Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLVII Szkole Matematyki Poglądowej, *Ekstrema*, Nadarzyn, sierpień 2011.

O optymalnych stałych w nierówności Chinczyna

Piotr NAYAR, Warszawa

Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $r_1, r_2, \ldots, r_n$, gdzie

$$\mathbb{P}(r_i = \pm 1) = 1/2.$$

Takie zmienne losowe nazywamy symetrycznymi zmiennymi Bernoulliego lub rademacherami. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Będzie nas interesować zmienna losowa

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i.$$

Zmienne losowe tego typu mają istotne znaczenie między innymi w analizie fukcjonalnej, kombinatoryce, statystyce i fizyce teoretycznej.

Aleksander Chinczyn udowodnił (patrz [2]), że dla dowolnych liczb $p > q > 0$ istnieje stała $C_{p,q}$, dla której

$$(1) \qquad \left(\mathbb{E}|S|^p\right)^{1/p} \le C_{p,q} \left(\mathbb{E}|S|^q\right)^{1/q}.$$

Stała $C_{p,q}$ nie zależy od n i liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Przypomnijmy, że dla $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{E} f(r_1, \ldots, r_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{r_1, \ldots, r_n \in \{-1,1\}} f(r_1, \ldots, r_n).$$

Szukamy najmniejszej stałej $C_{p,q}$, dla której nierówność (1) jest spełniona dla wszystkich n i $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Innymi słowy, dla $p > q > 0$ szukamy

$$C^*_{p,q} = \sup_{n>0, |a_1|+\ldots+|a_n|>0} \frac{\left(\mathbb{E}|S|^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}|S|^q\right)^{1/q}},$$

gdzie

$$\mathbb{E}|S|^k = \frac{1}{2^n} \sum_{r_1, \ldots, r_n \in \{-1,1\}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right|^k.$$

Powyższe zagadnienie, jak również jego wielowymiarowe uogólnienia, były badane przez wielu autorów. Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy $p = 2$ lub $q = 2$. Zauważmy, że $\mathbb{E}|S|^2$ ma wyjątkowo prostą postać,

$$\mathbb{E}|S|^2 = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 r_i^2 + 2\mathbb{E} \sum_{i<j} a_i a_j r_i r_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

gdyż $\mathbb{E} r_i^2 = \mathbb{E} 1 = 1$ i $\mathbb{E} r_i r_j = \mathbb{E} r_i \mathbb{E} r_j$ dla $i < j$. Optymalne stałe $C^*_{2,q}$ i $C^*_{p,2}$ są znane (patrz Whittle, [5] i Haagerup, [1]).

My znajdziemy stałe $C^*_{p,q}$ w przypadku, gdy p i q są liczbami parzystymi (wynik pochodzi z pracy [3]). Będą nam potrzebne dwie definicje.

Definicja 1. *Ciąg liczb dodatnich $(a_i)_{i \ge 0}$ nazywamy log–wklęsłym jeśli $a_i^2 \ge a_{i-1} a_{i+1}$ dla $i \ge 1$.*

Definicja 2. *Symetryczną rzeczywistą zmienną losową X nazywamy ultra sub–gaussowską jeśli $X = 0$ p.n. lub ciąg $(\mathbb{E} X^{2n})/(2n-1)!!$ jest log–wklęsły.*

Skorzystamy z pewnego elementarnego lematu, którego dowód pozostawiamy jako zadanie (patrz [3]). Przyjmujemy konwencję $0! = 1$ i $(-1)!! = 1$.

Lemat 1. *(Walkup, [4]) Niech $(a_i)_{i \ge 0}$ i $(b_i)_{i \ge 0}$ będą ciągami log–wklęsłymi. Wówczas ciąg*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}, \quad n \ge 0$$

jest również log–wklęsły.

Udowodnimy teraz lemat będący prostą konsekwencją Lematu 1.

Lemat 2. *Niech X i Y będą dwiema niezależnymi rzeczywistymi ultra sub–gaussowskimi zmiennymi losowymi. Wówczas $X+Y$ jest również ultra sub–gaussowską zmienną losową.*

Dowód. Dla $n \geq 0$ niech

$$a_n = \frac{\mathbb{E}X^{2n}}{(2n-1)!!}, \quad b_n = \frac{\mathbb{E}Y^{2n}}{(2n-1)!!}, \quad a_n = \frac{\mathbb{E}(X+Y)^{2n}}{(2n-1)!!}.$$

Ciągi (a_n) i (b_n) są log–wklęsłe. Zmienne losowe X i Y są symetryczne i niezależne, zatem $\mathbb{E}X^iY^{2n-i} = \mathbb{E}X^i\mathbb{E}Y^{2n-i}$ oraz $\mathbb{E}X^i = 0$ dla i nieparzystych. Stąd

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{\mathbb{E}(X+Y)^{2n}}{(2n-1)!!} &= \frac{1}{(2n-1)!!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}\mathbb{E}(X^iY^{2n-i}) \\
&= \frac{1}{(2n-1)!!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(\mathbb{E}X^i)(\mathbb{E}Y^{2n-i}) = \frac{1}{(2n-1)!!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{2i}(\mathbb{E}X^{2i})(\mathbb{E}Y^{2n-2i}) \\
&= \frac{1}{(2n-1)!!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{2i}a_i(2i-1)!!\cdot b_{n-i}(2n-2i-1)!! = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}.
\end{aligned}$$

Teza wynika z Lematu Walkupa.

