Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLV Szkole Matematyki Poglądowej, *Co mi się podoba*, Jachranka, sierpień 2010.

Twierdzenie geometryzacyjne

Zdzisław POGODA, Kraków

Pod koniec lat siedemdziesiątych XX stulecia William Thurston postawił hipotezę nazwaną hipotezą geometryzacyjną, którą z dużym uproszczeniem można sformułować na przykład tak:

> Każda trójwymiarowa rozmaitość zamknięta może być „kanonicznie" rozłożona na prostsze cegiełki–podrozmaitości, z których każda jest wyposażona w jedną z ośmiu „kanonicznych" geometrii.

Postawienie tej hipotezy oraz wkład Thurstona w próby jej udowodnienia zostały uznane przez świat matematyczny za istotny przełom w rozwiązaniu problemu klasyfikacji trójwymiarowych rozmaitości (nazywanych w specjalistycznym żargonie 3–rozmaitościami) w szczególności w podejściu do słynnej już hipotezy Poincarégo. W latach 2002 i 2003 Grisha Perelman umieścił w Internecie preprinty trzech artykułów, w których między innymi przedstawił dowód hipotezy geometryzacyjnej. Teksty napisane są bardzo hermetycznym językiem z pominięciem wielu szczegółów, a autor nie chciał odpowiadać na pytania specjalistów próbujących przebrnąć przez labirynt jego technicznych rozumowań. W końcu jednak po ponad czterech latach pracy stwierdzono, że wyniki Perelmana są poprawne i hipoteza geometryzacyjna stała się twierdzeniem. Tym samym również rozstrzygnięta została klasyczna hipoteza Poincargo. Spróbujmy wyjaśnić, na czym polega problem rozważany przez Thurstona i jakie jest jego znaczenie.

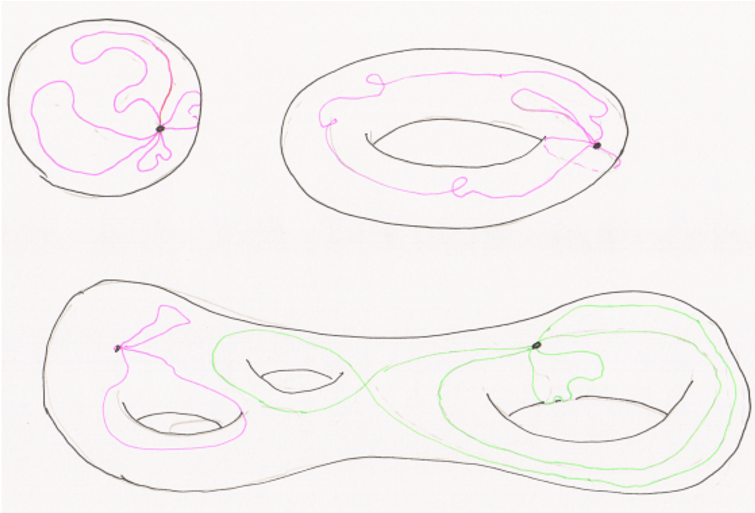
Obiektami, których dotyczy hipoteza geometryzacyjna, są rozmaitości, a dokładniej rozmaitości trójwymiarowe. Pojęcie rozmaitości nie raz pojawiało się już w Zeszytach MSN[1]. Przypomnijmy więc krótko, że rozmaitość topologiczna wymiaru n jest to obiekt (przestrzeń topologiczna), który lokalnie wygląda jak przestrzeń R^n. A zatem rozmaitość trójwymiarowa, dokładniej rozmaitość bez brzegu, lokalnie przypomina przestrzeń trójwymiarową. Gdy dopuścimy brzeg (taka przecież jest na przykład kula domknięta B^3), to jego punkty mają otoczenia wyglądające lokalnie jak półprzestrzeń domknięta.

