Ultrafiltry

Dominik KWIETNIAK, Kraków

Artykuł ten stanowi zapis referatu jaki został wygłoszony na XLVII Szkole Matematyki Poglądowej „Ekstrema". Przedstawiono w nim pewną konstrukcję uzwarcenia Čecha–Stone'a $\beta\mathbb{N}$ a następnie wykorzystano własności $\beta\mathbb{N}$ do dowodu twierdzenia Hindmana.

1. Ultrafiltry

W niniejszym artykule zero nie jest liczbą naturalną!

Poszukując obiektów ekstremalnych w matematyce zastanówmy się przez moment jakie warunki powinna spełniać rodzina zbiorów $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, abyśmy mogli powiedzieć, że każdy jej element jest „dużym" podzbiorem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Jest jasnym, że cały zbiór $\mathbb{N}$ jest swoim dużym podzbiorem, zatem będziemy wymagać by $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$. Z drugiej strony zbiór pusty na miano dużego na pewno nie zasługuje i dlatego $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Każdy nadzbiór dużego podzbioru także zasługuje na to miano, zatem $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \subset B \subset \mathbb{N}$ powinno implikować $B \in \mathcal{F}$. Ostatni warunek mówi, że część wspólna dwóch dużych podzbiorów też musi być duża. Zbiory z $\mathcal{F}$ powinny zajmować w zbiorze $\mathbb{N}$ tyle miejsca, że nie powinno być możliwe znalezienie dwóch zbiorów dużych, których przecięcie nie jest duże.

Nasze rozważania możemy sformalizować podając definicję *filtru*.

Definicja 1. Rodzinę $\mathcal{F}$ złożoną z podzbiorów $\mathbb{N}$ nazywamy **filtrem** jeżeli spełnia ona następujące warunki:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ oraz $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F}$ i $A \subset B \subset \mathbb{N} \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$,
3. $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Przykład 1. Niech A będzie ustalonym podzbiorem $\mathbb{N}$. Wówczas łatwo sprawdzić, że rodzina $\mathcal{F} = \{B \subset \mathbb{N} : A \subset B\}$ jest filtrem.

Przykład 2. Niech Cfn będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$ mających skończone dopełnienia, czyli

$$\mathrm{Cfn} = \{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}.$$

Rodzina Cfn jest filtrem, który nazywamy **filtrem Frécheta**.

Relacja zawierania wprowadza w zbiorze wszystkich filtrów w $\mathbb{N}$ częściowy porządek. Nas będą interesowały ekstremalne (maksymalne) elementy w tym porządku. W dalszej części artykułu udowodnimy, że takie ekstremalne ultrafiltry faktycznie istnieją.

Definicja 2. Mówimy, że filtr $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest **ultrafiltrem**, jeżeli jest filtrem maksymalnym, tzn. $\mathcal{F}$ nie jest właściwym podzbiorem żadnego filtru w $\mathbb{N}$.

Każdy ultrafiltr $\mathcal{F}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, które możemy uważać za duże w sensie wprowadzonym przez $\mathcal{F}$. Dlatego o elementach $\mathcal{F}$ mówimy, że są $\mathcal{F}$-dużymi podzbiorami $\mathbb{N}$.

Przykład 3. Ustalmy dowolnie liczbę naturalną n. Niech $\mathcal{F}(n) = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}$. Wówczas łatwo sprawdzić, że rodzina $\mathcal{F} = \{B \subset \mathbb{N} : A \subset B\}$ jest ultrafiltrem.

Przykład 4. Nietrudno jest przekonać się, że filtr Frécheta ani nie jest ultrafiltrem, ani nie jest zawarty w żadnym ultrafiltrze głównym.

Definicja 3. Ultrafiltr $\mathcal{F}(n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nazywamy **ultrafiltrem głównym**. Każdy ultrafiltr, który nie jest główny nazywamy **wolnym**.

Powstaje natychmiast pytanie: czy istnieją ultrafiltry wolne? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, o ile tylko zaakceptujemy pewnik wyboru. Aby to wykazać wprowadzimy pojęcie rodziny scentrowanej, którego będziemy także potrzebowali później.

Definicja 4. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest **rodziną scentrowaną** jeżeli dla dowolnych zbiorów $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ich przecięcie $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ jest zbiorem niepustym.

Przykład 5. Każdy filtr, w szczególności filtr Frécheta jest rodziną scentrowaną.

