Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Skojarzenia i analogie*, Otwock–Śródborów, styczeń 2012.

W przestrzeni

Zofia MIECHOWICZ, Zielona Góra

Naturalna analogia?

Nie mylił się, z pewnością, Stefan Banach, mówiąc, że dobry matematyk potrafi dostrzegać analogie między twierdzeniami, matematyk wybitny – analogie między teoriami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami. Jeżeli jesteś Czytelniku, matematykiem wybitnym bądź genialnym i analogia, której chcemy poświęcić ten artykuł będzie wydawać Ci się oczywista, bardzo prosimy, żebyś mimo wszystko nie poprzestawał na lekturze tego wstępu. Być może uda nam się przekonać Cię, że ma ona znacznie głębsze konsekwencje, niż to się może na pierwszy rzut oka wydawać.

Analogia między zwykłym zbiorem a przestrzenią liniową wydaje się być naturalna. Zbiór jest ze swej natury obiektem prostszym do badania niż przestrzeń i wiemy o nim więcej. Skoro już dostrzegliśmy więc tę naturalną analogię możemy spróbować pozbierać znane fakty na temat zbiorów i brutalnie zastąpić słowo zbiór słowem przestrzeń, słowo podzbiór słowem podprzestrzeń a słowo moc słowem wymiar. Okazuje się, że w bardzo wielu przypadkach fakty i twierdzenia na temat zbiorów literalnie przekładają się na twierdzenia dotyczące przestrzeni liniowych (choć te drugie są zazwyczaj o wiele trudniejsze do udowodnienia)! Spróbujmy przyjrzeć się bliżej, jak mocno są związane ze sobą te dwa obiekty matematyczne.

Ile tego jest?

Jedno z pierwszych pytań, które zadajemy sobie, kiedy zaczynamy badać strukturę zbiorów brzmi: *Ile jest k-elementowych podzbiorów n-elementowego zbioru?* Już na wczesnym etapie przygody z matematyką dowiadujemy się, że liczba ta wraża się poprzez współczynnik dwumianowy Newtona $\binom{n}{k}$. Jak będzie wyglądało analogiczne pytanie w świecie przestrzeni? Skoro moc zbioru ma być odpowiednikiem wymiaru, załóżmy, że poruszamy się po n-wymiarowej przestrzeni nad skończonym, q-elementowym ciałem F. Pytanie zadane wcześniej będzie teraz brzmiało: *Ile jest k-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni n-wymiarowej?* Możemy liczbę tę oznaczyć roboczo przez $\binom{n}{k}_q$. Podprzestrzeń k-wymiarową jednoznacznie wyznacza k wektorów niezależnych $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Ponieważ poruszamy się po przestrzeni nad ciałem skończonym, to wyznaczenie liczby takich k-tek sprowadza się do prostego przeliczenia.

Wybierzmy najpierw wektor v_1. Jedyne, o co musimy się zatroszczyć, to żeby był on różny od wektora zerowego. Ze wszystkich q^n wektorów, które są dostępne musimy wykluczyć tylko ten jeden. Mamy więc:

$$v_1 \xrightarrow{\text{możemy wybrać na sposobów}} q^n - 1$$

Na wektor v_2 mamy już odrobinę mniej kandydatów. Nie może on należeć do podprzestrzeni rozpinanej przez wektor v_1. Elementów tej podprzestrzeni jest tyle, na ile sposobów możemy pomnożyć ten wektor przez element ciała F, więc:

$$v_2 \xrightarrow{\text{możemy wybrać na sposobów}} q^n - q$$

Wektor v_3 z kolei nie może należeć do podprzestrzeni rozpiętej przez oba wcześniej wybrane. Wykluczamy więc dokładnie q^2 wektorów.

$$v_3 \xrightarrow{\text{możemy wybrać na sposobów}} q^n - q^2$$

Kiedy wybraliśmy już l wektorów, kolejny po prostu nie może być kombinacją liniową poprzednich, w związku z czym mamy już tylko $q^n - q^l$ możliwości.

$$v_{l+1} \xrightarrow{\text{możemy wybrać na sposobów}} q^n - q^l$$

Różnych k-tek wektorów niezależnych mamy więc:

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\dots(q^n - q^{k-1})$$

Oczywiście część z nich generuje te same podprzestrzenie. Każdą podprzestrzeń wymiaru k możemy uzyskać na tyle sposobów, ile różnych k-tek wektorów niezależnych w niej znajdziemy, a wiemy dokładnie ile jest takich k-tek (przed chwilą właśnie to policzyliśmy!):

$$(q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2)\dots(q^k - q^{k-1})$$

