Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Skojarzenia i analogie*, Otwock–Śródborów, styczeń 2012.

Od bzdury do bingo!

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Wiek XVIII to czas przełomu mię dzy *Barokiem*, a *Oświeceniem*. Dominuje w nim racjonalizm, empiryzm, a rozum ma być źródłem poznania prawdy o świecie i człowieku. Wybitni twórcy (uczeni, filozofowie) stają się chlubą i ozdobą dworów królewskich. Mimo wybuchających wojen (o sukcesje) i związanych z tym okropności, w Europie dominuje uczucie kreatywnej twórczości niemal we wszystkich aspektach życia. Odzwierciedla to muzyka tamtych czasów, która i dzisiaj uwodzi wielu słuchaczy, emanuje radością. Proszę posłuchać utworów, które powstały w Europie w czasach, gdy żył i tworzył Leonhard Euler:

- ⋆ rok 1707, J.S. Bach, *Toccata i fuga d-mol*,
- ⋆ rok 1723, A. Vivaldi, *Cztery pory roku*,
- ⋆ rok 1725, J.S. Bach, *Badinerie*,
- ⋆ rok 1741, G.F. Händel, *Messiah: Halleluja Chorus*,
- ⋆ rok 1749, G.F. Händel, *Royal fireworks*,
- ⋆ rok 1771, L. Boccerini, *Minuet*,
- ⋆ rok 1783, W.A. Mozart, *Rondo alla Turca*.

Leonhard Euler (1707 – 1783) urodził się w Bazylei (szczegóły jego biografii zawierają opracowania [2], [9], [10]). W wieku 16 lat ukończył tamtejszy uniwersytet. W tych czasach matematyka nie była odrębnym przedmiotem studiów uniwersyteckich, więc Euler studiował ją pod kierunkiem Johanna Bernoulliego (rodziny Eulerów i Bernoullich przyjaźniły się). Mając 19 lat Euler został doktorem na podstawie rozprawy o rozchodzeniu się dźwięku. W 1727 r. opuścił Bazyleę, by za namową i przy poparciu Daniela Bernoulliego (syna Johanna) podjąć pracę w nowo utworzonej Petersburskiej Akademii Nauk. Do Szwajcarii już nigdy nie powrócił, żył i pracował w Petersburgu i w Berlinie.

Rys. 1. Leonhard Euler

Problem

W XIV wieku N. Oresme wykazał, że suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ nie ma skończonej wartości, a w 1650 r. P. Mengoli postawił zadanie zbadania sumy $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ Zadanie okazało się trudne. Problem zyskał na znaczeniu, gdy w 1673 r. G. W. Leibniz (a dwa lata wcześniej J. Gregory) wykazali, że

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

W 1689 r. Jacob Bernoulli (starszy barat Johanna) wykazał, że suma $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ ma wartość skończoną. Nie jest to trudne,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots = 2,$$

bo suma częściowa

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Ranga zadania polegającego na wyznaczeniu dokładnej wartości sumy $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ rosła, gdy matematycy tej miary co G.W. Leibniz, Jacob, Johann i Daniel Bernoulli, J. Stirling, J. Wallis nie potrafili mu sprostać.

W 1728 r. Daniel Bernoulli zakomunikował Ch. Goldbachowi, że suma $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ jest „bardzo bliska $\frac{8}{5}$”, a w odpowiedzi Goldbach obliczył, że

$$0,6437 \approx \frac{16223}{25200} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots < \frac{30197}{46800} \approx 0,6452.$$

Dwa lata później J. Stirling podał, że

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \approx 1,64493406$$

ze wszystkimi dokładnymi ośmioma znakami dziesiętnymi. Wkrótce Euler wyznaczył wartość tej sumy z 20 dokładnymi znakami dziesiętnymi. Nie było to ostateczne rozwiązanie zadania!

Pierwsza propozycja Eulera

Praca 28–letniego Eulera *O sumach szeregów odwrotnych* z 5 grudnia 1735 r. [3] zawiera zaskakujący wynik:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Obliczenia są magiczne i budzą sympatię. Rezultat ten przyniósł Eulerowi międzynarodowe uznanie.

Nie pójdziemy dokładnie tropem pracy Eulera, ale przedstawimy w zwięzłej formie jej zasadnicze idee. Euler korzysta z dwóch faktów znanych już Newtonowi:

(1) funkcję sinus można przedstawić w postaci szergu potęgowego

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

(niezależnie odkrytego przez B. Taylora w 1715 r.).

(2) dla wielomianu rzeczywistego o niezerowych pierwiastkach rzeczywistych r_1, r_2, …, r_n ma miejsce zależność: Jeżeli

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

to

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

(Sprawdzenie tego wzoru polega na wymnożeniu iloczynu po lewej stronie, wyznaczeniu wartości a_1, a_0 i wykonaniu dzielenia.)

