Ekstremalność jako narzędzie do rozwiązywania zadań z matematyki

Michał KIEZA, Warszawa

Większość referatów na ostatniej Szkole Matematyki Poglądowej było poświęconych pewnym ekstremalnym obiektom. Okazuje się jednak, że ekstremalność może pełnić także rolę narzędzia do rozwiązywania problemów matematycznych, co przedstawił uczestnikom szkoły w swoim odczycie Krzysztof Oleszkiewicz. W niniejszym artykule postaram się przybliżyć na podstawie zadań z olimpiad matematycznych, jak skuteczną metodą w matematyce może być rozważanie elementów ekstremalnych.

Podstawą naszych rozważań będą bardzo proste obserwacje. Pierwsza z nich jest wręcz trywialna. Załóżmy, że mamy niepusty, skończony zbiór, którego elementy możemy jakoś porównywać. Wówczas istnieje zarówno element największy jak i element najmniejszy (przy czym oczywiście może być ich więcej niż jeden). Druga rzecz, z której będziemy korzystać to tzw. zasada minimum oraz zasada maksimum. Zasada minimum mówi, że w każdym zbiorze liczb całkowitych ograniczonym z dołu istnieje element najmniejszy (często formułuje się ją w języku liczb natualnych). Zasada maksimum orzeka zaś, że w każdym zbiorze liczb całkowitych ograniczonym z góry istnieje element największy. Te bardzo proste fakty odpowiednio użyte mogą prowadzić do wielu niebanalnych konsekwencji (trochę podobnie jak z zasadą szufladkową Dirichleta).

Przekonajmy się, jak to wszystko wygląda w praktyce. Zadania matematyczne, którymi będziemy się zajmować są pogrupowane w działy.

Algebra i analiza

Liczby rzeczywiste mają to do siebie, że można je porównywać. Zatem w dowolnym niepustym i skończonym zbiorze liczb rzeczywistych istnieje element największy oraz element najmniejszy. Wykorzystajmy tę prostą obserwację w pierwszym naszym przykładzie.

Zadanie 1. (37. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego)
Udowodnić, że jeżeli wielomian f nie równy tożsamościowo zeru spełnia dla każdego rzeczywistego x równość

$$f(x) \cdot f(x+3) = f(x^2 + x + 3),$$

to nie ma on pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że dany wielomian ma pierwiastki rzeczywiste. Każdy wielomian, który nie jest równy tożsamościowo zeru, ma skończenie wiele pierwiastków rzeczywistych. W takim razie w zbiorze pierwiastków wielomianu f możemy wybrać ten, który jest największy – oznaczmy go x_0. Wtedy na mocy zależności w treści zadania otrzymujemy

$$f(x_0) \cdot f(x_0+3) = f(x_0^2 + x_0 + 3),$$

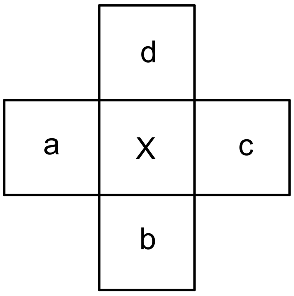
skąd wynika, że liczba $x_0^2 + x_0 + 3$ także jest pierwiastkiem wielomianu f. Jednakże $x_0^2 + x_0 + 3 > x_0$, co stoi w sprzeczności z tym, że liczba x_0 była największym pierwiastkiem. A zatem przypuszczenie, że zbiór pierwiastków wielomianu f jest niepusty, było fałszywe, co oznacza, że dany wielomian nie może mieć pierwiastków rzeczywistych.

Powyższe rozumowanie działa także w sytuacji ogólniejszej:

Jeśli wielomiany f i g nie równe tożsamościowo zeru spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$f(x) \cdot g(x) = f(x^2 + x + 3),$$

to wielomian f nie ma pierwiastków rzeczywistych.



Rys. 1. $4x \geq a+b+c+d$.

Skoro tak dobrze nam poszło ze zbiorem skończonym, to zmierzmy się teraz ze zbiorem nieskończonym. Oczywiście dowolny zbiór nieskończony nie musi posiadać elementu ekstremalnego, ale jeśli założymy, że jest to np. zbiór liczb całkowitych dodatnich, to w nim już musi istnieć element najmniejszy. Zobaczmy, jak tą obserwację wykorzystać w następnym przykładzie.

Zadanie 2.
W każde pole nieskończonej tabeli wpisano liczbę całkowitą dodatnią w ten sposób, że każda liczba jest nie mniejsza od średniej arytmetycznej liczb znajdujących się w polach sąsiednich (za pola sąsiednie uważamy pola stykające się z danym bokami). Dowieść, że wszystkie liczby wpisane w tej tabeli są równe.

