Klein, nieskończoność i roznegliżowane elektrony

Marek KORDOS, Warszawa

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Skojarzenia i analogie*, Otwock–Śródborów, styczeń 2012.

Punktem wyjścia będzie praca Felixa Kleina *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, czyli *Rozważania porównawcze nad najnowszymi badaniami geometrycznymi*, a więc **prawdziwy** program erlangeński. Jest on próbą odpowiedzenia na pytanie, co w matematyce jest odmienne, a co takie same, choć inaczej zakodowane.

Słowo „prawdziwy" bierze się stąd, że rozpowszechniony jest pogląd, iż chodziło w nim o kratę teorii jednej przestrzeni z różnymi grupami

$$(P, G_i) \prec (P, G_j) \Leftrightarrow G_i \subset G_j.$$

Taką zawężoną interpretację programu erlangeńskiego przekazano mi na studiach. Prawdziwy poznałem w 1972 roku, kiedy niemieccy matematycy wydali z pietyzmem fotokopię oryginału, i – dla uczczenia stulecia jego ogłoszenia – rozesłali kolegom; widać byłem kolegą, bo dostałem.

Kleinowi jednak chodziło o maksymalne uogólnienie pojęcia izomorfizmu i homomorfizmu, a w szczególności o uwolnienie się od brania pod uwagę charakteru indywiduów, których teoria dotyczy. Można więc powiedzieć, że mierzył w teorię kategorii.

Warto zwrócić uwagę na inspiracje, jakie skierowały badania Kleina w tym kierunku. Pierwszą z nich stanowiła publikacja Ludwiga Ottona Hessego *Übertragunsprinzip*, czyli *Ogólna zasada przeniesienia.* Hesse zauważa, że geometria rzutowa prostej (a więc ciało z grupą homografii wziętych z dokładnością do proporcjonalności) – za pomocą rzutu stereograficznego – może być przeniesiona na stożkową, a to z kolei – przez rozszerzenie na całą płaszczyznę rzutową – daje na niej strukturę modelu Kleina geometrii hiperbolicznej. Wnioskuje stąd, że geometria rzutowa prostej, geometria rzutowa stożkowej i geometria płaszczyzny hiperbolicznej (inaczej: płaszczyzny Bolyaia-Łobaczewskiego) to jedna i ta sama geometria, tylko sformalizowana na trzy różne sposoby.

Drugą inspirację stanowiła monografia nauczyciela Kleina, Juliusa Plückera *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, czyli *Nowa geometria przestrzeni powstała przez przyjęcie prostych za jej elementy.* Plücker pokazuje, że przestrzeń, traktowana jako zbiór prostych, jest rozmaitością czterowymiarową – upraszczając: prawie każdą prostą można potraktować jako przecięcie dwóch płaszczyzn, $z = ax + by$ i $z = cx + dy$, a zatem (a, b, c, d) można uważać za jej współrzędne. Ale można też zobaczyć to jako rozmaitość sześciowymiarową. Mianowicie, prostej (w tej czterowymiarowej przestrzeni, gdzie punktami są „zwykłe" proste), przechodzącej przez punkt (byłą prostą) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i punkt $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, można przyporządkować liczby

Z tą pracą związki Kleina były znacznie głębsze, gdyż to on – po śmierci Plückera – przygotował ją do druku.

$$p_{ik} := x_i \cdot y_k - x_k \cdot y_i.$$

Jest ich 16, ale istotnych jest tylko 6, bo mamy $p_{ii} = 0$ (co zmniejsza liczbę istotnych do 12) i $p_{ik} = -p_{ki}$ (co daje właśnie 6). Plücker wybrał na współrzędne (nowej) prostej w sześciowymiarowej przestrzeni

$$(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}),$$

dostrzegł jednak, że współrzędne te nie są niezależne, albowiem (co łatwo sprawdzić)

$$p_{12} \cdot p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23} = 0.$$

Zatem faktycznie geometria prostych jest tożsama z geometrią pewnej kwadryki w sześciowymiarowej przestrzeni, a więc jest – jak u Hessego – tożsama z sześciowymiarową geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego.

Jak widać, swoboda w utożsamianiu przestrzeni już i w tej pracy była imponująco duża.

Praca Kleina postawiła przysłowiową kropkę nad i – za matematycznie identyczne uznał on te obiekty, które miały izomorficzne grupy automorfizmów.