Idea zapoczątkowana przez Riemanna, zyskała sobie prawo obywatelstwa w matematyce, choć nie stało się to od razu. Rozwijana i uściślana przez wielu matematyków znalazła zastosowania nie tylko w różnych działach matematyki, lecz także w fizyce. Szczególnie powstanie Ogólnej Teorii Względności i jej zastosowanie w kosmologii pokazało wielką przydatność pojęcia rozmaitości. Jednym z najważniejszych problemów od samego początku był problem klasyfikacji. Matematykom udało się sklasyfikować rozmaitości dwuwymiarowe, czyli powierzchnie. Zrobili to w pełni, wykorzystując wcześniejsze wyniki Möbiusa, Jordana i Dycka, w 1907 roku Max Dehn i Poul Heegaard. Po tym sukcesie kolej przyszła na trójwymiarowe. Wydawało się, że odpowiednio uogólniając i rozszerzając metody, które doskonale sprawdziły się w przypadku dwuwymiarowym, uda się opisać „przestrzenie trójwymiarowe", jak wtedy często nazywano 3–rozmaitości. Naturalnie matematycy mieli świadomość, że nie będzie to tylko proste uogólnienie. Nie spodziewali się jednak, że trudności okażą się aż tak ogromne. Świat rozmaitości trójwymiarowych jest niezwykle bogaty. Pojawiły się też nowe zaskakujące, trudne do uchwycenia efekty. Już sama sfera trójwymiarowa sprawiała ogromne kłopoty. Potrzebna była jej prosta charakteryzacja jako obiektu odgrywającego, jak słusznie przypuszczano, kluczową rolę w klasyfikacji.

Chcąc, między innymi, uchwycić istotne cechy topologiczne sfery Poinacaré zdefiniował bardzo użyteczne narzędzie pozwalające badać obiekty topologiczne. Jest to grupa podstawowa albo inaczej grupa fundamentalna. Używa się też określenia pierwsza grupa homotopii. Opisana jest za pomocą pętli na

[1] Z. Pogoda, *Problemy z 3–rozmaitościami*, Zeszyty MSN 40 (I 2008)

rozmaitości zaczepionych w pewnym punkcie. Przy czym zakłada się, że pętle nie różnią się istotnie, gdy jedna da się w sposób ciągły zdeformować do drugiej z zachowaniem punktu zaczepienia – mówimy wtedy o pętlach homotopijnych. Na sferze wszystkie pętle są homotopijne i dają się ściągnąć do punktu – obiekty o tej własności nazywamy jednospójnymi. Na torusie jest już inaczej, południka nie da się zdeformować do równoleżnika i żadnej z tych wzorcowych pętli nie można ściągnąć do punktu.



Rys. 1. Pętle na rozmaitościach

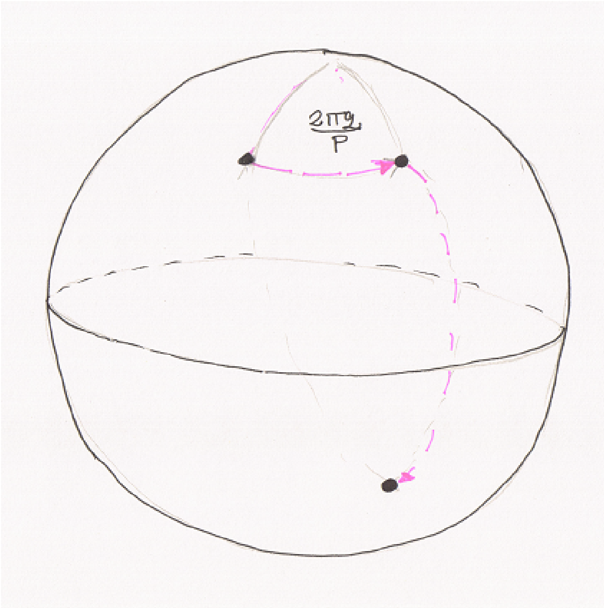
W przypadku rozmaitości wybór punktu zaczepienia pętli jest nieistotny. Wprowadza się w dość naturalne działanie na pętlach (niezależne od deformacji) i mamy grupę, zawierającą istotne informacje o rozmaitości. Ważna jest własność, że jeśli rozmaitości są homeomorficzne, to ich grupy podstawowe są izomorficzne. Niestety stwierdzenie odwrotne nie zachodzi. Grupa podstawowa znakomicie się spisała przy klasyfikacji powierzchni. Poincaré miał nadzieję, że również w przypadku trójwymiarowym przyda się bardzo. Nie pomylił się, choć sprawa nie przedstawiała się już tak prosto, co ujawniło się właśnie przy charakteryzacji sfery trójwymiarowej. Jest to słynna hipoteza Poincarégo, którą w języku grupy podstawowej można sformułować następująco:

> Trójwymiarowa rozmaitość zamknięta, z trywialną grupą podstawową jest homeomorficzna z S^3.