Twierdzenie 1. *Jeżeli rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest scentrowana, to $\mathcal{F}$ jest zawarta w pewnym ultrafiltrze w $\mathbb{N}$.*

Dowód. Rozpatrzmy następujący zbiór

$$\mathcal{X} = \{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \text{ i } \mathcal{C} \text{ scentrowana}\}.$$

Łatwo sprawdzić, że relacja inkluzji wprowadza częściowy porządek w $\mathcal{X}$. Co więcej, każdy łańcuch (wstępujący ciąg zbiorów) posiada ograniczenie górne, którym jest suma mnogościowa rodzin tworzących łańcuch. Spełnione są więc założenia lematu Kuratowskiego–Zorna, zatem w $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny, który oznaczamy $\mathcal{G}$. Pokażemy, że ten element maksymalny musi być ultrafiltrem. Definicja rodziny scentrowanej implikuje natychmiast, że $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Nietrudno także przekonać się, że jeżeli rodzina $\mathcal{G}$ jest scentrowana, to także rodzina

$$\mathcal{G} \cup \{B \subset \mathbb{N} \,|\, \exists A \in \mathcal{G} : A \subset B\} \cup \{C \cap D \,|\, C \in \mathcal{G} \text{ i } D \in \mathcal{G}\}$$

jest scentrowana. Z powyższej obserwacji oraz z tego, że $\mathcal{G}$ jest elementem maksymalnym względem relacji zawierania wynika, że $\mathcal{G}$ jest ultrafiltrem.

Twierdzenie 2. *Niech $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ będą ultrafiltrami.*

1. *Jeżeli $A \subset \mathbb{N}$ jest takim zbiorem, że dla każdego $B \in \mathcal{F}$ zbiór $A \cap B$ jest niepusty, to $A \in \mathcal{F}$.*
2. *Jeżeli $A \cup B \in \mathcal{F}$, to $A \in \mathcal{F}$ lub $B \in \mathcal{F}$.*
3. *Jeżeli $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, to istnieją takie zbiory $A \in \mathcal{F}$ oraz $B \in \mathcal{G}$, że $A \cap B = \emptyset$.*

Dowód. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{N}$ jest takim zbiorem, że $A \cap B \neq \emptyset$ dla wszystkich $B \in \mathcal{F}$. Niech

$$\mathcal{C} = \{A \cap B : B \in \mathcal{F}\}.$$

Dzięki naszemu założeniu rodzina $\mathcal{C}$ jest scentrowana. Z twierdzenia 1 wynika, że $\mathcal{C}$ zawiera się w pewnym ultrafiltrze $\mathcal{F}'$. Pokażemy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Jeżeli B jest dowolnym elementem $\mathcal{F}$. Wówczas $A \cap B \subset B$, więc $B \in \mathcal{F}'$, bo $A \cap B \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}'$ oraz $\mathcal{F}'$ jest ultrafiltrem. Zatem $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ co oznacza, że $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Oczywiście mamy też $B \in \mathcal{F}' = \mathcal{F}$, co kończy dowód punktu pierwszego. Dla dowodu punktu drugiego załóżmy, że $A \notin \mathcal{F}$ i $B \notin \mathcal{F}$. Z punktu pierwszego wynika wówczas, że istnieją takie zbiory $C \in \mathcal{F}$ i $D \in \mathcal{F}$, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$. Wówczas $C \cap D \in \mathcal{F}$ i $(A \cup B) \cap (C \cap D) = \emptyset$. Oznacza to, że $A \cup B \notin \mathcal{F}$, co kończy dowód punktu drugiego. Punkt trzeci wynika z punktu pierwszego. Skoro $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, to istnieje $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Na mocy punktu pierwszego możemy znaleźć taki zbiór $B \in \mathcal{G}$, że $A \cap B = \emptyset$.

Możemy teraz podać alternatywną charakteryzację ultrafiltrów. Zgodnie z nią ultrafiltr to niepusta rodzina zawarta w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, zamknięta na skończone przecięcia oraz nadzbiory o tej własności, że dla dowolnego $A \subset \mathbb{N}$, dokładnie jeden ze zbiorów A, $\mathbb{N} \setminus A$ jest jej elementem.