Jako przykład entuzjazmu, z jakim spotkało się tak nowatorskie podejście do matematyki (uznane za jedyne właściwe dopiero przez bourbakistów), świadczyć mogą bezpośrednie kontynuacje prac Kleina. Wymienię kilka, których już same tytuły świadczą o wykorzystaniu idei kleinowskich. Zacząć wypada od samego Kleina: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von füften Gerade*, czyli *Wykłady o dwudziestościanie i rozwiązywaniu równań piątego stopnia*. Jeszcze bardziej zaskakujący był tytuł pracy Sophusa Lie: *Über Complexe, inbesonders Linien und Kugelcomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partielle Differentailgleichungen*, czyli *O liczbach zespolonych, a w szczególności prostych i stożkach zespolonych, z ich zastosowaniem w teorii równań różniczkowych cząstkowych*. Wymieńmy jeszcze pracę Edmonda Nicolasa Laguerre'a *Sur la geometrie de la direction*, czyli *O geometrii kierunków*, ze względu na pokrewieństwo z dalszą częścią tego tekstu.

Jak dalece obecnie idea kleinowska jest wszechobecna, świadczyć może fakt, że twierdzenie, za które William Thurston otrzymał Medal Fieldsa (Warszawa, 1983), czyli:

Geometryzowalne jednorodnie rozmaitości 3-wymiarowe to jedynie

$$E^3,\ H^3,\ S^3,\ S^2\times\mathbb{R},\ H^2\times\mathbb{R},\ \widetilde{\mathrm{SL}_2}\mathbb{R},\ \mathrm{Nil},\ \mathrm{Sol};$$

faktycznie opisuje grupy, a ostatnie trzy z nich nie mają nawet innego (w szczególności w klasycznym geometrycznym języku) opisu niż grupowy.

Tyle zakreślenia środowiska, w którym dzieje się niniejsza historia.

Drugie słowo tytułu to „nieskończoność". Przyjęto uważać (zapewne za podróżnikami), że kierunek to coś, co prosta osiąga w nieskończoności, czyli tam, gdzie geometria już nie sięga. Ten literacki opis niesie w sobie jednak intuicję, która będzie podstawą stosowanych tu konstrukcji.

Zacznijmy jednak od samych geometrii. Na rozmaitościach dwuwymiarowych realizuje się tylko trzy jednorodne geometrie, a mianowicie powstałe z geometrii euklidesowej Eucl^2, z geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego BL^2 i z geometrii sferycznej przez podzielenie ich przez jednostajnie nieciągłe podgrupy ich grupy izometrii.

Grupa działająca na przestrzeni metrycznej jest jednostajnie nieciągła, jeżeli w dowolnym jej przekształceniu punkt albo jest stały, albo ma obraz oddalony od niego co najmniej o z góry ustaloną dla całej grupy odległość.

Otrzymuje się odpowiednio 5, ∞ i 2 geometrie (= zmetryzowane rozmaitości).

Ta druga lokalnie sferyczna (obok sfery) to geometria eliptyczna Ell^2, czyli zmetryzowana płaszczyzna rzutowa.

Trzy wyróżnione symbolami geometrie to – patrząc z innej strony – geometrie riemannowskie o krzywiźnie odpowiednio zerowej, ujemnej i dodatniej.

Dalej będziemy zajmowali się nimi, a raczej ich odpowiednikami wyżej wymiarowymi.

Każda z wyróżnionych geometrii zanurza się w sposób naturalny w płaszczyźnie rzutowej: do Eucl^2 trzeba dokleić prostą „w nieskończoności" (w wyższych wymiarach – hiperpłaszczyznę); do BL^2 (czyli modelu Kleina) trzeba dokleić ograniczający okrąg (sferę) i jego (jej) zewnętrze – warto zwrócić uwagę, że owo zewnętrze jest po prostu dualne do modelu Kleina!; a do Ell^2 niczego doklejać nie trzeba – obejmuje ona całą płaszczyznę rzutową (przestrzeń rzutową odpowiedniego wymiaru).

Spostrzeżenia te dotyczą tylko struktury liniowej – a co z metryczną? Bo przecież metryki „kończą się" w klasycznym obszarze owych geometrii. Zauważmy jednak, że struktura metryczna nie musi być dana przez metrykę – może być równie dobrze określona przez jakąś relację, za pomocą której metryka może być zdefiniowana. A wtedy może się zdarzyć, że taka relacja nie będzie miała osobliwości w rodzaju przyjmowania przez metrykę wartości nieskończonych.