Propozycja przedstawiona przez Poincarégo okazała się wyjątkowo trudną hipotezą, nierozstrzygniętą przez prawie sto lat, chociaż jej sformułowanie było stosunkowo bardzo proste: trójwymiarowa rozmaitość spójna[2], zwarta i bez brzegu (te cechy określa się krótko: rozmaitość zamknięta) oraz jednospójna jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową. Hipoteza po pewnych koniecznych modyfikacjach została uogólniona na n wymiarów i dla $n > 3$ z ogromnym wysiłkiem rozstrzygnięta pozytywnie. Klasyczny przypadek bronił się jednak bardzo skutecznie mimo usilnych ataków. Niezależnie matematycy próbowali opisać konstrukcje 3–rozmaitości i sklasyfikować pewne wybrane ich rodziny.

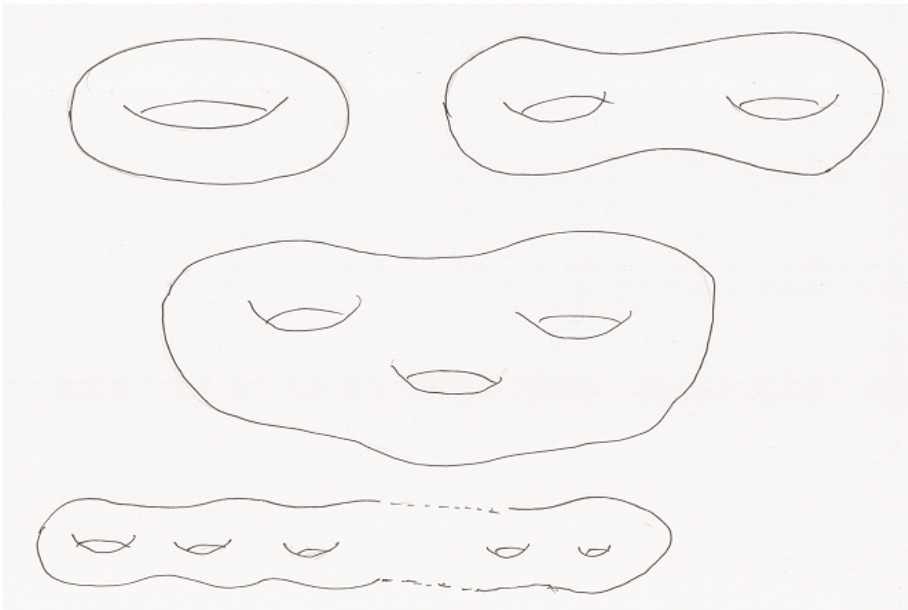
Do takich należą przestrzenie soczewkowe (soczewki) pierwszy raz opisane przez Tietzego. Jest to pierwsza rodzina 3–rozmaitości całkowicie opisanych i sklasyfikowanych. Soczewki można opisać na wiele sposobów, jeden z nich wygląda tak: wybieramy dwie liczby naturalne względnie pierwsze p i q. Na powierzchni kuli (czyli oczywiście na sferze) zaznaczamy „równik”. Teraz każdy punkt górnej półsfery obracamy o kąt $2\pi q/p$ i odbijamy symetrycznie względem równika, a następnie tak otrzymany sklejamy z wyjściowym. Powstaje właśnie przestrzeń soczewkowa oznaczana $L(p, q)$. Udało się w pełni scharakteryzować soczewki w zależności od p i q.

[2] Często założenie spójności jest pomijane, gdyż na wstępie zakłada się, że jeśli nie zaznaczono inaczej, to rozważa się tylko rozmaitości spójne.