Twierdzenie 3. *Rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki*

1. *$\emptyset \notin \mathcal{F}$ oraz $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$.*
2. *Jeżeli $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
3. *Dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{N}$ albo $A \in \mathcal{F}$, albo $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Dowód. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem, to warunki (1) oraz (2) wynikają z definicji ultrafiltru. Warunek (3) wynika natomiast z twierdzenia 2 punkt (2). Z drugiej strony załóżmy, że rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ spełnia warunki (1)–(3). Aby sprawdzić, że $\mathcal{F}$ jest filtrem zauważmy, że jeżeli $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \subset B$, to $B \in \mathcal{F}$. W przeciwnym razie $\mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{F}$ z warunku (3), ale wtedy $A \cap \mathbb{N} \setminus B = \emptyset$ co przeczy warunkom (1) i (2). Zatem $\mathcal{F}$ jest filtrem i wobec warunku (3) $\mathcal{F}$ nie może być właściwym podzbiorem innego filtru, więc musi być ultrafiltrem.

Ultrafiltry mają własność, która bywa nazywana *podziałową regularnością*.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem oraz $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$, to istnieje takie $i = 1, \ldots, n$, że $A_i \in \mathcal{F}$.*

Dowód. Wynika natychmiast z twierdzenia 2 punkt (2).

2. $\beta\mathbb{N}$

W naszych rozważaniach zbiór wszystkich ultrafiltrów w $\mathbb{N}$ stanowić będzie tak ważny obiekt, że zasługuje na specjalne oznaczenie.

Definicja 5. Definiujemy

$$\beta\mathbb{N} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mathcal{F} \text{ jest ultrafiltrem w } \mathbb{N}\}.$$

Podamy teraz warunek charakteryzujący ultrafiltry wolne. Dzięki poniższemu twierdzeniu oraz twierdzeniu 1 możemy stwierdzić, że filtry wolne faktycznie istnieją. Co więcej, można udowodnić (korzystając z pewnika wyboru), że zbiór $\beta\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem potęgowym zbioru liczb rzeczywistych, zatem moc $\beta\mathbb{N}$ wynosi dwa do continuum. Można więc powiedzieć, że większość ultrafiltrów, to ultrafiltry wolne. Odnotujmy, że bez jakiejś formy pewnika wyboru istnienia ultrafiltrów wolnych dowieść się nie da.

Twierdzenie 5. *Ultrafiltr $\mathcal{F}$ jest wolny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera filtr Frécheta* Cfn.

Dowód. Prosty dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Zauważmy, że odwzorowanie $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{F}(n) \in \beta\mathbb{N}$ definiuje zanurzenie zbioru liczb naturalnych w zbiór ultrafiltrów. Od tej pory będziemy więc identyfikowali zbiór liczb naturalnych ze zbiorem ultrafiltrów głównych, tzn. będziemy utożsamiali liczbę naturalną n z ultrafiltrem głównym $\mathcal{F}(n)$ oraz będziemy traktowali zbiór $\mathbb{N}$ jako podzbiór $\beta\mathbb{N}$.

3. Topologia $\beta\mathbb{N}$

Naszym celem będzie teraz wprowadzenie w zbiorze $\beta\mathbb{N}$ pewnej struktury. Na pierwszy ogień weźmiemy strukturę topologiczną.

Definicja 6. Niech $A \subset \mathbb{N}$. Definiujemy

$$\widehat{A} = \{\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{F}\}.$$

Twierdzenie 6. *Rodzina $\{\widehat{A} \in \beta\mathbb{N} : A \subset \mathbb{N}\}$ jest bazą pewnej topologii w $\beta\mathbb{N}$.*

Rodzina $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ jest bazą pewnej topologii w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Jeżeli $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ i $x \in U_1 \cap U_2$, to istnieje takie $U \in \mathfrak{B}$, że $x \in U$ i $U \subset U_1 \cap U_2$.
2. Dla każdego $x \in X$ istnieje takie $U \in \mathfrak{B}$, że $x \in U$.

Dowód. Po pierwsze, zauważmy, że $\widehat{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$, zatem każdy ultrafiltr należy do co najmniej jednego zbioru naszej rodziny. Po drugie, weźmy dowolne zbiory $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ z naszej rodziny. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \in \widehat{A \cap B} &\iff A \cap B \in \mathcal{F} && (\text{bo } A \in \mathcal{F} \text{ i } B \in \mathcal{F}) \\
&\iff A \in \mathcal{F} \text{ i } B \in \mathcal{F} && (\text{bo } A \cap B \subset B \text{ i } A \cap B \subset A) \\
&\iff \mathcal{F} \in \widehat{A} \text{ i } \mathcal{F} \in \widehat{B} \\
&\iff \mathcal{F} \in \widehat{A} \cap \widehat{B}.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{N}$ zachodzi $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$. Zatem rodzina nasza spełnia warunki, które gwarantują, że jest ona bazą pewnej topologii w $\beta\mathbb{N}$.