Dla przykładu rozpatrzmy przypadek euklidesowy (zauważmy, że równoległość odcinków jest definiowalna przez prostopadłość):
– odcinki równoległe AB i CD, nieleżące na jednej prostej, są przystające wtedy i tylko, gdy albo $ABCD$, albo $ABDC$ jest równoległobokiem;
– odcinki nierównoległe są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy proste prostopadłe do każdego z nich w jego końcach tworzą romb, a więc czworokąt mający prostopadłe przekątne.

Tak się składa, że odpowiednią relacją, definiującą przystawanie w każdej z omawianych geometrii, jest prostopadłość, a ta przedłuża się bez żadnych zmian na całą rzutową płaszczyznę (przestrzeń odpowiedniego wymiaru).

Oczywiście, pojawiają się sytuacje nietypowe. Na przykład, dołączona do płaszczyzny euklidesowej prosta „w nieskończoności" okazuje się *osobliwa*, czyli jest prostopadła do wszystkich prostych, a proste styczne do brzegu modelu Kleina są *izotropowe*, czyli prostopadłe do siebie (w modelu Kleina prostopadłe do danej prostej przechodzą przez jej biegun).

Tak roszerzone geometrie nazywa się geometriami pełnymi. Dalej będziemy rozpatrywali tylko geometrie pełne – nie będziemy przy tym zmieniali ich nazw i dalej będziemy używać nazw przyjętych dla geometrii klasycznych.

Tracąc piękno, ale zyskując na czasie, popatrzmy na to analitycznie:
gdy w $\mathbb{P}^n$ określimy prostopadłość hiperpłaszczyzn
$$a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0$$
i
$$b_0x_0 + b_1x_1 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} + b_nx_n = 0$$
wzorem $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = 0$, otrzymamy Eucl^n,

wzorem $a_0 \cdot b_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = 0$, otrzymamy BL^n,

i wzorem $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_i = 0$, otrzymamy Ell^n

(polecam sprawdzenie dla $n = 2$).

Patrząc geometrycznie, trzy wymienione wyżej dwuwymiarowe pełne geometrie można scharakteryzować za pomocą tabelki

	`R`	$\neg$`R`
`I`		BL^2
$\neg$`I`	Eucl^2	Ell^2

gdzie `R` oznacza *istnieje prostokąt*, a `I` oznacza *istnieje prosta izotropowa nieosobliwa.*

Jak widać, w puste okienko doskonale wpasowuje się dwuwymiarowa czasoprzestrzeń Min^2 z prostopadłością daną wzorem $a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = 0$.

Czwartą z rozpatrywanych dalej pełnych geometrii będzie zatem Min^n z prostopadłością daną wzorem $a_1 \cdot b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i \cdot b_i = 0$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej kierunkom (pełnych!) przestrzeni, czyli brzegom ich klasycznego obszaru.

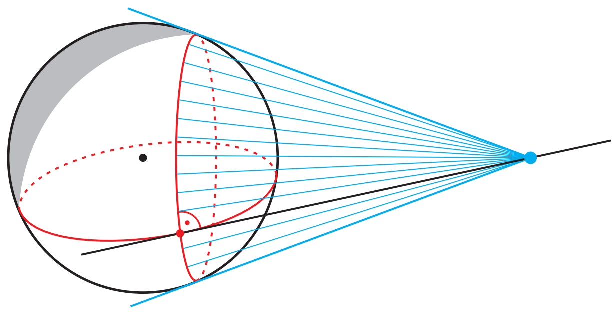
Otóż pełne geometrie generują geometrię o wymiarze niższym o jeden na przestrzeni swoich kierunków w ten sposób, że
• przecięcia hiperpłaszczyzn z przestrzenią kierunków danej geometrii są hiperpłaszczyznami w tej przestrzeni kierunków;
• dziedziczona jest przy tym prostopadłość.

Można bez większego kłopotu udowodnić, że (przy takiej konwencji) również geometria przestrzeni kierunków wyznacza geometrię całej przestrzeni.

Zajmijmy się zależnościami między geometriami przestrzeni a geometriami przestrzeni ich kierunków.

