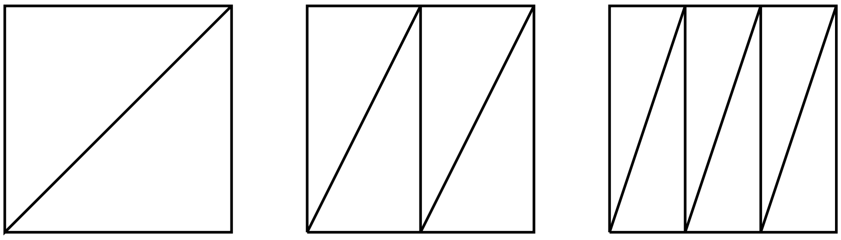
Czy kwadrat da się podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach?

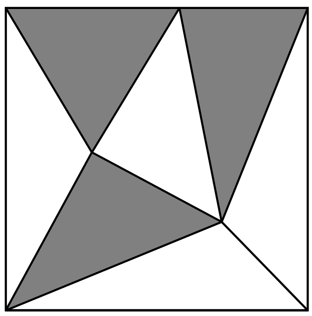
Michał KIEZA, Warszawa

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym podczas wykładów otwartych *Ars Mathematica* organizowanych przez Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, 15 marca 2012.

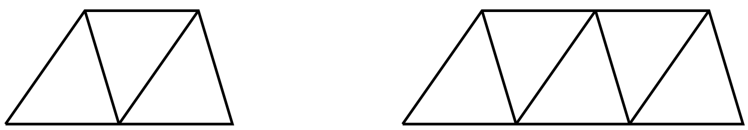
Na ile trójkątów o równych polach można podzielić kwadrat? Łatwo zauważyć, że można go podzielić na 2, 4, 6, …, a także na dowolną parzystą liczbę takich trójkątów.



Co jednak, gdybyśmy chcieli podzielić dany kwadrat na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach? Garść eksperymentów prowadzi do wniosku, że nie da się go podzielić na 3 takie trójkąty. Podobnie jest dla 5. Co jednak z większymi liczbami nieparzystymi? Czy istnieją takie nieparzyste liczby n, że kwadrat da się podzielić na n trójkątów o równych polach? Na rysunku mamy podział kwadratu na 7 trójkątów, których pola są niemal równe – czy dla większych liczb dałoby się zrealizować równość? Wydaje się, że jeśli ta liczba jest odpowiednio duża, to także i stopień swobody jest ogromny…



Z drugiej strony, istnieją czworokąty, które można podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach. Przykładowo, trapez o stosunku podstaw $2:1$ da się podzielić na 3 trójkąty o równych polach. Podobnie, trapez o stosunku podstaw $3:2$ da się podzielić na 5 trójkątów o równych polach, zaś trapez o stosunku podstaw $(n+1):n$ da się podzielić na $2n+1$ trójkątów o równych polach.



Już Euklides mógł zastanawiać się nad tym problemem…

Tytułowe pytanie mogło zostać zadane już w starożytności – wydaje się to typowe pytanie z klasycznej geometrii… To pytanie może zadać także nawet uczeń podstawówki. A jednak, gdy w latach 60-tych ubiegłego wieku Fred Richman i John Thomas podzielili się tym pytaniem z innymi matematykami, byli zaskoczeni, że nikt nie tylko nie zna odpowiedzi, ale także nie potrafi podać miejsca, gdzie ten problem byłby dyskutowany…

W 1970 roku w czasopiśmie *American Mathematical Monthly* pojawia się rozwiązanie, które znalazł Paul Monsky – *On dividing a square into triangles*, American Mathematical Monthly 77 (1970), 161-164.

Odpowiedź: Nie.

Dowód Monsky'ego jest niezwykły, bowiem używa kilku rzeczy z różnych (pozornie zupełnie niezwiązanych z tym zagadnieniem) działów matematyki. Co więcej, jest to jedyny znany dowód! W dalszej części artykułu przedstawimy jego rozumowanie. Najpierw jednak wprowadzimy na scenę dwa narzędzia, które będą nam potrzebne do dowodu.