Od tej pory będziemy rozpatrywali $\beta\mathbb{N}$ jako przestrzeń topologiczną z topologią zadaną przez bazę $\{\widehat{A} \in \beta\mathbb{N} : A \subset \mathbb{N}\}$.

Twierdzenie 7. *Przestrzeń topologiczna $\beta\mathbb{N}$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.*

Przestrzeń topologiczna jest *przestrzenią Hausdorffa* jeżeli dla każdej pary punktów $x \neq y$ istnieją takie rozłączne zbiory otwarte U i V, że $x \in U$ oraz $y \in V$.

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że $\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią Hausdorffa. Weźmy dowolne ultrafiltry $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Musi zatem istnieć zbiór $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Jeżeli $A \notin \mathcal{G}$, to $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{G}$. Otrzymujemy więc, że $\mathcal{F} \in \widehat{A}$ oraz $\mathcal{G} \in \widehat{\mathbb{N} \setminus A}$. Zatem $\widehat{A}$ oraz $\widehat{\mathbb{N} \setminus A}$ są rozłącznymi otoczeniami otwartymi odpowiednio $\mathcal{F}$ oraz $\mathcal{G}$, co oznacza, że rozważana przez nas topologia jest topologią Hausdorffa. Aby wykazać, że $\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią zwartą wystarczy dowieść, że z każdego pokrycia $\beta\mathbb{N}$ zbiorami otwartymi z bazy $\{\widehat{A} : A \subset \mathbb{N}\}$ można wybrać podpokrycie skończone. Niech $\mathcal{B}$ będzie takim pokryciem. Zdefiniujmy $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : \widehat{A} \in \mathcal{B}\}$ oraz $\mathcal{D} = \{\mathbb{N} \setminus A : A \in \mathcal{C}\}$. Twierdzimy, że rodzina $\mathcal{D}$ nie jest scentrowana. W przeciwnym razie na mocy twierdzenia 1 istnieje ultrafiltr $\mathcal{F}$ zawierający $\mathcal{D}$. Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{C}$ mamy $\mathcal{F} \notin \widehat{A}$, bo $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{D}$, ale to niemożliwe, bo $\mathcal{B}$ jest pokryciem $\beta\mathbb{N}$. Oznacza to, że rodzina $\mathcal{D}$ nie jest scentrowana, czyli istnieją takie zbiory $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$, że $D_1 \cap \ldots \cap D_n = \emptyset$. Z definicji $\mathcal{D}$ wynika, że istnieją takie zbiory $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, że $D_i = \mathbb{N} \setminus C_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas

$$\emptyset = D_1 \cap \ldots \cap D_n = (\mathbb{N} \setminus C_1) \cap \ldots \cap (\mathbb{N} \setminus C_n) = \mathbb{N} \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_n),$$

czyli $C_1 \cup \ldots \cup C_n = \mathbb{N}$, co oznacza, że $\widehat{C_1} \cup \ldots \cup \widehat{C_n} = \beta\mathbb{N}$ i kończy dowód zwartości.

Zauważmy, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{N}$ pewien filtr główny $\mathcal{F}(n)$ należy do $\widehat{A}$. Odnotujmy wniosek z tej obserwacji w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 8. *Zbiór $\mathbb{N}$ jest gęstym podzbiorem $\beta\mathbb{N}$.*

Widzimy zatem, że przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ jest *uzwarceniem* przestrzeni $\mathbb{N}$ rozważanej z topologią dyskretną. Można pokazać, że $\beta\mathbb{N}$ jest uzwarceniem w pewnym sensie ekstremalnym, tzn. $\beta\mathbb{N}$ jest uzwarceniem Čecha–Stone'a $\mathbb{N}$. Uzwarcenie Čecha–Stone'a $\mathbb{N}$ to największa (każda inna przestrzeń o podanych własnościach zanurza się w uzwarcenie Čecha–Stone'a) przestrzeń zwarta Hausdorffa, w której $\mathbb{N}$ jest podzbiorem gęstym i dla każdej przestrzeni topologicznej zwartej Hausdorffa X dowolna funkcja $\mathbb{N} \mapsto X$ przedłuża się do funkcji ciągłej określonej na uzwarceniu.

4. Algebra $\beta\mathbb{N}$

W poprzedni paragrafie wprowadziliśmy w $\beta\mathbb{N}$ pewną topologię stanowiącą pewne rozszerzenie naturalnej (dyskretnej) topologii zbioru $\mathbb{N}$. Zajmiemy się teraz omówieniem struktury algebraicznej w $\beta\mathbb{N}$, która także okaże się być rozszerzeniem zwykłego dodawania w zbiorze liczb naturalnych.