Przestrzeń kierunków Eucl^n to hiperpłaszczyzna $x_0 = 0$. Dla niej wzór $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = 0$ zawiera wszystkie jej współrzędne, jest więc to Ell^{n-1}.

Analogicznie dla hiperpłaszczyzny „w nieskończoności” Min^n wzór $a_1 \cdot b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i \cdot b_i = 0$ zawiera wszystkie współrzędne, więc przestrzenią kierunków Min^n jest BL^{n-1}.



Dla opisu przestrzeni kierunków BL^n spójrzmy najpierw, jak to jest, gdy $n = 3$ i przypomnijmy sobie stereometryczne twierdzenie
dwa okręgi na sferze są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, gdy styczna w punkcie przecięcia do jednego z nich przechodzi przez wierzchołek stożka opisanego na sferze wzdłuż drugiego.

Zatem prostopadłość w trójwymiarowym modelu Kleina generuje na sferze, będącej jego brzegiem, zwykłą, euklidesową prostopadłość.

Specjaliści od funkcji analitycznych sferę z okręgami, których prostopadłość jest euklidesowa, nazywają geometrią Möbiusa – będziemy ją oznaczali $\mathrm{M\ddot{o}}^2$ i, odpowiednio, $\mathrm{M\ddot{o}}^n$.

Jest to inna postać geometrii euklidesowej – gdy przestrzeń euklidesową uzwarcimy jednym punktem, można będzie przez rzut stereograficzny przekształcić ją na przestrzeń Möbiusa tego samego wymiaru (i odwrotnie), co będę oznaczał $\mathrm{M\ddot{o}}^k \sim \mathrm{Eucl}^k$.

Tak więc przestrzenią kierunków BL^n jest $\mathrm{M\ddot{o}}^{n-1}$, czy – jak kto woli – Eucl^{n-1}.

Wypada jeszcze zająć się tym, czego nie ma, czyli kierunkami przestrzeni Ell^k. Fakt, że kierunków nie ma, powoduje, iż (pełna) geometria eliptyczna jako jedyna ma na wszystkich swoich hiperpłaszczyznach jednakową geometrię. Pozwala to na odtworzenie Ell^k z Ell^{k-1} (jako struktury złożonej z kopii Ell^{k-1}) i odwrotnie.

Prowadzi to do następującej sieci powiązań geometrii

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Min}^n & \mathrm{Min}^5 & \mathrm{Min}^4 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathrm{BL}^{n-1} & \mathrm{BL}^4 & \mathrm{BL}^4 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\mathrm{M\ddot{o}}^{n-2} \sim \mathrm{Eucl}^{n-2} & \mathrm{M\ddot{o}}^3 \sim \mathrm{Eucl}^3 & \mathrm{M\ddot{o}}^2 \sim \mathrm{Eucl}^2
\end{array}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow$$

$$\dots \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^{n-3} \longleftrightarrow \dots \quad \dots \quad \dots \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^2 \longleftrightarrow \mathrm{Ell}^1$$

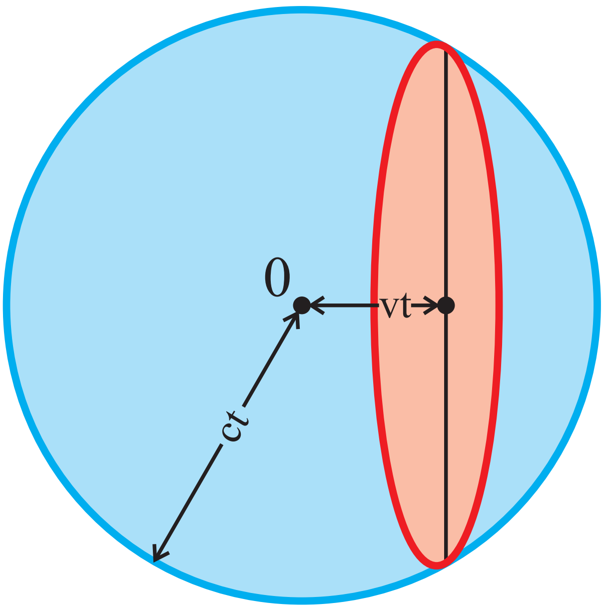
co ma mocne konsekwencje w podstawach geometrii, ale tu skoncentrować się chcę na tym, jak demonstruje się też w fizyce, jako *Landau–Pomeranchuk effect.*