Narzędzia

Będziemy potrzebowali dwóch rzeczy:

1. próba uogólnienia pojęcia parzystości na liczby rzeczywiste,
2. pewien fakt związany z kolorowaniem grafów.

Motywacja:

Ad 1. Chcemy pokazać, że jeśli kwadrat da się podzielić na trójkąty o równych polach, to ich liczba jest parzysta – podzielność przez 2 musi grać jakąś rolę. Z drugiej strony istnieją czworokąty, które da się podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach, więc być może ważne znaczenie ma jakaś zależność między liczbami będącymi współrzędnymi wierzchołków tego czworokąta a 2.

Ad 2. Podział kwadratu na trójkąty wygląda jak graf – może przydadzą się pewne kombinatoryczne twierdzenia dotyczące grafów (np. związane z kolorowaniem).

Oczywiście nie są to jedyne rzeczy, które można próbować brać pod uwagę w kontekście tego problemu, ale wydaje się jasne, że między innymi te pomysły warto rozważyć...

1. Uogólnienie pojęcia podzielności przez 2 na liczby rzeczywiste

Liczby całkowite dzielimy na liczby nieparzyste, np. 1, 3, 5, oraz liczby parzyste, np. 2, 4, 6. Jednakże wśród tych drugich możemy wprowadzić dalszy podział – ze względu na największą potęgę 2, przez jaką dzielą się te liczby. Chcielibyśmy wówczas powiedzieć, że np. 8 jest „bardziej parzyste" niż 2, zaś liczbą najbardziej parzystą jest 0. Natomiast ułamki takie jak np. $\frac{1}{2}$ czy $\frac{1}{4}$ powinny być „mniej parzyste" niż 1 czy 3. Tabelka poniżej graficznie oddaje przyjętą hierarchię.

$\dots$

$\frac{1}{4}, \dots$

$\frac{1}{2}, \dots$

$1, 3, 5, \frac{3}{7}, \dots$

$2, 6, 10, \dots$

$4, 12, \dots$

$8, \dots$

$\dots$

$1024, \dots$

$\dots$

0

Tę dość mętną intuicję możemy sprecyzować definiując dla dowolnej liczby wymiernej $w = 2^s \cdot \frac{m}{n}$ (gdzie s jest całkowite, zaś m i n są całkowite nieparzyste) funkcję $f(w) = 2^{-s}$ oraz $f(0) = 0$.

Zauważmy teraz, że dla liczb całkowitych nieparzystych f jest równa 1, zaś dla liczb parzystych n mamy $f(n) \leqslant \frac{1}{2}$. Co więcej, im bardziej dana liczba jest parzysta (tzn. im większa potęga 2 ją dzieli), tym mniejsza wartość f i tym niżej dana liczba występuje w danej tabelce.

Tak zdefiniowana funkcja dla dowolnych liczb wymiernych x, y spełnia następujące zależności

1. $f(x) \geqslant 0$ oraz $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $f(2) = \frac{1}{2}$,
3. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,
4. $f(x + y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$.

Na odwrót, jeśli założymy, że funkcja f spełnia powyższe własności, to nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej liczby wymiernej w mamy $f(w) = 2^{-s}$.

Ponieważ potrzebujemy odpowiednika podzielności przez 2 dla dowolnej liczby rzeczywistej, to nasuwa się pytanie, czy można znaleźć funkcję określoną na wszystkich liczbach rzeczywistych i spełniającą powyższe cztery warunki.