Definicja 7. Niech $A \subset \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy

$$A - n = \{a - n \in \mathbb{N} : a \in A\} = \{k \in \mathbb{N} : n + k \in A\}.$$

Analogicznie definiujemy zbiór

$$A + n = n + A = \{a + n : a \in A\}.$$

Zbiór $A - n$ możemy uważać za przesunięcie zbioru A na osi liczbowej o n jednostek w lewo (pomijamy przy tym te liczby, które po przesunięciu znajdą się na lewo od zera).

Definicja 8. Niech $A \subset \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$. Definiujemy

$$A_{\vec{\mathcal{G}}} = \{n : A - n \in \mathcal{G}\}.$$

Zbiór $A_{\vec{\mathcal{G}}}$ jest to zbiór takich $n \in \mathbb{N}$, że przesunięcie $A - n$ zbioru A o n jednostek w lewo należy do $\mathcal{G}$.

Zauważmy, że
$$A \in \mathcal{F} + \mathcal{G} \iff A_{\mathcal{G}}^{\rightarrow} \in \mathcal{F}.$$

Definicja 9. Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$. Definiujemy **dodawanie ultrafiltrów**
$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{N} : \{n : A - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}\}.$$

Zatem $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ składa się z tych zbiorów $A \subset \mathbb{N}$ dla których zbiór $A_{\mathcal{G}}^{\rightarrow}$ należy do $\mathcal{F}$, równoważnie $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ jest to zbiór tych podzbiorów $\mathbb{N}$, dla których zbiór tych przesunięć $A - n$, które czynią zbiór $\mathcal{G}$–dużym jest $\mathcal{F}$–duży. Skąd taka definicja dodawania? Otóż istnieje naturalna bijekcja między zbiorem $\beta\mathbb{N}$ a zbiorem skończenie addytywnych, monotonicznych funkcji $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \{0, 1\}$ spełniających warunek $\mu(\emptyset) = 0$ i $\mu(\mathbb{N}) = 1$. Funkcje takie nazywane są skończenie addytywnymi miarami. Motywacją dla wprowadzenia takiej definicji dodawania jest pojęcie splotu miar.

Odnotujmy najpierw, że definicja 9 wprowadza działanie wewnętrzne w $\beta\mathbb{N}$ oraz, że $\beta\mathbb{N}$ wraz z tym działaniem tworzy półgrupę. Dowody nie są trudne, ale dość techniczne, dlatego w tym miejscu je pomijamy.

Twierdzenie 9. *Dla dowolnych $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$ rodzina $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ jest ultrafiltrem.*

Twierdzenie 10. *Dla dowolnych $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \beta\mathbb{N}$ zachodzi*
$$(\mathcal{F} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} = \mathcal{F} + (\mathcal{G} + \mathcal{H}),$$
czyli $\beta\mathbb{N}$ jest półgrupą.

Ponadto, działanie dodawania w $\beta\mathbb{N}$ stanowi rozszerzenie dodawania w $\mathbb{N}$. Należy w tym miejscu ostrzec Czytelnika, że działanie dodawania w $\beta\mathbb{N}$ nie jest przemienne.

Twierdzenie 11. *Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathcal{F}(n) + \mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(n + m)$.*

Dowód. Ustalmy dowolne $m, n \in \mathbb{N}$. Wówczas
$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{F}(n) + \mathcal{F}(m) &\iff A_{\mathcal{F}(m)}^{\rightarrow} \in \mathcal{F}(n) \\
&\iff n \in A_{\mathcal{F}(m)}^{\rightarrow} && \text{(z definicji } \mathcal{F}(n)) \\
&\iff n \in \{k : A - k \in \mathcal{F}(m)\} && \text{(z definicji } A_{\mathcal{F}(m)}^{\rightarrow}) \\
&\iff A - n \in \mathcal{F}(m) \\
&\iff m \in A - n && \text{(z definicji } \mathcal{F}(m)) \\
&\iff n + m \in A && \text{(z definicji } A - n) \\
&\iff A \in \mathcal{F}(n + m).
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że $\mathcal{F}(n) + \mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(n + m)$.