Rozwiązanie. Rozważmy zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich, które pojawiają się w danej tabeli. Ponieważ w każdym zbiorze liczb całkowitych dodatnich istnieje element najmniejszy (zasada minimum), to istnieje taka liczba x wpisana w pewne pole tabeli, która jest najmniejsza. Niech a, b, c, d będą liczbami wpisanymi w pola sąsiednie. Przyjmijmy ponadto, że a ma najmniejszą wartość spośród tych czterech liczb. Wówczas

$$4x \geq a+b+c+d \geq 4a \geq 4x.$$

W takim razie $a = x$. Zatem $4a \geq a+b+c+d$, co wobec minimalności a daje $a = b = c = d = x$. Stąd wniosek, że wszystkie liczby wpisane w pola sąsiednie do pola z liczbą x również mają najmniejszą wartość wśród liczb wpisanych w pola tabeli. Powtarzając ten schemat przez prostą indukcję wykażemy, że wszystkie liczby w tabeli są równe x. To zaś kończy dowód.

Co ciekawe, teza pozostaje prawdziwa także jeśli zamiast liczb całkowitych dodatnich będziemy rozważać liczby rzeczywiste dodatnie, ale rozwiązanie wymaga znacznie bardziej zaawansowanych środków (tam już oczywiście nie można wykorzystać tej prostej zasady o elemencie ekstremalnym).

Wyróżnienie elementu ekstremalnego może także być bardzo pomocne w pewnym uporządkowaniu problemu. Ten pomysł jest często wygodną metodą dowodzenia nierówności i rozwiązywania równań. Doskonale to ilustrują dwa kolejne przykłady.

Zadanie 3. (56. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego)
Liczby a, b, c należą do przedziału $[0;1]$. *Udowodnić, że*

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że a jest największą spośród danych trzech liczb. Wtedy

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}-2 \leq \frac{a}{bc+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{bc+1}-2 =$$
$$= \frac{a+b+c-2bc-2}{bc+1} = \frac{(b-1)(1-c)+(a-1)-bc}{bc+1} \leq 0.$$

Zadanie 4. (57. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia trzeciego)
Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że liczby a, b, c, d, e spełniaja podany układ równań i że b jest największą z nich (nie tracimy ogólności, bo układ jest cykliczny). Wykażemy, że wówczas $b = d$. Przypuśćmy, przeciwnie, że $b > d$. Odejmując drugie równanie od równania pierwszego dostajemy $a^2 - b^2 = b^3 - d^3 > 0$, czyli

$$(a-b)(a+b) > 0.$$

Liczba a nie jest większa od liczby b; w takim razie $a-b<0$ oraz $a+b<0$. Ta ostatnia nierówność daje jednak wniosek, że $a^3+b^3<0$, w sprzeczności z równaniem $e^2=a^3+b^3$. Zatem istotnie $b=d$, co oznacza, że także d ma maksymalna wartość wśród pięciu niewiadomych. Powtarzając to rozumowanie stwierdzamy kolejno, że $d=a=c=e$. Dany w zadaniu układ równań sprowadza się zatem do rozwiązania równania $a^2=2a^3$, skąd otrzymujemy $a=0$ lub $a=\frac{1}{2}$. Bezpośrednio również sprawdzamy, że otrzymane piątki

$$(0,0,0,0,0) \quad \text{oraz} \quad (1/2,1/2,1/2,1/2,1/2)$$

spełniają dany układ równań.

Podczas prac komisji zadniowej panowała opinia, że zadanie powinno pełnić rolę najłatwiejszego na finale. Jednak rzeczywistość okazała się zupełnie inna – zadanie plasowało się w grupie zadań średnich. Poprawnie rozwiązało je jedynie 41 uczestników (na 125), zaś aż 74 uzyskało ocenę 0. Nie zrobiło go wielu dobrych uczestników, którzy odnosili sukcesy w zawodach olimpijskich. Prawdopodobnie więc ten chwyt wcale nie jest taki typowy dla olimpijczyków, zaś jego zastosowanie bardziej świadczyło o pomysłowości niż wytrenowaniu. Powiedzmy też, że bardzo wielu uczestników dodawało wszystkie równania stronami i rozważało znak wyrażenia

$$2x^2\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

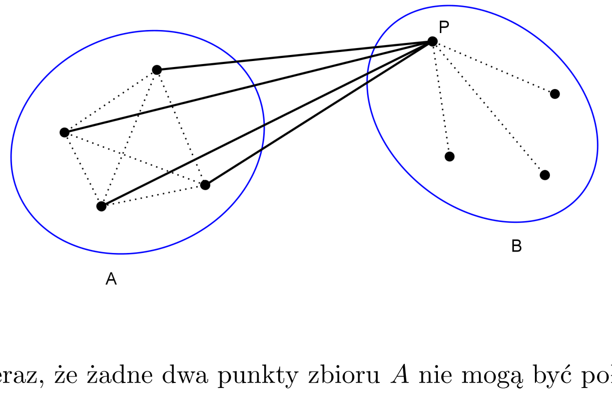
Takie podejście działa jednak tylko w przypadkach, gdy wszystkie zmienne należą do jednego z przedziałów $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ oraz $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ i nie pozwala się uogólnić.

Kombinatoryka

Ekstremalność ma także szerokie zastosowanie w kombinatoryce. Nasz pierwszy przykład pochodzi z teorii grafów. Można go rozwiązać za pomocą nierówności między średnimi, jednak wyróżnienie pewnego „ekstremalnego” wierzchołka pozwala natychmiast kombinatorycznie pokonać problem.