Zauważmy, że korzystając z danych warunków łatwo wyznaczyć wartości f dla niektórych szczególnych liczb, np. dla $\sqrt{2}$. Istotnie, mamy

$$f\left(\sqrt{2}\right) \cdot f\left(\sqrt{2}\right) = f(2) = \frac{1}{2},$$

skąd na mocy dodaniości funkcji f otrzymujemy $f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. W ten sam sposób możemy wyznaczyć wartości funkcji dla pierwiastków z innych liczb wymiernych, np. $f\left(\sqrt{3}\right) = 1$. No dobrze, a co jeśli chcielibyśmy znaleźć wartość funkcji f dla liczby, która nie spełnia takiej prostej równości algebraicznej? Przykładowo, ile wynosi $f(\pi)$? Tego nie potrafimy powiedzieć. Jednakże można udowodnić, że istnieje funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych i spełniająca wyżej wymienione cztery warunki.

Tu poczyńmy krótką dygresję. Funkcja f, którą znaleźliśmy poszukując odpowiednika podzielności przez 2 dla liczb rzeczywistych, jest dobrze znana w matematyce. Jest to norma (albo waluacja) 2-adyczna. Ogólniej rozważa się normy p-adyczne, gdzie p jest liczbą pierwszą – wówczas w drugim warunku definiujemy $f(p) = \frac{1}{p}$. Norma p-adyczna i tzw. liczby p-adyczne (o których nie będziemy tutaj wspominać) odegrały ważną rolę m.in. w teorii liczb.

Wróćmy do samej funkcji f. Okazuje się, że posiada ona dodatkowo dwie bardzo przydatne własności:

5. dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy $f(x) = f(-x)$,
6. dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $f(x) > f(y)$ spełniona jest równość $f(x + y) = f(x)$.

Dowód własności 5. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy

$$f(-x) \cdot f(-x) = f(x^2) = f(x) \cdot f(x),$$

skąd $f(-x) = f(x)$ albo $f(-x) = -f(x)$. Jednakże funkcja f przyjmuje jedynie wartości nieujemne, skąd wniosek, że $f(x) = f(-x)$.

Dowód własności 6. Na mocy własności 4 możemy napisać

$$f(x + y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} = f(x). \tag{1}$$

Wykorzystując ponownie własność 4 oraz poprzednio udowodnioną własność 5 dostajemy

$$f(x) = f((x + y) + (-y)) \leqslant \max\{f(x + y), f(-y)\} = \max\{f(x + y), f(y)\}. \tag{2}$$

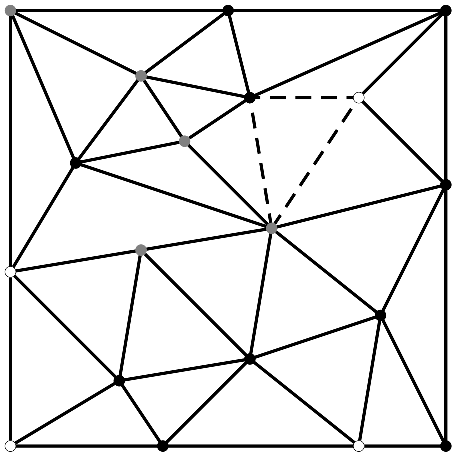
Gdyby zachodziła nierówność $f(x + y) \leqslant f(y)$, to powyższe oszacowanie daje $f(x) \leqslant f(y)$ – sprzeczność z założeniem. W takim razie musi zachodzić nierówność $f(x + y) > f(y)$ i zależność (2) daje $f(x) \leqslant f(x + y)$. To w połączeniu z nierównością (1) oznacza, że $f(x) = f(x + y)$.

2. Kombinatoryczne własności kolorowania grafów (lemat Spernera)

Drugim narzędziem, którego będziemy potrzebowali, będzie prosty i dość interesujący wynik z teorii grafów odkryty przez Emanuela Spernera (używa się go do dowodu twierdzenia Brouwera o punkcie stałym). Będzie on nam potrzebny w nieco zmodyfikowanej wersji – mianowicie dla kwadratu (zazwyczaj podaje się wersję dla trójkąta).