5. Algebra spotyka topologię w $\beta\mathbb{N}$

W niniejszym paragrafie pojęcia topologiczne połączymy z algebraicznymi, aby z pomocą lematu Kuratowskiego–Zorna udowodnić istnienie kolejnego ekstremalnego obiektu — *idempotentnego* ultrafiltru $\mathcal{J}$ w $\beta\mathbb{N}$, tzn. takiego ultrafiltru $\mathcal{J} \in \beta\mathbb{N}$, że $\mathcal{J} + \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

Twierdzenie 12. *Dla dowolnego $\mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$ odwzorowanie*
$$\pi_{\mathcal{G}}: \beta\mathbb{N} \ni \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} + \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$$
jest ciągłe.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $A \subset \mathbb{N}$ przeciwobraz zbioru otwartego $\widehat{A}$ z bazy topologii $\beta\mathbb{N}$ jest także zbiorem otwartym. Niech $A \subset \mathbb{N}$ i wówczas
$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \in \pi_{\mathcal{G}}^{-1}(\widehat{A}) &\iff \mathcal{F} + \mathcal{G} \in \widehat{A} \\
&\iff A \in \mathcal{F} + \mathcal{G} \\
&\iff \{n : A - n \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F} \\
&\iff A_{\mathcal{G}}^{\rightarrow} \in \mathcal{F} \\
&\iff \mathcal{F} \in \widehat{A_{\mathcal{G}}^{\rightarrow}}.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(\widehat{A}) = \widehat{A_{\mathcal{G}}^{\to}}$$

co oznacza ciągłość $\pi_{\mathcal{G}}$.

Niestety, $\beta\mathbb{N}$ z działaniem dodawania nie jest półgrupą topologiczną, bo analogicznie zdefiniowane odwzorowanie $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{F} + \mathcal{G}$, w którym ustalony jest tylko pierwszy składnik z lewej strony (czyli $\mathcal{F}$) nie jest przekształceniem ciągłym. Dowód pomijamy. Półgrupy w których działanie jest ciągłe z jednej strony względem pewnej topologii nazywane są *półgrupami semitopologicznymi.* Na szczęście już jednostronna ciągłość dodawania w $\beta\mathbb{N}$ wystarcza, aby dowieść, że w $\beta\mathbb{N}$ istnieje element idempotentny. Twierdzenie to zachodzi dla dowolnej półgrupy semitopologicznej, ale my wypowiemy je i udowodnimy dla $\beta\mathbb{N}$.

Twierdzenie 13. *W półgrupie* $(\beta\mathbb{N}, +)$ *istnieje idempotent, tzn. można znaleźć taki ultrafiltr* $\mathcal{J} \in \beta\mathbb{N}$*, że* $\mathcal{J} + \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

Dowód. Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną takich zwartych i niepustych podzbiorów $\beta\mathbb{N}$, które są podpółgrupami $\beta\mathbb{N}$, czyli $K \in \mathcal{X}$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest zwarty, niepusty i $K + K \subset K$. Rodzina $\mathcal{X}$ jest niepusta, bo $\beta\mathbb{N} \in \mathcal{X}$. Relacja inkluzji wprowadza w $\mathcal{X}$ częściowy porządek. Każdy zstępujący łańcuch zbiorów $\mathcal{L}$ w $\mathcal{X}$ posiada ograniczenie dolne, którym jak łatwo sprawdzić jest przecięcie wszystkich zbiorów łańcucha $\bigcap \mathcal{L}$. Na mocy lematu Kuratowskiego–Zorna wnioskujemy, że w $\mathcal{X}$ musi istnieć element minimalny $\mathfrak{K}$. Wykażemy, że każdy ultrafiltr $\mathcal{J} \in \mathfrak{K}$ jest idempotentem. Ustalmy więc $\mathcal{J} \in \mathfrak{K}$. Udowodnimy najpierw, że $\mathfrak{K} + \mathcal{J} = \mathfrak{K}$. Istotnie, jeżeli $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{K}$, to

Tutaj: $\mathfrak{K} + \mathcal{J} = \{\mathcal{F} + \mathcal{J} : \mathcal{F} \in \mathfrak{K}\}$.

$$(\mathcal{F} + \mathcal{J}) + (\mathcal{G} + \mathcal{J}) = (\mathcal{F} + \mathcal{J} + \mathcal{G}) + \mathcal{J} \in \mathfrak{K} + \mathcal{J},$$

zatem $(\mathfrak{K} + \mathcal{J}) + (\mathfrak{K} + \mathcal{J}) \subset (\mathfrak{K} + \mathcal{J})$, a ponadto $\mathfrak{K} + \mathcal{J}$ jest zbiorem niepustym i zwartym, bo jest ciągłym obrazem zbioru zwartego $\mathfrak{K} \subset \beta\mathbb{N}$ w odwzorowaniu ciągłym $\pi_{\mathcal{J}} \colon \beta\mathbb{N} \ni \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} + \mathcal{J} \in \beta\mathbb{N}$ (patrz twierdzenie 12). Otrzymaliśmy, że $\mathfrak{K} + \mathcal{J} \in \mathcal{X}$. Ultrafiltr $\mathcal{J}$ należy do $\mathfrak{K}$, więc $\mathfrak{K} + \mathcal{J} \subset \mathfrak{K}$ i minimalność tego ostatniego oznacza, że $\mathfrak{K} + \mathcal{J} = \mathfrak{K}$. Niech teraz $\mathfrak{B} = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{K} : \mathcal{F} + \mathcal{J} = \mathcal{J}\}$. Innymi słowy,

Wprost z definicji:
$\mathcal{G} \in \mathfrak{K} + \mathcal{J} \iff \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{K} : \pi_{\mathcal{J}}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.

$$\mathfrak{B} = \pi_{\mathcal{J}}^{-1}(\{\mathcal{J}\}),$$

zatem $\mathfrak{B}$ jest zbiorem domkniętym i niepustym, bo $\mathcal{J} \in \mathfrak{K} = \mathfrak{K} + \mathcal{J}$. Oczywiście z określenia $\mathfrak{B}$ wynika natychmiast, że $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{K}$, więc jeżeli wykażemy, że $\mathfrak{B}$ jest podpółgrupą $\beta\mathbb{N}$, to wobec minimalności $\mathfrak{K}$ udowodnimy tym samym, że $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$. Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{B}$. Wówczas

$$\pi_{\mathcal{J}}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) + \mathcal{J} = \mathcal{F} + (\mathcal{G} + \mathcal{J}) = \mathcal{F} + \mathcal{J} = \mathcal{J},$$

co oznacza, że $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$, więc $\mathcal{J} + \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

Zauważmy, że z twierdzenia 11 wynika, że każdy idempotent w $\beta\mathbb{N}$ musi być ultrafiltrem wolnym.

6. Teoria Ramseya a $\beta\mathbb{N}$

Twierdzenia matematyczne zaliczane do teorii mówią, że dostatecznie duże obiekty losowe musza zawierać pewną strukturę. Wyniki takie stanowią daleko idące uogólnienia zasady szufladkowej Dirichleta. Jednym z najpiękniejszych twierdzeń tej teorii jest twierdzenie Hindmana, które poniżej przedstawimy.

Definicja 10. Niech $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ będzie nieskończonym podzbiorem $\mathbb{N}$. Zbiorem skończonych sum zbioru A nazywamy zbiór

$$\mathrm{FS}(A) = \left\{ \sum_{j \in S} a_j : S \subset \mathbb{N} \text{ i } 0 < |S| < \infty \right\}.$$

Twierdzenie Hindmana. *Jeżeli* $\mathbb{N} = P_1 \cup \ldots \cup P_n$*, to istnieją taki nieskończony zbiór* $A \subset \mathbb{N}$ *oraz taka liczba* $1 \le i \le n$*, że* $\mathrm{FS}(A) \subset P_i$.

Innymi słowy, jeżeli zbiór liczb naturalnych pokolorujemy przy pomocy skończonej liczby kolorów, to znajdziemy taki nieskończony zbiór A, że wszystkie elementy zbioru skończonych sum zbioru A będą w jednym kolorze.

Dowód. Niech $\mathcal{J}$ będzie idempotentnym ultrafiltrem na $\mathbb{N}$. Oznacza to, że każdy element $\mathcal{J} + \mathcal{J}$ musi także należeć do $\mathcal{J}$. Z definicji dodawania w $\beta\mathbb{N}$ wynika, że

$$(\star) \qquad A \in \mathcal{J} + \mathcal{J} \iff \{n : A - n \in \mathcal{J}\} \in \mathcal{J},$$

zatem dla każdego zbioru $A \in \mathcal{J}$ zbiór $A' = A_{\mathcal{J}}^{\rightarrow}$ także należy do $\mathcal{J}$. Oznacza to, że elementami ultrafiltru $\mathcal{J}$ są takie duże podzbiory $\mathbb{N}$, że zbiór tych wszystkich przesunięć, po dokonaniu których zbiory te będą nadal $\mathcal{J}$–duże jest także $\mathcal{J}$–duży, czyli $\mathcal{J}$–prawie wszystkie przesunięcia elementów $\mathcal{J}$ nadal należą do $\mathcal{J}$. Wyjaśnia, to dlaczego ultrafiltr idempotentny $\mathcal{J}$ bywa nazywanym *prawie niezmienniczym.* Co więcej, ze względu na twierdzenie 11 $\mathcal{J}$ musi być ultrafiltrem wolnym.