Zadanie 5.
Na płaszczyźnie danych jest n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Punkty te połączono odcinkami, przy czym żadne trzy nie tworzą trójkąta. Wykazać, że liczba poprowadzonych odcinków jest nie większa niż $\frac{1}{4}n^2$.

Rozwiązanie. Spośród wszystkich punktów wybierzmy ten punkt P, z którego wychodzi największa liczba odcinków (jeśli jest ich kilka, to wybierzmy dowolny z nich). Niech m będzie liczbą tych odcinków. Oznaczmy przez A zbiór wszystkich punktów, które są połączone z punktem P, zaś przez B zbiór pozostałych (łącznie z P).



Rys. 2.

Zauważmy teraz, że żadne dwa punkty zbioru A nie mogą być połączone, bowiem wraz z punktem P byłyby wierzchołkami pewnego trójkąta. W takim razie każdy poprowadzony odcinek ma jeden koniec w punkcie ze zbioru B. Ponieważ tych punktów jest $n-m$, a z każdego z nich może wychodzi nie więcej niż m odcinków, to liczba K poprowadzonych odcinków spełnia nierówność

$$K \le m(n-m) = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2}-m\right)^2 \le \frac{n^2}{4}.$$

Dowód jest zakończony.

A oto inny przykład używania pojęcia ekstremalności w grafach.

Zadanie 6. (55. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego) *Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.*

Rozwiązanie. Dla wygody wprowadźmy następującą terminologię powszechnie używaną w teorii grafów.

Ścieżka – ciąg osób A_1, A_2, ..., A_k, że A_1 zna A_2, A_2 zna A_3, ..., A_{k-1} zna A_k.

Cykl – ciąg osób A_1, A_2, ..., A_k, że osoba A_1 zna A_2, A_2 zna A_3, ..., A_{k-1} zna A_k oraz A_k zna A_1.

Klika – grupa osób, w której każde dwie się znają (jedna osoba też tworzy klikę).

Udowodnimy znacznie więcej – mianowicie istnieje albo cykl długości n albo wszystkie osoby można podzielić na dwie kliki (jasne, że ten wynik implikuje tezę zadania).

Wybierzmy najdłuższą ścieżkę A_1, A_2, ..., A_k. Dalsze rozumowanie przeprowadzimy rozważając dwa przypadki: $k < n$ i $k = n$.

Załóżmy najpierw, że $k < n$. Niech B będzie dowolną z pozostałych osób. W trójce A_1, A_k, B pewne dwie osoby się znają. Ponieważ jednak B nie może znać się ani z A_1 ani z A_k (w przeciwnym razie otrzymalibyśmy dłuższą ścieżkę), to osoby A_1 i A_k się znają. Przypuśćmy teraz, że pewne osoby A_i oraz A_j w tej ścieżce się nie znają. Wtedy osoba B znałaby jedną z nich i dołączając ją do grupy osób $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dostajemy dłuższą ścieżkę wbrew poczynionemu założeniu. Zatem dowolne dwie osoby spośród $A_1, A_2, \ldots, A_k$ się znają. Wykażemy teraz, że pozostałe osoby tworzą drugą klikę. Możemy założyć, że są w niej co najmniej dwie osoby, gdyż w przeciwnym razie nie ma czego dowodzić. Wybierzmy dowolne dwie osoby B_i i B_j z tej grupy oraz A_1. Jak już wcześniej stwierdziliśmy osoba A_1 nie może znać żadnej z nich. To oznacza, że B_i i B_j się znają, a skoro wybraliśmy je dowolnie, to zbiór pozostałych osób również tworzy klikę.

Załóżmy teraz, że $k = n$. Jeśli osoby A_1 i A_n się znają, to owa ścieżka jest cyklem długości n i mamy tezę zadania. Przyjmijmy więc, że A_1 i A_n się nie znają. W takim razie dla dowolnego $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ osoba A_i zna którąś z A_1 i A_n. Zauważmy przy tym, że dla $k < l$ nie może zajść następująca sytuacja: osoba A_1 zna A_l i osoba A_n zna A_k. Wówczas bowiem otrzymalibyśmy następujący cykl długości n:

$$A_1 - A_2 - \ldots - A_k - A_n - A_{n-1} - \ldots - A_l - A_1.$$

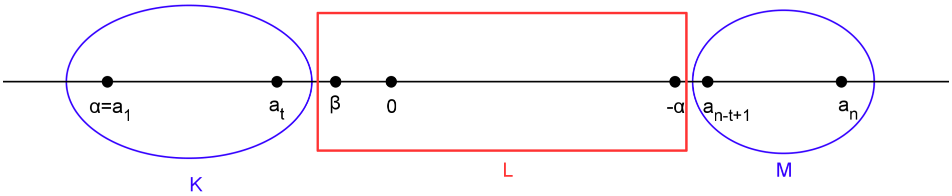
Niech więc k będzie największą taką liczbą, że A_1 zna A_k. Wówczas A_1 zna też wszystkie osoby A_i dla $i < k$ (analiza trójek A_1, A_i, A_n) oraz nie zna żadnej z osób A_i dla $i > k$. