna mówić do nas od momentu, gdy zaczynamy chodzić po tym świecie. Architektura to język.

Wszyscy jesteśmy wrażliwi na architekturę. Możemy nie interesować się ani współczesnym malarstwem, ani rzeźbą, ani muzyką, ani literaturą, ale musimy chodzić po ulicach i patrzeć na to, co tam stoi. Musimy też gdzieś mieszkać i interesujemy się zwykle tym, jak mieszkają inni. A mamy na co patrzeć. W telewizorach, w kinie, w ilustrowanych czasopismach stale oglądamy dalekie miasta, zaglądamy do cudzych mieszkań i w cudze sprawy z fotograficzną dokładnością. Być może dlatego odczuwamy lepiej architekturę niż inne obszary naszej kultury.

Świat modernistyczny, nowy wspaniały świat wielkich „szklanych domów", „maszyn do mieszkania" z lat 1920–1950, zaprojektowanych i zbudowanych konsekwentnie według jednej „wielkiej idei" i jednej „koncepcji" i „żelaznej zasady", a potem budowany z żelaza, stali i szkła, miał wyzwolić nas z ciasnoty, przesądów i złych przyzwyczajeń, socjalnie i indywidualnie. Według marzeń wielkich architektów tego nowego porządku, Le Corbusiera, Waltera Gropiusa, Miesa van der Rohe, zbudowany miał być nowy świat według „jasno jawnie sprecyzowanych zasad", o prostych budowlach, jasnych ulicach i jasnych mieszkaniach. Zaprojektowano wszystko od nowa, od wielkich gmachów i bloków, do najdrobniejszych domowych sprzętów o ascetycznie funkcjonalnych, prostych geometrycznych kształtach. Były to czasy, gdy hasła w rodzaju „nowoczesne domy dla nowoczesnych ludzi" urzekały wielu. Nowoczesna technika, nowoczesna sztuka – a nowoczesna nauka miała zapewnić podstawy tego ładu.

Dzisiaj takie symplicystyczne schematy już nam nie wystarczają. Odczuliśmy na własnej skórze, że prowadzą do świata, w którym nie czujemy się dobrze. Zawiedliśmy się wszyscy.

Świat postmodernistyczny jest jakby mniej pewny siebie. Jest policentryczny, pluralistyczny, bardziej zwrócony ku tradycji, ku lokalnym zwyczajom, z uszanowaniem lokalnych dialektów, a nawet z podziwem dla ich wdzięku. Z drugiej strony szybkość rozchodzenia się informacji po świecie sprawia, że każde zdarzenie, nawet w najodleglejszej części świata, możemy przeżywać – i często przeżywamy – jak nasze własne. I im bardziej świat rośnie, tym bardziej staje się jedną wielką wioską. Mamy wrażenie, że odległe „dialekty" i „dalekie archipelagi" stają się mniej dalekie.

Wszechogarniająca jednolitość stylu i formy miała konsekwencje. Świat modernistyczny budował kościoły, które wyglądały jak kotłownie i kotłownie, które wyglądały jak kościoły. Człowiek gubi się w takim świecie, gdzie forma rzeczy przeczy jej funkcji. A marzenia wielkich architektów tego nowego porządku o pięknych jasnych mieszkaniach pozostawiły wprawdzie dużo imponujących budowli i wspaniałych ścian, ale dla wielu kończyły się na małej przestrzeni w wielkich blokach, daleko od tych marzeń. O książce Jencksa pisze wydawca: „Jest to historia niepowodzenia architektury modernistycznej w nawiązaniu kontaktu z użytkownikami i dzisiejszych próbach czynionych przez postmodernistów, by taki kontakt nawiązać". Paralela do ruchu „nowej matematyki" i związanych z nim rozczarowań jest uderzająca.

Postmodernizm jest obecnie opisywany i dyskutowany w wielu miejscach. O postmodernizmie w sztuce i literaturze pisze np. Joseph Kosuth w artykule *Sztuka po filozofii* w zbiorku *Zmierzch estetyki - rzekomy czy autentyczny?* pod redakcją Stefana Morawskiego (Czytelnik, 1987). Można też sięgnąć do wyboru tekstów pt. *Postmodernizm - kultura wyczerpania?* zebranych przez Marcina Giżyckiego (Akademia Ruchu, Warszawa 1988). W odróżnieniu od wspomnianej książki Jencksa te teksty są trudne do zrozumienia dla matematyków. Nie ma obrazków, częste niedbałe sformułowania, to znowu wyraźne niejasności, zapewne zamierzone, malują obraz raczej impresjonistyczny niż coś podobnego do fotografii.

O postmodernizmie w fizyce można przeczytać w wielu miejscach. Wspomnę może tylko słynny odczyt Eugene Wignera *Unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences* (O niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych). Autor stwierdza tam, że w fizyce, tak jak w całym przyrodoznawstwie, wkraczamy w okres, w którym musimy akceptować istnienie dla tych samych zjawisk wielu różnych modeli zgodnych z doświadczeniem. W wielu dziedzinach mamy „fałszywe teorie" dające wyniki irytująco zgodne z doświadczeniem. Świat staje się za bardzo skomplikowany, żebyśmy mogli liczyć na znalezienie jednego, jedynie prawdziwego, absolutnego, naukowego modelu.

Symptomy postmodernizmu w matematyce są dobrze opisane w antologii Th. Tymoczko *New Trends in Philosophy of Mathematics* (1985). Świadczą o nich również takie książki jak Davis & Hersh *The Mathematical Experience* (1981), *Dwanaście esejów o matematyce* pod redakcją L.A. Steena (1979) i takie jak *Escher, Gödel, Bach* Hofstadtera i Imre Lakatosa *Proofs and Refutations* (1976).

Ta ostatnia książka odegrała ogromną rolę w kształtowaniu obrazu matematyki wśród nauczycieli matematyki na Zachodzie w drugiej połowie lat siedemdziesiątych. Dla wielu z nich w tym czasie stanowiła jakby wyznanie wiary.

Matematyka się zmienia. Zmienia się jej styl i jej rola w naszej kulturze. Zmniejszył się nacisk na aksjomatyzowanie. Zwiększyła się rola przekazu wizualnego, często zaniedbywana na korzyść manipulowania symbolami przy podejściu modernistycznym. „Obraz pojęcia" utworzony intuicyjnie na podstawie oglądu konkretnych modeli staje się równie ważny, a może ważniejszy od „definicji werbalnych". Dążenie do wyrażenia wszystkiego w sposób jawny i dosłowny raczej słabnie i raczej może się wydawać zadaniem niespełnialnym. W wielu wypadkach takie próby mogą uchodzić za objawy naiwności.

Co można powiedzieć o postmodernizmie w szkole? Czy można mówić o czymś takim jak postmodernizm w matematyce szkolnej? Czy ma to sens? Uważam, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Uważam, że ostatni, VI Międzynarodowy Kongres Nauczania Matematyki w Budapeszcie był w istocie wielką manifestacją tendencji postmodernistycznych w nauczaniu matematyki.

Najokazalszym pomnikiem stylu modernistycznego w matematyce szkolnej jest seria podręczników Papy'ego wydana pod tytułem *Mathématique Moderne*, tom I, II, III, V, VI. Tomu IV dotychczas nie ma i nie będzie. Miał prawdopodobnie zawierać elementy rachunku różniczkowego, ale nie udało się tego dobrze zrobić, opracowano tylko pierwszy rozdział, który okazał się zbyt obszerny i realizacji tomu IV nie doprowadzono do końca. Ta seria książek jest jedyna w swoim rodzaju. Bardzo starannie wydana, z ilustracjami bardzo starannie opracowanymi zarówno pod względem artystycznym, jak i matematycznym, kolorowo i przyciągająco dla oka, a nawet z użyciem przezroczystej folii do ilustrowania przekształceń. Pod względem matematycznym całość oparta była konsekwentnie na pojęciu zbioru i relacji.

Ale przekaz był raczej intuicyjny, wizualny. Miało się wrażenie, że manipulowanie symbolami matematycznymi odbywa się w cieniu reprezentacji ikonicznych i aspekt wizualny wydobywany jest wszędzie, gdzie się da, na pierwszy plan. Niektóre prezentacje tematów były znakomite i mogą do dzisiaj uchodzić za wzorowe. Takie są np. graficzny styl przedstawiania relacji, opracowanie układu dwójkowego, przekazy wizualne związane z kombinatoryką, trójkątem Pascala i symbolami newtonowskimi. Nie mogę, niestety, wymienić tych wszystkich ładnych fragmencików. Jest ich za dużo. Ale jako całość ujęcie matematyki szkolnej przedstawione w serii podręczników Papy'ego było nie do przyjęcia dla nauczycieli. Po kilku latach nauczyciele odrzucili ten styl.

To samo można powiedzieć o bardzo interesujących próbach, które podjął Patrick Suppes wprowadzając zbiory do nauczania początkowego matematyki i o próbach, które podejmował Zoltan Dienes usiłując wprowadzać jawnie do nauczania inne struktury matematyczne, przede wszystkim grupy.