Lemat 1. *Dany jest kwadrat $ABCD$, przy czym wierzchołek A jest biały, B i C są czarne, a D jest szary. Załóżmy, że kwadrat ten podzielono na trójkąty i każdy z wierzchołków tych trójkątów pomalowano na te trzy kolory w ten sposób, że na jednej prostej nie leżą wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Wtedy istnieje trójkąt różnokolorowy.*

Zauważmy, że w opisanej konfiguracji wierzchołki niektórych trójkątów mogą leżeć zarówno na brzegu kwadratu jak i innych trójkątów podziału (nie wymagamy więc od danego podziału, aby był on triangulacją).



Dowód. Boki trójkątów podziału są podzielone przez wierzchołki różnych trójkątów na odcinki. Będą nas interesować odcinki (niezawierające wewnątrz wierzchołków innych trójkątów), których jeden koniec jest czarny, a drugi szary – nazwijmy je odcinkami C-S.

Odnotujmy najpierw, że na odcinku, którego jeden koniec jest biały, nie ma odcinków C-S. Na odcinku, którego oba końce są czarne albo oba szare, jest parzysta liczba odcinków C-S. Na odcinku, którego jeden koniec jest czarny, zaś drugi szary, jest nieparzysta liczba odcinków C-S.

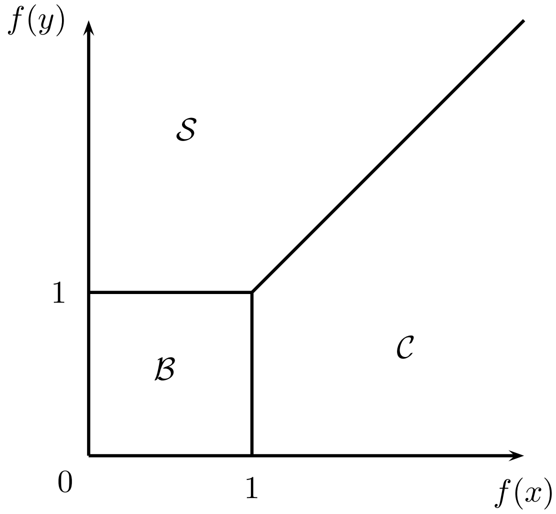
Zauważmy teraz, że na obwodzie trójkąta, którego wierzchołki nie są różnokolorowe, leży parzysta liczba odcinków C-S. Jeśli więc żaden trójkąt podziału nie ma różnokolorowych wierzchołków, to sumując liczby takich odcinków na obwodach tych trójkątów, otrzymamy liczbę parzystą. Zauważmy, że przy tym sumowaniu każdy odcinek C-S, który nie leży na obwodzie kwadratu, był liczony dwukrotnie, a każdy z obwodu – jednokrotnie. Wynika stąd, że liczba tego typu odcinków, leżących na obwodzie kwadratu, jest parzysta. Jest to jednak niemożliwe, bo na boku kwadratu o końcach czarnych leży parzysta ich liczba, na bokach o jednym końcu białym w ogóle ich nie ma, a na boku o jednym końcu czarnym, a drugim szarym jest ich nieparzysta liczba. Uzyskana sprzeczność oznacza, że przy założeniach lematu istnieje trójkąt, którego wszystkie wierzchołki są różnych kolorów.

Przygotowywujemy rekwizyty

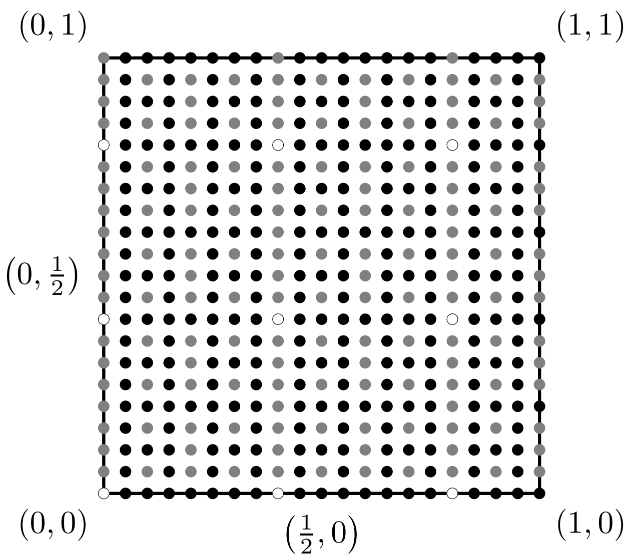
Mamy już zatem przygotowane dwa obiecane narzędzia, jednak na pierwszy rzut oka są one zupełnie ze sobą niezwiązane i dotyczą zupełnie różnych działów matematyki (pierwsze jest algebraiczno-analityczne, drugie zaś kombinatoryczne). Teraz spróbujemy je połączyć. Podzielmy płaszczyznę na trzy rozłączne zbiory