Rys. 2. Powstawanie przestrzeni soczewkowej

Pierwszą ogólną konstrukcję dla 3–rozmaitości zaproponował wspomniany już Heegaard. Każdą rozmaitość trójwymiarową można otrzymać przez sklejenie brzegiem dwóch n–krotnych pełnych torusów – nazywanych torusami genusu n. Pełny torus genusu 1 jest to zwykły pełny torus, który można bardziej formalnie przedstawić jako iloczyn kartezjański koła i okręgu $B^2 \times S^1$ (przypomnijmy: klasyczny torus – powierzchnia – to $S^1 \times S^1$), czyli mamy tu do czynienia z jedną dziurą.

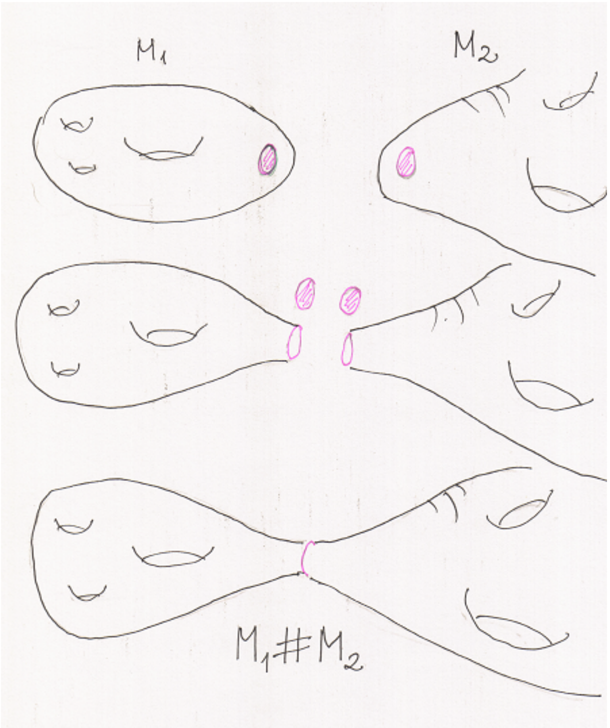


Rys. 3. Torusy genusu 1, 2, 3, ..., n

W przypadku torusa genusu n mamy tych dziur właśnie n. Sklejanie torusów może odbywać się na różne sposoby; możemy żądać, żeby charakterystyczne krzywe na powierzchni (np. odpowiedniki południków) jednego sklejać z innymi na drugiej poprowadzonymi w wymyślny sposób. Często bardzo różne sklejenia prowadzą do jednej i tej samej rozmaitości trójwymiarowej. Problem klasyfikacji 3–rozmaitości można sprowadzić do klasyfikacji sklejeń, ale to wcale nie okazało się ułatwieniem zadania. Już opisanie wszystkich sklejeń prowadzących do zwykłej sfery trójwymiarowej jest poważnym problemem. Jedyny zadowalający rezultat uzyskano dla typów sklejania zwykłych torusów, co prowadzi do wspomnianych już przestrzeni soczewkowych.

Inny pomysł podsunął Max Dehn w 1910 roku proponując wycinanie ze sfery trójwymiarowej otoczek tabularnych węzłów lub splotów (czyli obiektów topologicznie identycznych z torusami lub sumami mnogościowymi torusów) i ponowne ich wklejanie, tylko w inny sposób. Takie procedury nazwano chirurgiami Dehna. W tym przypadku znów okazało się, że można tak skonstruować każdą 3–rozmaitość, lecz pozostał problem z jednoznacznością[3].

Gdy przyjrzymy się bliżej klasyfikacji powierzchni, to zauważymy, że każdą można zbudować z kilku, a dokładnie trzech, prostszych cegiełek. Tymi najprostszymi powierzchniami są: sfera, torus (tym razem powierzchnia) i płaszczyzna rzutowa, a operacją łączącą jest suma spójna. Polega ona na tym, że z każdej powierzchni wycinamy kawałki homeomorficzne z kołami, a następnie sklejamy brzegiem.