Historia szkolnej geometrii stanowi osobny rozdział. Od czasów *Podstaw Geometrii* Hilberta, słynnych *Grundlagen der Geometrie*, poszukiwano układu aksjomatów odpowiedniego dla szkół. Układ taki powinien być łatwy do nauczania, logicznie poprawny, a dla uczniów inspirujący. Było wiele propozycji. Do tej pory niczego takiego nie znaleziono. Poszukiwania jednak trwają, tak jak poszukiwania takiego modelu samochodu, który byłby jednocześnie tani, niezawodny i modny. Jeden z takich monumentalnych systemów nauczania geometrii był przedstawiony w podręcznikach geometrii Z. Krygowskiej. Można było zauważyć wiele wspaniałych szczegółików, ładne zadania, dobrane oznaczenia. Ale całość okazała się nie do przyjęcia, nauczyciele odrzucili ten system. W serii belgijskiej Papy'ego za bardzo podkreślono reprezentacje wizualne w stosunku do manipulacji symbolami. W geometrii Krygowskiej było na odwrót. Zarówno w podręcznikach Papy'ego, jak i w podręcznikach Krygowskiej wprowadzono specjalną symbolikę, której użycie miało swój lokalny sens, swoją lokalną motywację. Rozciąganie takiej symboliki poza naturalny obszar jej przeznaczenia prowadziło do wyraźnie niezgrabnych prezentacji, które robią na nas dzisiaj wrażenie barokowych konstrukcji. Ten efekt w obu przypadkach potęgowała tendencja do wyrażania wszystkiego w sposób jawny, bez zaufania do domyślności czytelnika i bez pozostawiania mu „luzu" na dociekliwość własną w interpretacji przekazu. W oczach typowego modernisty z tych dawnych już lat taki styl był synonimem precyzji i był chwalony. Nam wydaje się to dzisiaj dziwne. Dziwnie ograniczające naszą swobodę. Moglibyśmy wymieniać wiele takich monumentalnych wzlotów i upadków z okresu modernizmu. Te dwa niech nam na razie wystarczą. Wszystkie takie przypadki są pouczające dla tych, co studiują trudną sztukę dydaktyki matematyki. Stanowią też bazę naszych doświadczeń.

Pod koniec lat siedemdziesiątych sytuacja była dojrzała do zmian. Wszystkie próby globalnych rozwiązań w nauczaniu matematyki kończyły się niepowodzeniem. Pojawiła się potrzeba czegoś innego. Nie było jednak widać żadnej rozsądnej alternatywy i nie było jasne, gdzie można alternatywnych rozwiązań szukać. Możliwości techniczne nowych rozwiązań przyszły około roku 1980 wraz z pojawieniem się tanich mikrokomputerów z dobrą grafiką, którą można było oglądać na ekranach monitorów.

Wyobraźmy sobie tylko, jak ciężko było w szkolnym kursie matematyki dobrnąć do tego momentu, gdy można było podać sposób na narysowanie wykresu takich funkcji jak wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze czy też rozmaitych kombinacji takich funkcji, krótko mówiąc – funkcji elementarnych. Taki moment następował po wprowadzeniu pochodnych i związanej z nimi teorii. Można to było przedstawiać mniej lub bardziej teoretycznie, mniej lub bardziej formalnie, ale jakieś pojęcie granicy musiało się przy tym pojawić. Dzisiaj za pomocą krótkiego, kilkulinijkowego programiku napisanego w jakimkolwiek języku programowania, który się do tego nadaje, możemy poprosić komputer o zaznaczenie osi współrzędnych, a potem o zaznaczenie punktów postaci

$$\big(x, f(x)\big).$$

W ten sposób otrzymujemy na ekranie obrazek, dający wrażenie wykresu funkcji f bez żadnej wiedzy o pochodnych i przejściach granicznych. Mamy więc narzędzia i takie sposoby ich użycia, że możemy pokazać uczniom wykresy funkcji elementarnych na samym początku kursu elementarnej analizy, a nie pod koniec. To, co wydawało się zawsze celem takiego kursu, staje się punktem wyjścia.