Funkcję sinus przedstawiamy w postaci szeregu potęgowego

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

i o prawej stronie tej równości myślimy jak o wielomianie wysokiego stopnia. Dzieląc obie strony tego równaia przez x ($\neq 0$) mamy

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

a zastępując x przez $\sqrt{t}$, dla $t > 0$ otrzymujemy

$$\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{5!} - \frac{t^3}{7!} + \ldots \tag{3}$$

Patrząc na lewą stronę równości (3) widzimy, że pierwiastkami funkcji

$$f(t) = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{5!} - \frac{t^3}{7!} + \ldots$$

są liczby π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ... Stosując obserwację (2) Newtona do funkcji f otrzymujemy

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots = \frac{1}{6},$$

czyli

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Równość tę potwierdzają kontrolne rachunki przybliżone (Euler zna przybliżoną wartość sumy $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ z dwudziestoma dokładnymi znakami dziesiętnymi, a wartość π z dokładnymi 127 znakami dziesiętnymi).

W tej samej pracy, wykorzystując opisaną ideę, Euler obliczył kolejno:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots &= \frac{\pi^4}{90},\\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots &= \frac{\pi^6}{945},\\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \ldots &= \frac{\pi^8}{9450},\\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \ldots &= \frac{\pi^{10}}{93555},\\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \ldots &= \frac{691 \cdot \pi^{12}}{6825 \cdot 93555}.
\end{aligned}$$

Błąd

Dowód Eulera (mimo uzyskania poprawnego wyniku) jest błędny! Obserwacja (2) Newtona nie jest prawdziwa dla szeregów potęgowych, co pokazuje następujący przykład.

Przykład. Funkcja $h(x) = 1 - x - x^2 - x^3 - \ldots = 2 - \frac{1}{1-x}$ ma w przedziale $(-1, 1)$ dokładnie jeden pierwiatek $x = \frac{1}{2}$ oraz $a_0 = 1$ i $a_1 = -1$. Zatem w tym przypadku $2 \neq 1 = -\frac{a_1}{a_0}$.

Mimo tego błędu praca Eulera zasługuje na uznanie, ukazuje ona jego nadzwyczajną matematyczną intuicję, i słusznie zachwyciła jemu współczesnych. Zapewne praca ta trafiłaby również do annałów historii, gdyby nie zawierała jakichkolwiek uzasadnień, a jedynie prezentowała wskazane przez Eulera wartości nieskończonych sum. Wszystkim, którzy w tej sprawie mają wątpliwości polecam wyznaczenie (odgadnięcie) dokładnej wartości wyrażeń, z którymi nie poradził sobie Euler:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = ?,$$

$$1 + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} + \ldots = ?, \quad \text{dla } k = 2, 3, \ldots$$

Co dalej?

Wróćmy do roku 1735. Ponieważ prace w Petersburskiej Akademii były drukowane ze znacznym opóźnieniem, więc Euler o swoim wyniku zawiadomił listownie przyjaciół w w Europie, w szczególności Johanna i Daniela Bernoullich. Ci ostatni, obok wyrazów uznania, przesyłali Eulerowi krytyczne uwagi do jego uzasadnienia. W 1744 r. Euler ukończył prace nad *Introductio in Analysin Infinitorum* [*Wstęp do analizy nieskończonościowej*] (Lausanne w 1748 r.).
W tej fundamentalnej dla analizy matematycznej pracy zawarł (nie budzące już wątpliwości) analityczne uzasadnienie omawianej równości.

Oto dwa uzasadnienia tożsamości Eulera (inne dowody można znaleźć w [6]).

Dowód I. Idea dowodu pochodzi od T. Apostola i jest w duchu eulerowskim, polega na obliczeniu całki podwójnej dwoma różnymi sposobami. Niech $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=S$. Wówczas

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\Big)-\Big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\Big)$$

$$=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\Big)\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)=\frac{3}{4}S. \tag{4}$$

Skoro

$$\int_0^1 x^{2k}dx=\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2k+1},$$

więc

$$\Big(\frac{1}{2k+1}\Big)^2=\int_0^1 x^{2k}dx\cdot\int_0^1 y^{2k}dy=\int_0^1\int_0^1 x^{2k}y^{2k}dxdy,$$

i wykorzystując wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego,

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{2k}y^{2k}dxdy$$

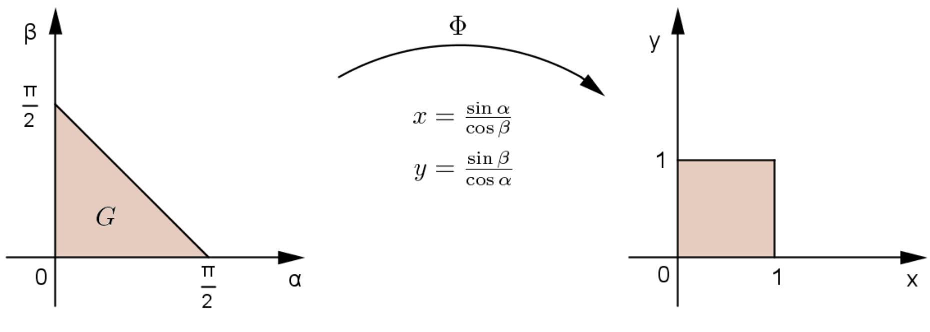
$$=\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}y^{2k}dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy.$$