Rys. 4. Suma spójna

Pomysł rozkładu rozmaitości trójwymiarowych na bardziej elementarne składniki podjął Hellmuth Kneser, który przedstawił w 1929 roku twierdzenie:

> Każda trójwymiarowa rozmaitość zamknięta może być rozłożona jednoznacznie, z dokładnością do kolejności składników, na sumę spójną rozmaitości pierwszych.

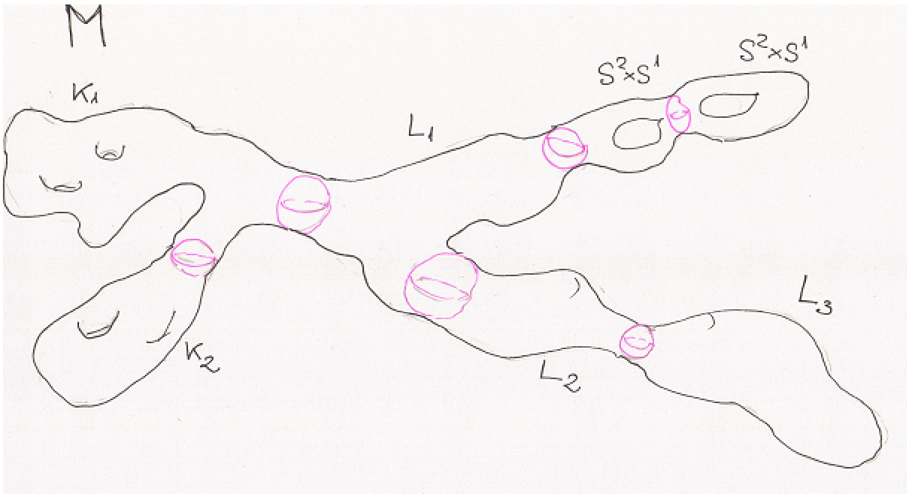
Sumę spójną dla rozmaitości trójwymiarowych konstruujemy podobnie jak w przypadku powierzchni, tylko zamiast kół wycinamy kule i sklejenia dokonujemy wzdłuż sfer. Przypomnijmy jeszcze raz, że przez rozmaitości zamknięte rozumie się rozmaitości spójne, zwarte i bez brzegu. Natomiast rozmaitości pierwsze są w pewnym sensie odpowiednikiem liczb pierwszych: rozmaitość pierwsza nie da się rozłożyć na sumę spójną prostszych składników. Inaczej, jeśli rozmaitość pierwszą przedstawimy jako sumę dwóch innych rozmaitości, to jedną z nich jest sfera trójwymiarowa, która w tym działaniu (gdy sumę spójną uznamy za działanie) pełni rolę elementu neutralnego. Twierdzenie Knesera sprowadza więc problem klasyfikacji do spisania kompletnej listy rozmaitości pierwszych. Jednak inaczej niż w przypadku dwuwymiarowym tych rozmaitości jest znacznie więcej i nie znano dobrej metody ich wyszukiwania. Kneser opisał możliwość rozkładu, lecz nie pokazał jak powinny wyglądać cegiełki rozkładu. Rozmaitości: S^3, $S^2 \times S^1$, przestrzeń

[3] Więcej o chirurgiach Dehna: Z. Pogoda *O chirurgiach konkretnie i abstrakcyjnie*, Zeszyty MSN 42 (I 2009), str. 13–22

rzutowa RP^3, przestrzenie soczewkowe są przykładami rozmaitości pierwszych, ale istnieje jeszcze wiele innych wymyślnych konstrukcji, jak choćby poprzez odpowiednie sklejanie ścian różnych wielościanów. Tak między innymi powstaje ciekawy przypadek – jedna ze sfer homologicznych, obiekt skonstruowany przez Poincarégo: sklejamy przeciwległe ściany dwunastościanu foremnego wcześniej przekręcając je nieco. Otrzymana rozmaitość ma pewne cechy sfery trójwymiarowej, choć, jak stwierdził, testując przy okazji użyteczność grupy podstawowej, sam Poincaré, ewidentnie nią nie jest.