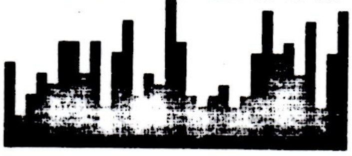
Mamy wyraźnie do czynienia z sytuacją, gdzie *obraz pojęcia* i odpowiadający mu *obiekt myślowy* pojawiają się przed *definicją pojęcia*. Definicja pojęcia w takim układzie pojawia już po ukształtowaniu się obrazu pojęcia i stanowi jakby wywieszenie szyldu na wzniesionym już domu, przyczepienie tabliczki do wybujałej już rośliny. Możemy wtedy powiedzieć, że ten ważny dział matematyki, który tradycyjnie nazywa się analizą matematyczną, zaczyna się w momencie, gdy zaczynamy patrzeć na wykresy funkcji elementarnych jak na figury geometryczne na płaszczyźnie. Figury geometryczne, które są obiektami myślowymi, a nie tylko śladami atramentu na papierze, czy kredy na tablicy, czy też plamkami na ekranie komputera. Podobne zmiany w podejściu są teraz możliwe nie tylko przy nauczaniu o funkcjach elementarnych, lecz w wielu innych obszarach matematyki szkolnej. W oczach typowego modernisty tego rodzaju zmiany wyglądają co najmniej jak nietakt, coś tak jak podanie deseru przed zupą. Niby można, ale wielu się na to oburzy, zanim zasmakuje. Być może dlatego, jako coś w rodzaju „coup de grâce” francuskie Ministerstwo Edukacji ogłosiło w roku 1985 nowy program matematyki dla szkół, w którym wyraźnie zabrania stosowania formalnych definicji z użyciem epsilona i delty: „La définition des limites par (ε, α) est en dehors du programme” (w tym miejscu trzeba dodać, że tak się już składa, że rolę polskiej delty pełni w podręcznikach francuskich alfa). Te zmiany zostały jeszcze mocniej podkreślone w rok później, w 1986. Według tego zarządzenia badanie funkcji ma być przeprowadzane intuicyjnie, bez zwykle przedtem używanych definicji formalnych. Pojawienie się tego zarządzenia stanowiło coś w rodzaju oficjalnego otwarcia postmodernistycznego sezonu w nauczaniu matematyki we Francji.

Weźmy inny przykład – ze stochastyki. Komputer może być, oczywiście, używany do pisania tekstu na ekranie. Ekran ma wtedy pewną liczbę wierszy i pewną liczbę kolumn. Taki komputer jak ZX Spectrum ma 22 wiersze i 32 kolumny. Zamiast liter możemy używać rozmaitych znaków, np. może to być czarny kwadracik. Możemy sobie łatwo wyobrazić kilkulinijkowy program, który wybiera losowo swoim generatorem kolumnę na ekranie i na dole tej kolumny stawia taki czarny kwadracik w przypadku gdy kolumna jest pusta, a gdy już przedtem zostały postawione w jakiejś kolumnie czarne kwadraciki, to następne stawiane są na wierzchu, na nich, tak, że wytwarza się taki obrazek, jakby rosły do góry „kominy” albo „drapacze chmur”. Przy każdym dostawianym kwadraciku komputer wydaje dźwięk, którego wysokość zależy od wysokości, na której umieszczany jest ten kwadracik i używana jest do tego np. skala dodekafoniczna. W ten sposób nie tylko widzimy na ekranie co to znaczy rozkład jednorodny, ale możemy to również usłyszeć. Możemy w ten sposób uzyskać całkiem niezłą muzykę w stylu modernistycznym. Radzę spróbować. Program trzeba odpowiednio dostroić do smaku, tak żeby efekt był dobry. Czy jesteśmy gotowi przyjąć taką rzecz w ramach tematu „rachunek prawdopodobieństwa” w szkole?

Wsłuchaj się w muzykę tego programu. Spróbuj odpowiedzieć na pytanie, kto właściwie skomponował tę muzykę,

program, czy jego autor ?

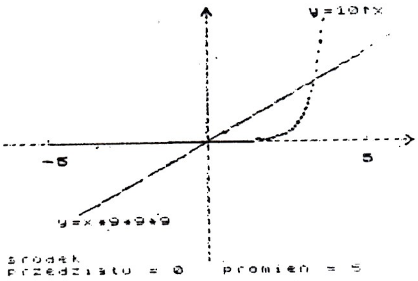
```
 1 REM Program "Kominy"
 2 RANDOMIZE
 5 DIM p(32)
10 LET b=INT (32*RND)
20 PRINT AT 21-p(b+1),b,"■":
      BEEP .1,-12+3*p(b+1)+1
30 LET p(b+1)=p(b+1)+1
40 IF p(b+1)<22 THEN GO TO 10
```