Ustalmy kolorowanie zbioru liczb naturalnych. Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ultrafiltrem, więc znajdziemy taki kolor, że zbiór wszystkich liczb pokolorowanych tym kolorem należy do $\mathcal{J}$. Oznaczmy ten zbiór przez A_0. Indukcyjnie skonstruujemy taki ciąg $A_1, A_2, \ldots$ złożony z elementów $\mathcal{J}$ oraz taki nieskończony zbiór $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A_0$, że $a_i \in A_{i-1}$, $A_i \subset A_{i-1}$ oraz $a_i + A_i \subset A_{i-1}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. W pierwszym kroku naszej konstrukcji zauważmy najpierw, że ze względu na równoważność $(\star)$ zbiór A_0' także należy do $\mathcal{J}$, zatem $A_0 \cap A_0' \in \mathcal{J}$. Wybierzmy dowolny element $a_1 \in A_0 \cap A_0'$. Mamy wówczas $A_0 - a_1 \in \mathcal{J}$, zatem $A_1 = (A_0 - a_1) \cap A_0 \in \mathcal{J}$. W szczególności nasza definicja zbioru A_1 oraz liczby a_1 oznacza, że $a_1 \in A_0$, $A_1 \subset A_0$ oraz $a_1 + A_1 \subset A_0$, co kończy pierwszy krok indukcyjnej konstrukcji.

Załóżmy teraz, że dla pewnego $k \geq 1$ skonstruowaliśmy już zbiory

$$A_k \subset A_{k-1} \subset \ldots \subset A_1 \subset A_0$$

oraz znaleźliśmy takie liczby $a_1, \ldots, a_k \in A_0$, że $a_i \in A_{i-1}$ i $a_i + A_i \subset A_{i-1}$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, k\}$. Podobnie jak wyżej widzimy, że $A_k \cap A_k' \in \mathcal{J}$. Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ultrafiltrem wolnym więc $A_k \cap A_k'$ jest zbiorem nieskończonym i możemy znaleźć element $a_{k+1} \in (A_k \cap A_k') \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. Niech teraz $A_{k+1} = (A_k - a_{k+1}) \cap A_k$. Wówczas $a_{k+1} \in A_k$, $A_{k+1} \in \mathcal{J}$ i $A_{k+1} \subset A_k$, co więcej $a_{k+1} + A_{k+1} \subset A_k$. Krok indukcyjny został zakończony. Na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy istnienie ciągu $A_1, A_2, \ldots$ złożonego z elementów $\mathcal{J}$ oraz takiego nieskończony zbiór $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A_0$, że $A_i \subset A_{i-1}$ oraz $a_i + A_i \subset A_{i-1}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Zauważmy teraz, że $\mathrm{FS}(A) \subset A_0$. Zamiast ogólnego dowodu podamy przykład, który naszym zdaniem doskonale ilustruje powód dla którego nasze spostrzeżenie jest prawdziwe. Pokażemy mianowicie, że

$$a_7 + a_4 + a_2 + a_1 \in A_0.$$

Zauważmy najpierw, że $a_7 \in A_6 \subset A_5 \subset A_4$, zatem $a_7 + a_4 \in A_4 + a_4 \subset A_3 \subset A_2$. Dalej, $(a_7 + a_4) + a_2 \in A_2 + a_2 \subset A_1$, czyli $((a_7 + a_4) + a_2) + a_1 \in A_1 + a_1 \subset A_0$. Dowód w przypadku ogólnym przebiega analogicznie.

Literatura

[1] Vitaly Bergelson, *Ergodic Ramsey Theory — an update*, artykuł w Ergodic Theory of Z^d-actions (pod redakcją M. Pollicotta i K. Schmidta), London Math. Soc. Lecture Note Series **228** (1996), str. 1–61.

[2] David Galvin, *Ultrafilters, with applications to analysis, social choice and combinatorics*, `http://nd.edu/~dgalvin1/pdf/ultrafilters.pdf`

[3] Neil Hindman, Dona Strauss, *Algebra in the Stone–Čech compactification. Theory and applications.* seria de Gruyter Expositions in Mathematics, tom 27. *Walter de Gruyter & Co.*, Berlin, 1998.