Porównując ten wynik z rezultatem (4), otrzymujemy

$$S=\frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy. \tag{5}$$

Całkę obliczamy stosując zamianę zmiennych. Wprowadzamy przekształcenie $\Phi: G\to(0,1)^2$ dane wzorami: $x=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$, $y=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$, gdzie

$$G=\Big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2: 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ \ 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\Big\}.$$



Wówczas

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy=\int\int_G 1d\alpha d\beta=\frac{\pi^2}{8}$$

(bo ostatnia całka to pole trójkąta G), i ze wzoru (5),

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

W rozumowaniu tym korzystaliśmy z następujących twierdzeń, których uzasadnienia można znaleźć w podręczniku [8].

Twierdzenie 1. *Jeśli* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ *są funkcjami całkowalnymi, to*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]}\Big(f(x)\cdot g(y)\Big)dxdy=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy.$$

Twierdzenie 2 (o całkowaniu szeregów nieujemnych wyraz po wyrazie). *Dla dowolnego ciągu* $(f_n)_{n\geq 1}$ *funkcji mierzalnych na* A *i nieujemnych,*

$$\int_A\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n.$$

Twierdzenie 3 (o zamianie zmiennych = o całkowaniu przez podstawienie). *Niech* $G\subset\mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem niepustym i otwartym. Jeżeli* $\Phi:G\to\mathbb{R}^n$ *jest dyfeomorfizmem, zaś* $f:\Phi(G)\to\overline{\mathbb{R}}$ *jest funkcją mierzalną, to prawdziwy jest wzór*

$$\int_{\Phi(G)}f(x)dx=\int_G f(\Phi(t))|J_\Phi(t)|dt,$$

gdzie $|J_\Phi|$ *jest wartością bezwzględną wyznacznika Jacobiego (jakobianu) przekształcenia* Φ.

Dowód II (elementarny). Dla $\omega=\frac{\pi}{2m+1}$, $m\in\mathbb{N}$, mamy równość (patrz [4]):

$$\operatorname{ctg}^2\omega+\operatorname{ctg}^2(2\omega)+\ldots+\operatorname{ctg}^2(m\omega)=\frac{2m(2m-1)}{6}. \tag{6}$$

Ponieważ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, więc

$$\operatorname{ctg}^2x<\frac{1}{x^2}<1+\operatorname{ctg}^2x.$$

Sumując te nierówności stronami dla $x_k=k\omega$, $k=1,2,\ldots,m$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2(k\omega)<\Big(\frac{2m+1}{\pi}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}\Big)<m+\sum_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2(k\omega).$$

Wobec równości (6), mamy

$$\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-1}{2m+1}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}<\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m+2}{2m+1},$$

a przechodząc z $m\to\infty$ uzyskujemy: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

Bibliografia

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, WN PWN, Warszawa 2002.

[2] R.E. Bradley, C.F. Sandifer (Eds.), *Leonhard Euler: life, work and legacy*, Elsevier, Amsterdam 2007.

[3] L. Euler, De Summis Serierum Reciprocarum, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 7 (1734/35), 1740, 123 – 134 (= Opera Omnia, 14, 73 – 86);
oryginał: eulerarchive.maa.org/docs/originals/E041.pdf;
tłumaczenie (ang.)://www.17centurymaths.com/contents/euler/e041tr.pdf

[4] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, WN PWN, Warszawa 2009 (lub *Delta* 10/1990).

[5] D. Kalman, Six ways to sum a series, *The College Mathematics Journal* 24 (1993), 402 – 421.

[6] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956; punkty 136, 156, 189, 210.

[7] J. Mioduszewski, *Nie kochamy tego wieku. O Leonardzie Eulerze*, str. 59; www.math.us.edu.pl/ztg/mioduszewski/euler.pdf

[8] R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 1977.

[9] A. Weil, *Number theory: an approach through history*, Birkhäuser, Boston 1987.

[10] W. Więsław, Leonhard Euler (1703 – 1783) – człowiek i epoka, w: S. Fudali (red.), *Matematyka XVIII wieku*, Szczecin 2001, 9 – 25.