Popatrzmy na jeszcze jeden przykład ze stochastyki. Jedną z najtrudniejszych rzeczy do wytłumaczenia przyszłym adeptom tej sztuki jest centralne twierdzenie graniczne. Mogą się nauczyć na pamięć różnych sformułowań tego twierdzenia, ale często nie rozumieją co to znaczy. Dużą pomocą może tu być taki program, który dynamicznie to przedstawia. Na ekranie komputera, po lewej stronie, wydzielone są dwa prostokąty, jeden nad drugim, jak dwa okna. Po prawej stronie pojawiają się jakieś cyferki. W tych wydzielonych oknach są dwa układy współrzędnych, jeden nad drugim, oś y jednego z nich jest dokładnie na przedłużeniu osi drugiego. W górnym oknie widzimy jakieś kropki, które wyraźnie wyznaczają obszar pod wykresem pewnej funkcji. Oko w tym przypadku nie myli. Wybrana została pewna funkcja, której wykres mieści się w górnym oknie. W prostokącie, wyznaczonym przez to okno, wybieramy losowo punkt. Gdy punkt ten wypada pod wykresem wybranej funkcji, program zaznacza ten punkt kropką na ekranie, zapamiętuje jego współrzędną x i losuje następny punkt. Gdy punkt wypada ponad wykresem funkcji, program odrzuca go i losuje następmy. Po wylosowaniu np. dziesięciu takich punktów program oblicza średnią arytmetyczną zapamiętanych wartości x i zaznacza tę wartość średniej w dolnym układzie współrzędnych. Stawia kropkę w odpowiednim miejscu na osi poziomej x. Następne kropki stawiane są jedna na drugiej, tak że w oknie dolnym powstaje rozkład częstości tych wartości średnich obliczonych z prób po 10. Teraz już jest widoczne, co się dzieje. Kropki w górnym oknie zaznaczają gęstość pewnej zmiennej losowej. W dolnym oknie można zobaczyć, że im większe próby, wybrane „z górnego okna”, tym bardziej rozkład częstości powstający w dolnym oknie jest podobny do pewnego rozkładu normalnego. I widzimy to na własne oczy, na ekranie komputera, dynamicznie, w ruchu. Liczby pojawiające się po prawej stronie to obliczone średnie arytmetyczne z prób i odpowiadające im odchylenia standardowe. Im większe próby, tym rozkład na dole jest bardziej skupiony i bardziej podobny do normalnego. Przy próbach o liczebności jeden rozkład na dole jest taki sam, jak na górze.

Tego rodzaju dynamiczne plakaty są obecnie cenną pomocą dydaktyczną. Jest to jeden z wielu przykładów użycia komputera w roli „supertablicy". Za pomocą takich programów obraz pojęcia przekazujemy wprost, z pominięciem formalnej definicji. Definicje takie pojawiają się raczej w roli kropki nad i niż zaszyfrowanego przekazu, którego treść uczący się musi mozolnie wygrzebywać, jak detektyw, Sherlock Holmes. Ma to oczywiście swój urok. Znamy. Ale nie każdy to potrafi.

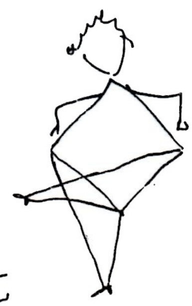
Ciągle jeszcze jesteśmy pod wrażeniem komputerowego dowodu twierdzenia o czterech barwach. Dyskutujemy akceptowalność takich dowodów. A tymczasem proste dowody z użyciem komputera wchodzą już do szkół. I, być może, w zakresie masowej kultury matematycznej będzie to tym razem nie teoretyczna, ale praktyczna rewolucja. Oto przykład jednego z takich dowodów, na tyle prosty, że można, i na tyle ładny, że warto go przytoczyć. Chodzi o następujący żarcik.

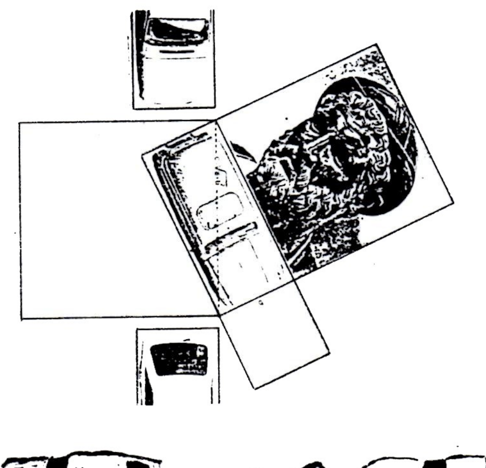


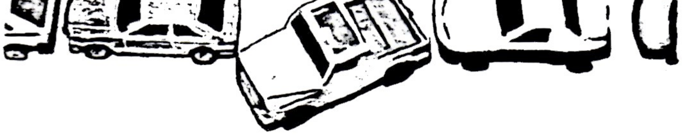
Na osi poziomej oznaczona jest ilość cyfr, c. Na osi pionowej ilość liczb i zarazem maksymalna liczba, jaką można zapisać tą ilością cyfr.