Zliczając różne zbiory wektorów niezależnych, każdą podprzestrzeń dostaliśmy dokładnie tyle razy. Ostatecznie szukana przez nas liczba k-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni n-wymiarowej wyraża się następująco:

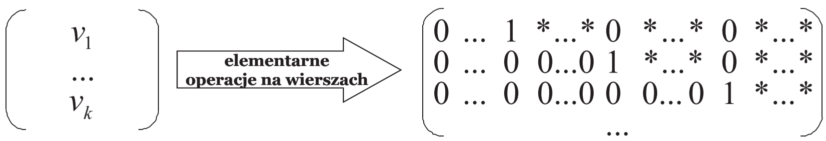
$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)\dots(q^k - q^{k-1})}.$$

Wzór ten nie jest nowy, a dobór oznaczenia nie jest przypadkowy. Formuła ta nazywana jest współczynnikiem dwumianowym Gaussa, a pierwszy raz została użyta przez tego słynnego matematyka do znalezienia wzoru na tak zwane sumy Gaussa. Ale czy ma ona, oprócz nazwy, jakiś bliższy związek ze współczynnikiem dwumianowym Newtona? Przyjrzyjmy się bliżej. Jeżeli potraktujemy $\binom{n}{k}_q$ jak funkcję zmiennej rzeczywistej q i zaczniemy ją badać, bardzo szybko, stosując chociażby regułę de l'Hospitala, odkryjemy, że

$$\lim_{q \to 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}.$$

Widzimy więc wyraźnie, że coś jest na rzeczy. Tylko, po analitycznym podejściu do sprawy trudno nam powiedzieć coś oprócz tego, że zależność (której z resztą się spodziewaliśmy) istnieje. A gdybyśmy chcieli poczuć jej istotę? Zrozumieć charakter? Musimy się wtedy udać po pomoc do Donalda Knutha, który podszedł do sprawy z zupełnie innej strony.

Spróbujmy jeszcze raz zliczyć podprzestrzenie wymiaru k, tym razem innym sposobem. Po pierwsze umieśćmy wektory $v_1, \dots, v_k$ w macierzy, jako jej wiersze. Taką macierz możemy, poprzez elementarne operacje na wierszach, sprowadzić do tak zwanej zredukowanej postaci schodkowej (rysunek 1).



Rysunek 1: Zredukowana postać schodkowa

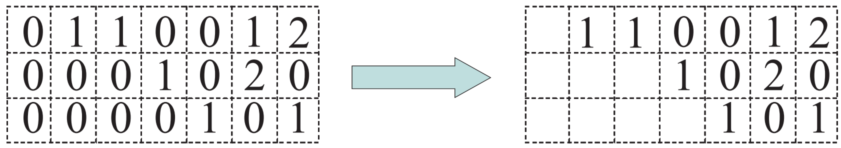
Zredukowana postać schodkowa ma następujące cechy charakterystyczne:

• pierwszy niezerowy element od lewej w każdym wierszu to 1 (będziemy nazywać ją wiodącą)

• wszystkie pozostałe elementy w kolumnie, w której jest jedynka wiodąca to zera

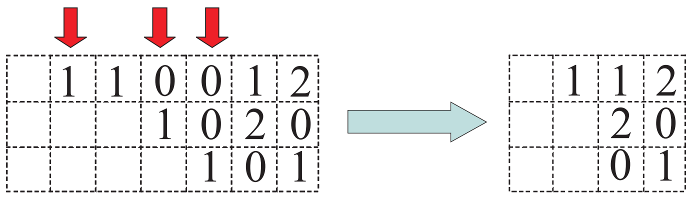
• w każdym wierszu jedynka wiodąca pojawia się na prawo od jedynki wiodącej w poprzednim wierszu

Możemy przyjąć, że jeżeli wiersze dwóch takich macierzy generują tę samą przestrzeń, to macierze te są sobie równe. Zliczenie wszystkich interesujących nas podprzestrzeni sprowadza się więc do policzenia, ile jest różnych zredukowanych macierzy schodkowych. Żeby to policzyć, spróbujmy usunąć z takiej macierzy wszystko, co zbędne. Z pewnością zbędne są wszystkie zera, na lewo od jedynek wiodących. Możemy je więc bezkarnie usunąć (rysunek 2).