W każdym razie ostatecznie stwierdzono, że rozkład rozmaitości M na sumę spójną może wyglądać następująco

$$M = (K_1\# \ldots \# K_p)\#(L_1\# \ldots \# L_q)\#(S^2 \times S^1\# \ldots \# S^2 \times S^1)$$



Rys. 5. Idea rozkładu na rozmaitości pierwsze

Kryterium wyróżnienia poszczególnych rodzin w sumie spójnej zadaje grupa podstawowa. Dla rozmaitości $S^2 \times S^1$ grupa jest cykliczna i nieskończona (wiadomo, że są to jedyne rozmaitości spełniające ten warunek). Rozmaitości z rodziny L_i mają grupę podstawową skończoną, a K_j – nieskończoną i niecykliczną. Ponadto przedstawiciele obu tych rodzin spełniają jeszcze warunek nieredukowalności, co oznacza, że każda sfera umieszczona w rozmaitości ogranicza kulę. Może to się wydawać dziwne, bo jesteśmy przyzwyczajeni, że tak jest zawsze. Jeśli jednak przypomnimy sobie, że na torusie istnieją okręgi niebędące brzegiem koła, to zrozumiemy, iż nieredukowalność wcale nie musi być oczywista. Można udowodnić zresztą, że wszystkie rozmaitości pierwsze są nieredukowalne z jednym jedynym wyjątkiem $S^2 \times S^1$. Tu każda sfera postaci $S^2 \times \{p\}$ nie ogranicza kuli. Obiekty typu L_i zostały zbadane dość dobrze. Już w latach trzydziestych XX wieku Karl Seifert opisał i w pełni sklasyfikował rozmaitości sferyczne. Są to rozmaitości powstające w wyniku działania pewnych grup skończonych (grup izometrii) na sferze S^3. Wygląda to mniej więcej tak. Rozważmy skończoną grupę (na przykład obroty o wielokrotności kąta $\frac{2\pi}{p}$, gdzie p jest liczbą całkowitą) działającą na S^3. Każdy z punktów sfery jest przekształcany na kilka punktów za pomocą przekształceń tej grupy. Jeśli przekształcenia zachowują się „porządnie”, to sklejając punkty wraz z ich obrazami (orbity), dostaniemy właśnie rozmaitość sferyczną.

Rozmaitości sferyczne mają tę sympatyczną własność, że ich grupą podstawowa jest identyczna z właśnie działającą grupą skończoną. Ze względu na fakt, iż jedynymi znanymi rozmaitościami z grupą skończoną są rozmaitości sferyczne, postawiono naturalną hipotezę, że to nie przypadek i innych rozmaitości z grupą skończoną nie ma. Gdyby hipoteza okazała się prawdziwa, to problem rozmaitości L_i byłby rozwiązany. Dzielnie jednak broniła się przed wymyślnymi atakami specjalistów. A i tak pozostała ogromna rodzina rozmaitości pierwszych z nieskończoną i niecykliczną grupą podstawową – czyli K_j.

W latach sześćdziesiątych XX wieku zauważono[4], że do rozkładu 3–rozmaitości na „mniejsze” składniki można wykorzystać nie tylko sfery, lecz również inne powierzchnie. Pierwszym kandydatem naturalnie stał się torus – najprostsza po sferze powierzchnia zamknięta. I odniesiono pewien sukces: analogicznie do twierdzenia Knesera prawdziwe jest twierdzenie o rozkładzie rozmaitości nieredukowalnej za pomocą torusów. Nie wchodząc w szczegóły twierdzenie to, często nazywane twierdzeniem JSJ[5], mówi, że w zamkniętej nieredukowalnej 3–rozmaitości można znaleźć skończoną rodzinę odpowiednio położonych torusów rozdzielających tę rozmaitość na zwarte 3–rozmaitości torusowo nieredukowalne i tak zwane rozmaitości włókniste Seiferta.

Torusowa nieredukowalność jest odpowiednikiem zwykłej sferycznej nieredukowalności. Rozmaitości włókniste Seiferta pojawiły się w tym samym czasie co rozmaitości sferyczne. Mówiąc znów niezbyt precyzyjnie są to rozmaitości, które dadzą się przedstawić jako sumy okręgów, a każdy z tych okręgów ma otoczenie torusowe spełniające ewentualnie dodatkowe warunki. Wiele rozmaitości ma tę cechę, a wśród nich sfera S^3, znana już $S^2 \times S^1$ i przestrzenie soczewkowe. Seifert podał pełny układ niezmienników charakteryzujących rozmaitości włókniste nazwane jego imieniem.