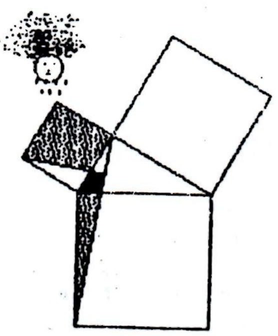
Bierzemy dowolną liczbę naturalną podzielną przez 3. Cyfry tej liczby podnosimy do trzeciej potęgi i sumujemy. Z otrzymaną liczbą postępujemy podobnie i podobnie z nową sumą trzecich potęg cyfr itd. Liczba 153 jest podzielna przez 3 i ma tę własność, że zabawa urywa się już za pierwszym krokiem: $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$. Sprawdzając jak to jest dla innych liczb podzielnych przez trzy przekonujemy się, że po kilku iteracjach lądujemy w końcu w 153. Czy tak jest zawsze? Łatwego, szkolnego dowodu nie widać. Ale można hipotezę sprawdzić komputerem. Czy to wystarczy, jeżeli sprawdzimy, że hipoteza jest prawdziwa np. dla wszystkich liczb podzielnych przez 3 i mniejszych od np. 10 000? Wystarczy, bo ciąg 10^c rośnie szybciej od ciągu 9^3c i dla $c > 5$ już go wyraźnie przewyższa. Względem ilości cyfr, c, maksymalna wartość liczbowa liczebnika dziesiętnego rośnie wykładniczo, a wyrażenie 9^3c po prostu liniowo. Opisana transformacja szybko obniża wartość liczby i po kilku iteracjach schodzimy w rejon liczb czterocyfrowych. W tym rejonie możemy brutalnie użyć komputera, jego sprawności rachunkowej, sprawdzając w pętli jak to jest dla liczb podzielnych przez 3 i mniejszych od 10 000. Rozumowanie proste, komputer można by wyeliminować, ale komu by się chciało. Takie dowody czy może argumentacje przez sprawdzenie i zobaczenie na wykresie będą w szkole coraz częstsze. Powstaje swego rodzaju nowa retoryka obrazu i nowa retoryka prób i błędów.

Twierdzenie Pitagorasa od tysięcy lat było używane przez murarzy do sprawdzania kąta prostego przy stawianiu domów. Tak się przynajmniej przesadnie mówiło w starych podręcznikach matematyki, powołując się zwykle przy tym dość skromnie na pierwszą pitagorejską trójkę: 3, 4, 5. Obecnie pojawiają się czasem zamiast tego, a czasem obok, inne poglądowe przykłady. Możemy się np. zastanawiać, w jak małą lukę między parkującymi przy krawężniku samochodami nasz jeszcze się zmieści. Czy eliminuje to stare dowody i rysunki? Na pozór może tak. Ale im bardziej to się zmienia, tym bardziej zostaje takie samo. Przyjrzyjmy się bliżej np. rysunkowi, który pochodzi ze starego tłumaczenia arabskiego ksiąg Euklidesa w wykonaniu Tabit Ibn Quorra.









Dopisek na marginesie z lewej strony mówi, że rysunek przypomina piękną dziewczynę. Nie bardzo możemy podążyć za wyobraźnią tego, kto to napisał. Może chodziło o twarz zakrytą tkaniną? Ale i dzisiaj możemy podjąć myśl zapisaną w starych księgach i za pomocą komputera przedstawić dowód dynamicznie w postaci tańczącej dziewczynki.

Możemy do tego dodać jeszcze odpowiednio dobraną muzykę. Postmodernizm jest wesoły, lubi bawić się myślami i symbolami, nawet gdy chodzi o sprawy poważne. Modernizm był bardziej napuszony w nastroju, bardziej serio, czasem nawet ponury. Takie facecje, jak te opisane, byłyby tam nie na miejscu.

Postmodernizm jest bardziej tolerancyjny niż modernizm, jest też czymś szerszym niż czysty modernizm. W postmodernizmie jest też miejsce dla rozwiązań typowo modernistycznych. Jest to widoczne w różnych obszarach naszej kultury, widoczne jest też w matematyce i matematyce szkolnej.

Przekazy modernistyczne są zwykle systemowo czyste, jednolite, a morał zwykle sformułowany jest w sposób jawny, dosłowny. Przekazy postmodernistyczne są często hybrydowe, kawałkami poskładane ze znaków należących do różnych systemów – zapisy jak np.

$$\text{sto} = (10110100)_2 = 80 + \text{dwadzieścia}$$

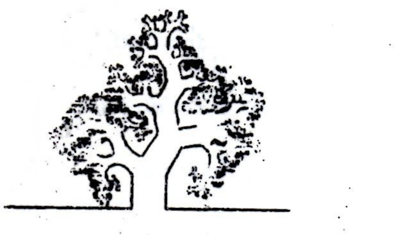
nikogo już nie rażą. Traktujemy je jak figury stylu.