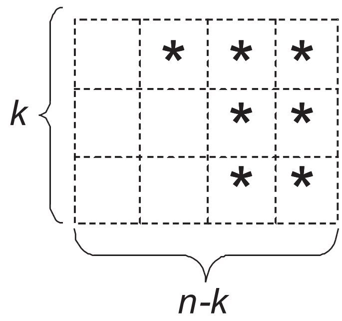
Rysunek 2: Usunięcie elementów zerowych na lewo od jedynek wiodących

Kolumny zawierające wiodące jedynki również nie będą miały dla nas znaczenia. Pozbądźmy się więc ich brutalnie (rysunek 3).



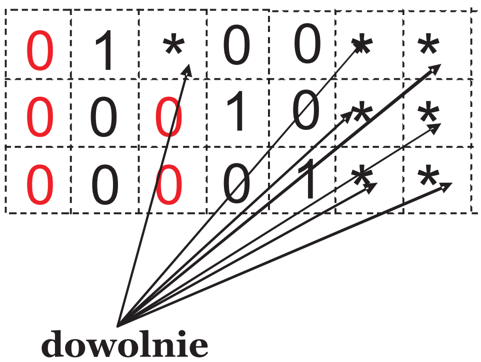
Rysunek 3: Usunięcie kolumn zawierających jedynki wiodące

Została nam w tej chwili macierz zawierająca puste pola, oraz pewne liczby. Tak naprawdę nie interesuje nas jakie to są liczby. Możemy więc każdą liczbę zastąpić gwiazdką.



Rysunek 4: Diagram λ

Otrzymaliśmy pewien diagram o wymiarach k na $n-k$ (rysunek 4). Oznaczmy pojedynczy diagram przez λ, a liczbę gwiazdek w nim, przez $|\lambda|$ i spróbujmy ten proces odwrócić. Kolumny z jedynkami wiodącymi wstawiamy w sposób jednoznaczny. Tak samo możliwości manewru nie mamy, przy umieszczaniu zer po ich lewej stronie. Natomiast gwiazdki możemy zastąpić elementami ciała F na wszystkie możliwe sposoby, których jest dokładnie $q^{|\lambda|}$ (rysunek 5).

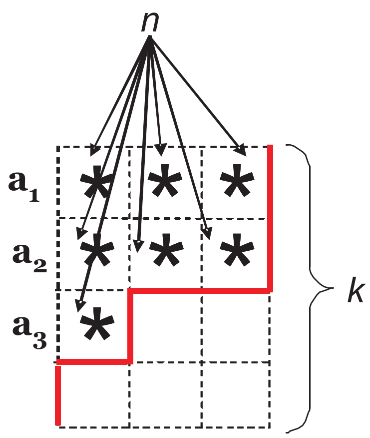


Rysunek 5: Powrót do macierzy

I tak oto dochodzimy do wniosku, że różnych zredukowanych macierzy schodkowych, a więc również podprzestrzeni k-wymiarowych przestrzeni n-wymiarowej jest:

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{\lambda \subset k \times n-k} q^{|\lambda|}$$

Pozostało nam jeszcze tylko policzyć ile jest różnych diagramów o λ gwiazdkach. Jeżeli przyjrzymy się dokładnie pojedynczemu diagramowi (i wykonamy obrót o $90°$), to zobaczymy, że w istocie jest to to samo co tak zwany diagram Ferrersa. Obiekty te są znane matematykom od dawna i dokładnie zbadane. Diagramy Ferrersa reprezentują podziały liczby naturalnej n na k składników $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ (przy czym liczby a_i są nierozróżnialne) i służą do wyznaczania liczby takich podziałów (rysunek 6).



Rysunek 6: Diagram Ferrersa dla $n = 7$

Ile jest takich diagramów, policzyć jest łatwo. Możemy diagram utożsamić z linią łamaną stanowiącą jego prawostronny obrys (rysunek 6). Żeby dostać taką linię, z n kresek, które musimy postawić musimy wybrać dokładnie k kresek poziomych, możemy więc to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Skoro już potrafimy policzyć ile jest różnych diagramów o mocy λ, to możemy śmiało przejść, do interesującej nas granicy.