Wspomniane znaczenie tego diagramu dla podstaw geometrii polega na wskazaniu aksjomatycznej realizacji idei Artura Cayleya, iż *geometria rzutowa to cała geometria*. Mianowicie, do otrzymania aksjomatyki dowolnej z czterech omawianych geometrii wystarcza dodanie do aksjomatów przestrzeni rzutowej odpowiedniego wymiaru aksjomatów opisujących stosunki metryczne zwykłego okręgu, jako że Ell^1 to nic innego, jak okrąg euklidesowy podzielony przez antypodyzm, co, jak wiadomo, daje z powrotem okrąg euklidesowy.

Dowiedziałem się o tym zjawisku przeglądając pracę pewnego doktoranta-fizyka. Polega ono – pisząc w ogromnym uproszczeniu i z nonszalancją laika – na tym, że następujące w minimalnych odstępach czasu rozpraszanie dwukrotne tej samej wiązki elektronów przebiega inaczej za pierwszym niż za drugim razem. Efekt ten jest przez niektórych nazywany też paradoksem Landaua–Pomeranczuka. Nadaje mu się wtedy fabularną interpretacje w stylu: *pędzący w szalonym tempie na motorze elektron trafia w betonowy słupek; kiedy podnosi się po kolizji i rusza dalej, bardziej uważa, przez co jego zderzenie ze złośliwie podstawionym przez fizyka kolejnym betonowym słupkiem jest już mniej energiczne.*

Jak przystało matematykowi, zainteresowałem się sprawą ze względu na jej paradoksalność. Okazało się, iż sprawę można wyjaśnić, posługując się pojęciem *half-dressed electrons*, co pozwoliłem sobie przetłumaczyć jako *elektrony w negliżu.*

W mocno dla niefizyka skomplikowanej pracy E.L. Feinberg, *Hadron clusters and half-dressed particles in quantum field theory*; Usp. Fiz. Nauk **132**, 255–291; Oct. 1980, znalazłem wyjaśnienie efektu Landaua–Pomeranczuka za pomocą zwrócenia uwagi na to, iż w momencie rozproszenia następuje zakłócenie pola, jakie jest (wedle de Broglie) jednym z przejawów elektronu. Pole sprzed zderzenia – rozciągające się przecież (oczywiście, mało intensywnie) na „całą” przestrzeń, porusza się bezpośrednio po zderzeniu nic o nim nie wiedząc, bo przecież informacje rozchodzą się zaledwie z prędkością światła. Tymczasem elektron, któremu w wyniku kolizji zmienił się pęd, odtwarza swoje pole najszybciej jak umie, ale to też dzieje się tylko z prędkością światła, więc w chwilę po rozproszeniu dysponuje on tylko malutkim polem, czego skutkiem jest mniej energetyczny przebieg kolejnego rozproszenia.



Spróbowałem to, co zrozumiałem, narysować i tak powstał widoczny obok obrazek.

Jest to przestrzenne sprawozdanie z tego, co dzieje się w czasoprzestrzeni. Obrazek jest (powinien być) trójwymiarowy, więc z konieczności rysuję dwuwymiarowy przekrój. Rozproszenie nastąpiło w punkcie O. Wie o nim po czasie t tylko wnętrze kuli (na obrazku koła) o promieniu ct, gdzie c to prędkość światła – nazwijmy wnętrze tej kuli wszechświatem zdarzenia. Sam elektron, poruszający się z prędkością v, oddalił się od O na odległość vt. Jego pole w kierunku prostopadłym do v sięga do granicy wszechświata. W kierunku ruchu podlega skróceniu Lorentza – jest zatem takie, jak narysowana elipsa. Tym, którzy się dziwią, że „z przodu” jest jej mniej niż „z tyłu”, przypominam o efekcie Dopplera.

No dobrze, ale jeśli spojrzymy na to jak na rysunek modelu Kleina, to zobaczymy, że owo pole to wnętrze ekwidystanty, a więc krzywej złożonej z punktów jednakowo oddalonych od prostej prostopadłej do kierunku ruchu (w przestrzeni jest to elipsoida obrotowa styczna do brzegu modelu).

Choć niczego o powstającym rysunku nie zakładaliśmy, „sam” narysował się w przestrzeni kierunków czasoprzestrzeni.