Postmodernizm chce być dla wszystkich. Modernizm jest elitarny. W sztuce oznacza to swoiste odgradzanie się elit i wyraźną pochwałę prawdziwej sztuki, przeznaczonej dla wybranych i potępienie kiczu, przeznaczonego dla plebsu. Postmodernizm zaciera tę różnicę. Wraz z uznaniem prawa do twórczości dla wszystkich i uznaniem prymatu procesu twórczości nad efektem końcowym pojęcie wartości dzieła przesuwa się na sam proces jego tworzenia, z oczywistym uszczerbkiem dla efektu końcowego tego procesu. W rezultacie, dla modernistycznego oka prawdziwa sztuka znika, a musea i galerie coraz bardziej zapełniają się kiczem. W przetłumaczeniu tego na nasze, gdy podkreślamy wartość twórczości i prawa do inicjatywy własnej uczniów, studentów, amatorów, uczących się matematyki w różnych szkołach i w popołudniowych czy niedzielnych szkółkach, to musimy przyjąć, że powstające dzieła nie zawsze będą arcydziełami w dobrym dawnym sensie. Takie przesunięcie poetyki z dzieła na samą twórczość ma swoją wartość pedagogiczną. Ważniejsze się staje wtedy „mówienie matematyką" niż to, o czym się mówi. Jest to też wyraźna słabostka postmodernizmu i może się stać jego piętą achillesową. Nigdy przedtem ten problem nie stawał przed nami tak ostro i tak brutalnie. Nie oznacza to, że postmodernizm akceptuje wszystko. Tak nie jest. Te zamierzone nieczystości stylu spełniają jednak pewną funkcję i mają swoje znaczenie. Używane z sensem mają swój wdzięk i siłę. Dookoła mamy pełno matematycznego kiczu. Kicz jest zawsze substytutem, udaje z powagą coś, czym nie jest. Kicz boi się śmiechu. Wspomniana wesołość, a może i lekkoduszność postmodernizmu jest też obroną przed nazwaniem kiczem.

Dla matematyki szkolnej ma to jeszcze jedną konsekwencję. Przesunięcie uwagi z dzieła na działanie stanowi wyraźne przyznanie, że matematyka to także sport. A wiadomo – sportu nie uprawia się teoretycznie, gapiąc się w szklaną szybę telewizora czy czytając gazetę. Sport jest poetyką ruchu i gry. W prawdziwym sporcie nie dość jest przeskoczyć, trzeba ładnie przeskoczyć, z wdziękiem. I wbrew temu, co słyszymy dzisiaj, ważny jest nie sam wynik, ale to właśnie, że podejmujemy ryzyko, że w ogóle stajemy do konkurencji. Taka była idea sportu już u Homera. To samo, gdy patrzymy w nowy sposób na ten stary, umysłowy, konceptualny sport, jakim też jest matematyka.

Kultura postmodernistyczna odnosi się z większym szacunkiem do odbiorcy. Patrząc np. na język mniej zajmujemy się tym, jak się mówić powinno i narzucaniem tego komuś, a bardziej nas interesuje to, jak się naprawdę mówi. Bardziej interesuje nas język potoczny, ten, którym się możemy porozumieć z odbiorcą, niż taki język, który stworzony według jedynie słusznych naukowych zasad powinien obowiązywać. Życie płata nieliche figle takim sztucznym normom, uznanym jako „naturalne". Oto jeden taki. W języku potocznym słowo „zbiór" ma wyraźnie inne znaczenie niż w matematyce. W języku potocznym bliższe znaczenie do matematycznego znaczenia słowa „zbiór" ma słowo „zestaw", chociaż i ono nie całkiem dobrze oddaje matematyczne pojęcie zbioru. Ale angielskie słowo potoczne „set", odpowiadające znaczeniem polskiemu „zestaw", zostało przyjęte w matematyce dla oznaczenia pojęcia zbioru.

A to jest prosty program w Logo, który w różnych postaciach obiegł już cały świat. Symuluje metodą pitagorejską rosnące drzewka.



```
TO GENY :n :bok :alfa
IF :n = 0 [fd :bok rt 90 fd :bok
 rt 90 fd :bok stop]
SOUND SE 0.3 4 * :n
FD :bok LT :alfa
GENY :n - 1 :bok * COS :alfa 25
+ RANDOM 30
LT 90
SOUND SE 0.1 4 * ( n - 1 : )
GENY :n - 1 bok * SIN alfa 25
+ RANDOM 30
LT 90 - alfa FD :bok
END

TO GLEBA :n
CS PU
GAMA .05 0
SETPOS [-120 -80] PD
RT 90 FD 115 LT 90
GENY :n 30 25 + RANDOM 40
LT 90 FD 110
GAMA .05 0
END

TO GAMA :s :t
SOUND SE :s :t
MAKE "t :t + 1
IF :t > 6 [stop]
GAMA :s :t
END
```

Mamy więc taką sytuację, gdy porównamy oba języki, angielski i polski:

potocznie „set" znaczy „zestaw"
w matematyce „set" znaczy „zbiór".