$$\mathcal{B} = \{(x, y) : f(x) < 1,\ f(y) < 1\},$$
$$\mathcal{C} = \{(x, y) : f(x) \geqslant 1,\ f(x) \geqslant f(y)\},$$
$$\mathcal{S} = \{(x, y) : f(y) \geqslant 1,\ f(x) < f(y)\}.$$

Pomalujmy punkty pierwszego zbioru na biało, drugiego na czarno, a trzeciego na szaro. Jeśli na osiach współrzędnych zamiast x i y będziemy brali $f(x)$ i $f(y)$, to powyższe pokolorowanie wyglądałoby następująco:



W rzeczywistości jednak (tzn. gdy na osiach współrzędnych są x i y) nasze pokolorowanie wygląda inaczej – na pierwszy rzut oka dość chaotycznie.



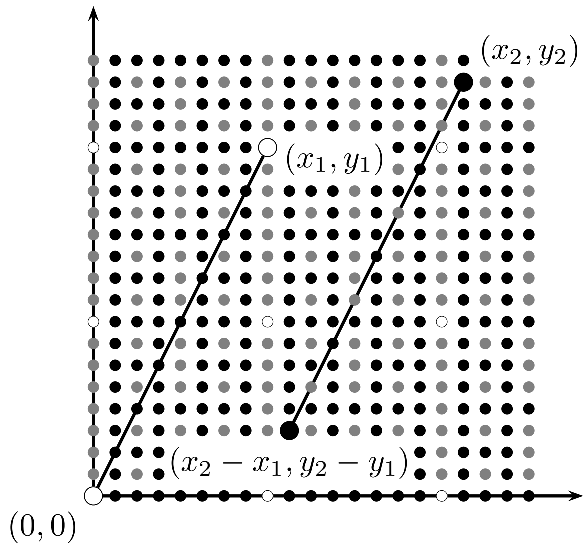
Okazuje się jednak, że takie dość dziwne pokolorowanie płaszczyzny posiada pewne ciekawe własności, które okazują się bardzo przydatne.

Lemat 2. *Jeśli* $(x_1,\, y_1)$ *jest punktem białym, a* $(x_2,\, y_2)$ *– czarnym (szarym), to* $(x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$ *jest punktem czarnym (szarym).*

Dowód. Istotnie, gdy $(x_2,\, y_2)$ jest punktem czarnym, to $f(x_2 - x_1) = f(x_2) \geqslant 1$. Ponieważ $f(x_2) \geqslant f(y_2)$, to

$$f(x_2 - x_1) = f(x_2) \geqslant \max(f(y_2),\, f(y_1)) \geqslant f(y_2 - y_1).$$

Zatem punkt $(x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$ też jest czarny. Dowód dla punktu szarego jest podobny.