Nietrudno zauważyć, że zmienna ar, gdzie a jest liczbą rzeczywistą i r jest rademacherem, jest zmienną ultra sub–gaussowską. Faktycznie, dla

$$b_n = \frac{\mathbb{E}(ar)^{2n}}{(2n-1)!!}$$

mamy

$$b_n^2 = \frac{a^{4n}}{[(2n-1)!!]^2} \geq \frac{a^{4n}}{(2n-3)!!(2n+1)!!} = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Z Lematu 2 wnioskujemy, że zmienna losowa $S = \sum_{i=1}^n a_ir_i$ jest również ultra sub–gaussowska. Niech

$$c_n = \frac{(\mathbb{E}S)^{2n}}{(2n-1)!!}.$$

Mamy $c_0 = 1$. Mnożąc stronami nierówności $c_i^{2i} \geq c_{i-1}^ic_{i+1}^i$ dla $i = 1, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^n c_i^{2i} \geq \prod_{i=1}^n c_{i-1}^ic_{i+1}^i = \prod_{i=0}^{n-1}c_i^{i+1}\prod_{i=2}^{n+1}c_i^{i-1} = c_0c_1^2c_n^{n-1}c_{n+1}^n\prod_{i=2}^{n-1}c_i^{2i} = c_n^{n-1}c_{n+1}^n\prod_{i=1}^{n-1}c_i^{2i},$$

czyli $c_n^{2n} \geq c_n^{n-1}c_{n+1}^n$. Stąd $\sqrt[n]{c_n} \geq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$. Zatem ciąg $(\sqrt[n]{c_n})_{n\geq 0}$ jest nierosnący. Wynika stąd, że dla liczb parzystych $p > q > 0$ mamy

$$c_{p/2}^{2/p} \leq c_{q/2}^{2/q},$$

czyli

$$\frac{(\mathbb{E}S^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}S^q)^{1/q}} \leq \frac{\sqrt[p]{(p-1)!!}}{\sqrt[q]{(q-1)!!}} = \frac{(\mathbb{E}g^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}g^q)^{1/q}},$$

gdzie g jest standardową gaussowską zmienną losową o średniej 0 i wariancji 1. Biorąc $a_1 = \ldots = a_n = 1/\sqrt{n}$, czyli

$$S_n = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{\sqrt{n}},$$

przekonujemy się, że otrzymane oszacowanie jest optymalne, gdyż S_n zbiega do g według rozkładu (Centralne Twierdzenie Graniczne). W tym przypadku implikuje to zbieżność $\mathbb{E}S_n^p \to \mathbb{E}g^p$ dla $p > 0$.

W rzeczywistości udowodniliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 1. *Jeśli X_1, X_2, …, X_n są ultra sub–gaussowskimi rzeczywistymi zmiennymi losowymi, to dla liczb parzystych $p > q > 0$ prawdziwa jest nierówność*

$$(\mathbb{E}S^p)^{1/p} \leq \frac{\sqrt[p]{(p-1)!!}}{\sqrt[q]{(q-1)!!}}\cdot(\mathbb{E}S^q)^{1/q},$$

gdzie $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Do tej pory podaliśmy w zasadzie tylko jeden przykład zmiennej ultra sub–gaussowskiej – symetryczną zmienną Bernoulliego i sumy niezależnych zmiennych tego typu. Można jednak łatwo wskazać więcej przykładów tego typu zmiennych losowych. Zmienną X nazywamy dzielnikiem gaussowskim, jeśli $g = X \cdot R$, gdzie $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i R jest rzeczywistą zmienną losową niezależną od X. Okazuje się, że każdy dzielnik gaussowski jest ultra sub–gaussowską zmienną losową. Faktycznie, niech

$$a_i = \frac{\mathbb{E}X^{2i}}{(2i-1)!!} = \frac{\mathbb{E}X^{2i}}{\mathbb{E}g^{2i}}.$$

Wówczas

$$a_i = \left(\frac{\mathbb{E}X^{2i}}{\mathbb{E}g^{2i}}\right)^2 = \frac{1}{(\mathbb{E}R^{2i})^2} \geq \frac{1}{(\mathbb{E}R^{2i-2})(\mathbb{E}R^{2i+2})} = a_{i-1}a_{i+1},$$

na mocy nierówności Schwarza.

Rademacher jest dzielnikiem gaussowskim, bo $g \sim r \cdot |g|$, gdzie $|g|$ i r są niezależne. Możemy też zauważyć, że zmienna losowa X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1,1]$, czyli rozkładzie z gęstością $g(x) = I_{[-1,1]}(x)$, jest dzielnikiem gaussowskim. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $g \sim X \cdot R$, gdzie R jest zmienną losową niezależną od X, o gęstości

$$r(s) = \frac{1}{2}s^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2} \cdot I_{[0,\infty]}(s).$$

Oczywiście bez trudu można przekonać się, że X jest ultra sub-gaussowska, wyliczając

$$a_i = \frac{\mathbb{E}X^{2i}}{(2i-1)!!} = \frac{1}{(2i+1)!!}$$

i sprawdzając nierówność $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$.

Literatura

[1] U. Haagerup, *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math. 70, 231–283 (1982)

[2] A. Khintchine, *Über dyadische Brüche*, Math. Z. 18, 109–116 (1923)

[3] P. Nayar, K. Oleszkiewicz, *Khinchine type inequalities with optimal constants via ultra log–concavity*, przyjęto do Positivity (2011)

[4] D. W. Walkup, *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probab. 13, 76–85 (1976)

[5] P. Whittle, *Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent random variables*, Theory Probab. Appl. 5, 302–305 (1960)