Można zatem zrozumieć dlaczego zakochani w matematyce informatycy zaczęli tłumaczyć potoczne znaczenie słowa „set" słowem „zbiór". Mówią „wydruk zbiorów", „uzupełnianie zbiorów na ścieżkach" itd. Słowo „zbiór" w informatyce jest raczej bliższe matematycznemu znaczeniu słowa „ciąg" – pewien zestaw kolejno występujących, być może powtarzających się znaków. Przyzwyczajeni do modernistycznej czystości językowej chcielibyśmy protestować, zapobiegać nieporozumieniom. Ale to już nie te czasy. Po prostu rejestrujemy spontaniczny rozwój żywego języka. Rzadko kiedy możemy na taki rozwój wpływać perswazją czy zarządzeniami.

W latach osiemdziesiątych w nauczaniu matematyki na świecie wydarzyło się znacznie więcej niż w latach sześćdziesiątych, w okresie Nowej Matematyki: Raport Cockcrofta w Anglii, rewolucja mikrokomputerowa, no i stopniowe wchodzenie w ten ogólnokulturowy prąd – postmodernizm. W rezultacie – w krajach, gdzie edukacja jest zdecentralizowana i podlega kontroli władz lokalnych, programy nauczania uwzględniają w dużo większym stopniu te umiejętności, które mają znaczenie w późniejszym życiu wychowanków. Celowo używam słów „mają znaczenie", a nie „są użyteczne". Młodzi ludzie inaczej patrzą na te sprawy niż ich nauczyciele i mają inne skale wartości. Zrzędzimy, ale ulegamy temu. Jest faktem, że w tych krajach, gdzie zainteresowani mają więcej do powiedzenia w sprawie wyboru treści i programów nauczania, matematyka szkolna ma coraz więcej statystyki i rachunku prawdopodobieństwa, mniej aksjomatycznej geometrii w stylu Euklidesa i coraz bardziej przesiąknięta jest informatyką. Informatyką przez małe „i", nie przez duże. Tą wulgarną, użytkową.

W samym końcu lat osiemdziesiątych nastąpiło wydarzenie, które musimy tu odnotować. Wprowadzono w Anglii „The National Curriculum", ogólnonarodowy program nauczania dla szkół. Wydarzenie na pozór niezgodne z duchem czasu. Ale gdy zajrzymy do środka tego „programu", widzimy, że nie jest to taki zwykły program, jak to się u nas rozumie – wypisanie „programowych treści" jedna za drugą i przydzielenie każdej z nich pewnej liczby godzin „na realizację" i pozostawienie kłopotu wykonawcom. Bardzo polecam ten dokument do przeczytania tym wszystkim, którzy dyskutują u nas o programach nauczania matematyki. Nie chcę tu wchodzić w matematyczne szczegóły tego programu. Przede wszystkim zwraca moją uwagę ogromna troska i powaga, z jaką się traktuje uczniów w tym dokumencie. W naszych odpowiednikach tego dokumentu widać przede wszystkim troskę o „wykonanie planu" – niezależnie od tego, co ten plan jest wart.

Postmodernizm nie zawitał jeszcze „pod strzechy" naszych szkół ani do naszych programów szkolnych.

Literatura

H. Bauersfeld, W. Zawadowski, *Metafory i metonimie w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka Matematyki t. 8, 1988, str. 155–186

Charles Jencks, *The Language of Postmodern Architecture*, tł. polskie *Architektura postmodernistyczna*, Arkady, 1987

Donald E. Knuth, *Algorithmic thinking and mathematical thinking*, American Mathematical Monthly, March 1985, 170–181

Anna Zofia Krygowska, *Geometria*, podręczniki dla klas I, II i IV liceum, WSiP, Warszawa, 1967–73

Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976

Krzysztof Mostowski, *Zabawa w 153, przykład dowodu z komputerem*, Matematyka, t. XLI, zeszyt 2, 1988, 96–98

Frederick Papy, *Mathématique Moderne* vol. I,II,III,V,VI, Didier, Bruxelles 1963–66

Eugene Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University*, May 11, 1959. Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13 No. 1 Febr. 1969.