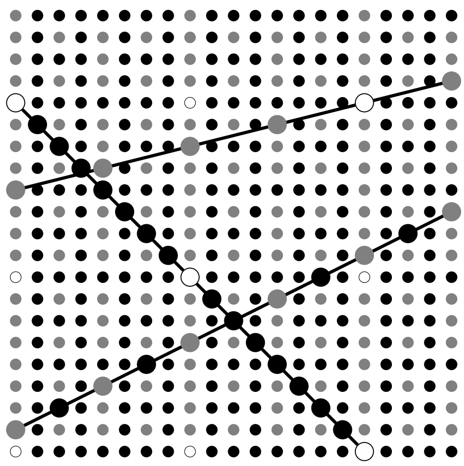


Lemat 3. *Na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest inaczej. Przesuwając prostą, na której leżą punkty wszystkich trzech kolorów, równolegle w ten sposób, by punkt biały przeszedł na (0, 0) i korzystając z poprzedniego lematu, możemy założyć, że punkt szary $(x_1,\, y_1)$ i czarny $(x_2,\, y_2)$ leżą na prostej przechodzącej przed punkt (0, 0). Istnieje więc liczba λ taka, że $x_1 = \lambda x_2$ i $y_1 = \lambda y_2$. Zatem

$$f(x_1) = f(\lambda)f(x_2) \quad \text{i} \quad f(y_1) = f(\lambda)f(y_2).$$

Ponieważ punkt $(x_1,\, y_1)$ jest szary, to $f(x_1) < f(y_1)$. Stąd i z tego, że $\lambda \neq 0$ wnosimy, że $f(x_2) < f(y_2)$. Jednażе punkt $(x_2,\, y_2)$ jest czarny, a więc $f(x_2) \geqslant f(y_2)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi fałszywości uczynionego przypuszczenia i kończy dowód lematu.



Właściwe rozumowanie

Mając już wszystkie potrzebne rekwizyty możemy przejść do finału, czyli dowodu, że jeśli kwadrat podzielimy na n trójkątów o równych polach, to n jest parzyste.

Można oczywiście założyć, że wierzchołki kwadratu znajdują się w punktach (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1). Załóżmy teraz, że kwadrat ten jest podzielony na n trójkątów o równych polach i pokolorujmy wierzchołki wszystkich trójkątów na biało, szaro i czarno zgodnie z wcześniej przyjętymi regułami.

Wierzchołek (0, 0) jest biały, $(0,1)$ – szary, a pozostałe dwa zaś czarne. Ponadto z lematu 3 wnosimy, że na żadnej prostej nie ma punktów trzech różnych kolorów. Zatem założenia lematu 1 są spełnione i w związku z tym istnieje trójkąt, który ma różnokolorowe wierzchołki.

Przesuńmy ten trójkąt równolegle tak, by wierzchołek biały przeszedł na (0, 0). Z lematu 2 wynika, że pozostałe wierzchołki nie zmienią kolorów. Załóżmy, że po przesunięciu wierzchołkiem szarym jest (x_1, y_1), a czarnym – (x_2, y_2). Pole trójkąta o wierzchołkach (0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest równe

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|.$$

Ponieważ $f(x_1) < f(y_1)$ i $f(x_2) \geqslant f(y_2)$, to $f(x_1y_2) < f(x_2y_1)$, zatem

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(x_2) \cdot f(y_1) \geqslant 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2,$$

skąd $f(n) \leqslant \frac{1}{2}$. To oznacza, że n musi być parzyste.

Co dalej?

Można zadać pytanie, jak ma się sytuacja dla dowolnego czworokąta. Ponieważ przekształcenie afiniczne nie wpływa na problem, to można założyć, że trzy wierzchołki danego czworokąta to (0, 0), (1, 0) i (0, 1), a więc ich kolory to odpowiednio biały, czarny i szary. Jeśli teraz czwarty wierzchołek jest czarny albo szary, to założenia lematu 1 są spełnione i istnieje trójkąt różnokolorowy. W tego typu przypadkach możemy użyć normy p-adycznej (dla dowolnej liczby pierwszej p!) i przeprowadzić analogiczne rozumowanie, jak dla kwadratu. Przykładowo rozważając trapez o stosunku podstaw 2 : 1 i biorąc normę 3-adyczną udowodnimy, że jeśli podzielimy go na trójkąty o równych polach, to ich liczba będzie wielokrotnością 3. Co jednak zrobić w przypadku, gdy czwarty wierzchołek jest biały?