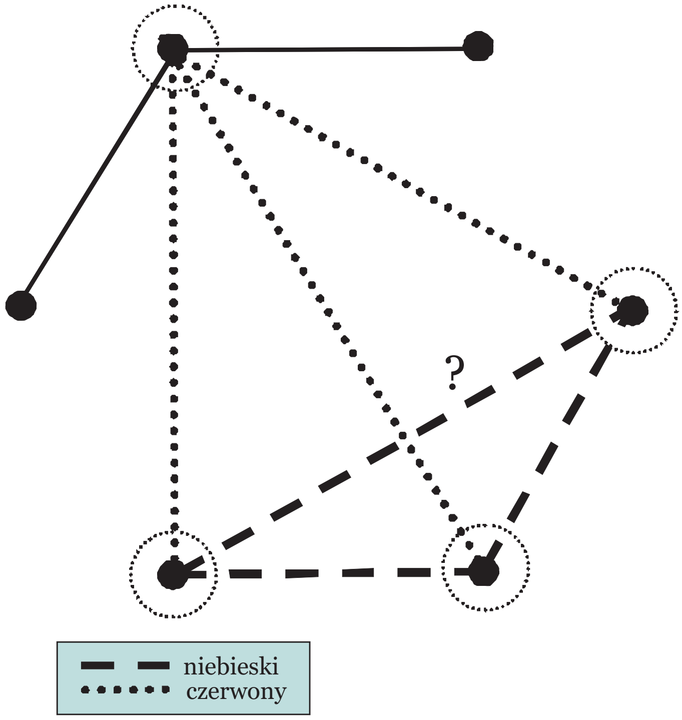
$$\lim_{q\to 1} \binom{n}{k}_q = \lim_{q\to 1} \sum_{\lambda \subset k \times n-k} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \subset k \times n-k} 1 = \binom{n}{k}$$

Ramsey w przestrzeni

Każdy, kto pragnie zgłębiać tajemnice matematyki, kiedy już przebrnie przez pierwsze kombinatoryczne kursy, natknie się z pewnością na doniosłe twierdzenie Ramseya. Żeby je dobrze zrozumieć zacznijmy od prostej obserwacji.

Obserwacja 1. *Kolorując dowolnie dwoma kolorami krawędzie grafu pełnego K_6 zawsze znajdziemy jednokolorową indukowaną klikę K_3.*

Dowód. Przyjmijmy, że kolory, których używamy, to czerwony i niebieski. Popatrzmy na dowolny wierzchołek kliki K_6. Ponieważ wychodzi z niego dokładnie 5 krawędzi, co najmniej 3 z nich muszą otrzymać ten sam kolor (powiedzmy czerwony). Ponieważ wszystkie te krawędzie są czerwone, więc ich końce nie mogą być połączone krawędzią w tym kolorze, gdyż otrzymalibyśmy czerwony trójkąt. Skoro tak, trzy wierzchołki na drugich końcach czerwonych krawędzi muszą być połączone krawędziami w kolorze niebieskim, co daje nam trójkąt niebieski (rysunek 7).



Rysunek 7: Kawałek grafu K_6 i częściowe kolorowanie

Z drugiej strony wiemy, że krawędzie kliki K_5 możemy pokolorować dwoma kolorami tak, żeby nie otrzymać jednobarwnego trójkąta (możesz to, Czytelniku, potraktować jako proste ćwiczenie). Widzimy więc, że 6 jest najmniejszą taką liczbą, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na tyluż wierzchołkach otrzymamy monochromatyczny trójkąt. Stąd już bardzo blisko do twierdzenia Ramseya.

Twierdzenie 1. *Dla każdego k istnieje taka liczba n, że przy dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego K_n znajdziemy jednokolorową indukowaną klikę K_k.*