Taką sytuację zastał William Thurston pod koniec lat siedemdziesiątych. Przyjrzał się wnikliwie twierdzeniom o rozkładzie, sklasyfikowanym już rodzinom 3–rozmaitości i wykorzystał pewien stary pomysł pochodzący z czasów Poincarégo i Kleina. Mianowicie Poincaré i Klein zauważyli, że każdą z dwuwymiarowych powierzchni można jednoznacznie wyposażyć w jeden z trzech typów geometrii gwarantujący pewne porządne przedstawienie tejże powierzchni (stałą krzywiznę). Z punktu widzenia tych geometrii powierzchnia w każdym punkcie lokalnie wygląda jednakowo – tak się zachowuje zwykła płaszczyzna lub sfera. Wyróżnione geometrie to: geometria lokalnie euklidesowa (paraboliczna), hiperboliczna (nawiązująca do geometrii łobaczewskiego) i sferyczna (eliptyczna). Lokalnie euklidesowo wyglądają torus i butelka Kleina (płaszczyznę pomijamy jako niezwartą), sferycznie – naturalnie sfera i płaszczyzna rzutowa, a wszystkie pozostałe mogą być wyposażone w strukturę hiperboliczną.

W przypadku trójwymiarowym taka sytuacja jest możliwa. Nie da się każdej 3–rozmaitości wyposażyć w tak porządne geometrie. Thurston zauważył jednak, że wiele sklasyfikowanych rozmaitości z różnych rodzin dopuszcza jedną z, tym razem, ośmiu typów wzorcowych geometrii tak, że w otoczeniu każdego punktu rozmaitość wygląda jednakowo z punktu widzenia tych wyróżnionych geometrii – nazywa się to jednorodnością geometrii. Pojawił się więc pomysł, że może tylko te osiem typów wystarczy, gdy zastosujemy rozkład na sumę spójną, a następnie wzdłuż torusów. Thurston rzeczywiście udowodnił, że dla 3–rozmaitości istnieje dokładnie osiem typów geometrii spełniających warunek jednorodności.

Tak narodziła się hipoteza geometryzacyjna, która, mimo oczywistych analogii do przypadku dwuwymiarowego, zaskoczyła matematyków zmagających się z problemem klasyfikacji. Nikt nie spodziewał się, że metody geometryczne mogą okazać się przydatne w problemach topologicznych. Próby klasyfikacji 3–rozmaitości sprowadzały się głównie do wyszukiwania coraz to bardziej subtelnych narzędzi (niezmienników), przede wszystkim na gruncie topologii. Hipoteza geometryzacyjna, jeśli tylko jest prawdziwa, to rozstrzyga wiele starych problemów, między innymi klasyczną hipotezę Poincarégo[6] a także pytanie o rozmaitości sferyczne.

Thurstonowi udało się rozstrzygnąć hipotezę dla licznej rodziny 3–rozmaitości, wiele jednak broniło się skutecznie. W szczególności rozmaitości dopuszczające strukturę hiperboliczną (powstające między innymi przez odpowiednie sklejanie

---

[4] Ogromne zasługi w tej dziedzinie należą do Wolfganga Hakena, znanego przede wszystkim z dowodu twierdzenia o czterech barwach.
[5] Od nazwisk autorów Jaco, Shalen, Johansson
[6] Z. Pogoda, *Tensory*, Zeszyty MSN 45 (VII 2010)

ścian wielościanów) okazały się wyjątkowo oporne. Obecnie (2012 r.) już wiemy, że hipoteza geometryzacyjna jest twierdzeniem. Dzięki oryginalnym pomysłom Richarda Hamiltona, wyjątkowo lakonicznym pracom Perelmana oraz wysiłkom wielu matematyków udało się pokonać jeden z najważniejszych problemów topologii rozmaitości trójwymiarowych. Możemy stwierdzić, że sporo wiadomo o 3–rozmaitościach, nie znaczy to jednak, że wiemy już wszystko...