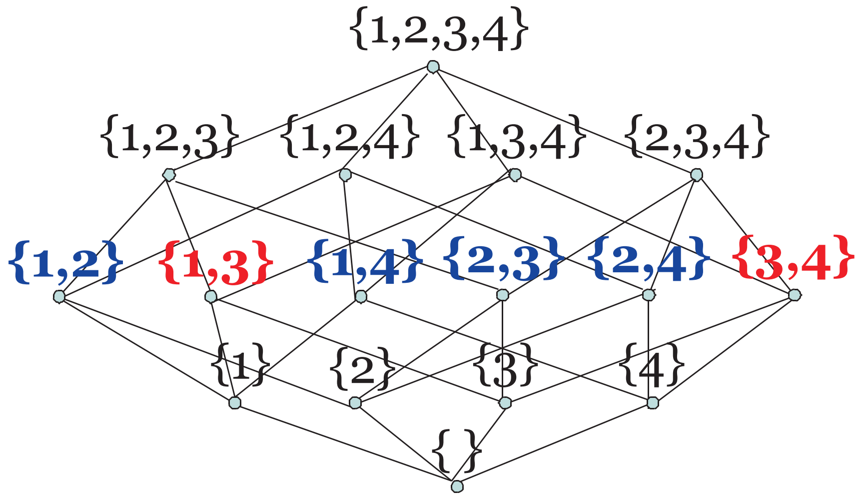
Najmniejsze takie n oznaczamy przez $R(k)$ i nazywamy k-tą liczbą Ramseya. Wbrew temu, co może się wydawać po prześledzeniu wcześniejszego, prostego przykładu znajdowanie liczb Ramseya nie jest wcale proste. Do tej pory matematykom udało się wyznaczyć dokładne wartości jedynie dla trzech pierwszych.

- $R(2) = 4$
- $R(3) = 6$
- $R(4) = 18$

Problem pojawia się już przy $R(5)$. Potrafimy obecnie jedynie podać wąski przedział, w którym się ona znajduje ($43 \leqslant R(5) \leqslant 49$) i nie zanosi się na to, żeby w najbliższym czasie ten stan rzeczy miał ulec zmianie. Tym co nas interesuje nie jest jednak samo twierdzenie Ramseya, a przeniesienie go w przestrzeń (zgodnie z obietnicą jak najbardziej dosłowne). żeby to zrobić musimy jednak twierdzenie przeformułować z języka grafów, na język zbiorów.

Twierdzenie 2. *Dla każdej liczby naturalnej s istnieje taka liczba naturalna $n = R(s)$, że dla dowolnego dwukolorowania dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ istnieje s-elementowy podzbiór $\{1, \ldots, n\}$, którego wszystkie dwuelementowe podzbiory są w tym samym kolorze.*

Tym razem zamiast krawędzi grafu kolorujemy dwuelementowe podzbiory kraty podzbiorów zbioru n-elementowego (rysunek 8).



Rysunek 8: Krata podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$

Amerykański matematyk włoskiego pochodzenia Gian-Carlo Rota wyraził przypuszczenie, że twierdzenie to pozostanie prawdziwe, jeżeli kratę podzbiorów zastąpimy przez kratę podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Twierdzenie przyjmie wtedy postać:

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych liczb naturalnych s, t, k istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnego k-kolorowania t-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni n-wymiarowej znajdziemy s-wymiarową przestrzeń, której wszystkie t-wymiarowe podprzestrzenie są jednobarwne.*

W 1971 roku twierdzenie to udowodnili Ronald Graham i Bruce Rothschild (za co dostali nagrodę Polyi). Zgodnie z oczekiwaniami, mimo że twierdzenie Ramseya w oryginalnej wersji ma dowód, który bez problemu mogą przyswoić studenci na pierwszych kursach matematyki, twierdzenie w wersji przestrzennej jest dużo trudniejsze do udowodnienia. Wymaga zaawansowanego aparatu matematycznego, natomiast liczby Ramsey'a-Grahama (odpowiedniki liczb Ramsey'a) są praktycznie niemożliwe do wyznaczenia. Dość powiedzieć, że najlepsze w tej chwili znane oszacowanie najmniejszej z nich jest dane przez Liczbę Grahama, która została oficjalnie wpisana do księgi rekordów Guinnessa jako największa liczba na świecie.

Mnożąc przykłady

Z pewnością każdy matematyk, niezależnie od specyfiki dziedziny jaką się zajmuje, natknął się na tego typu przykłady. Twierdzenia i fakty, które zupełnie dosłownie przenoszą się ze świata zbiorów w świat przestrzeni. Gdybyśmy chcieli szukać przyczyn takiego zachowania, prawdopodobnie winą za te fakty obarczymy kratową strukturę obu obiektów. Gdyby ktoś jednak nie chciał poprzestawać na spekulacjach i miał ochotę poznać dogłębnie istotę tego zjawiska, to pozostał jeszcze cały szereg podobnych twierdzeń do udowodnienia w przestrzeni (dla przykładu, hipoteza wymienionego wcześniej Gian Carlo Roty o bazach). O ile nie przeraża Cię, Czytelniku, domniemana skala trudności problemów w przestrzeni, zachęcamy do badań i poszukiwań.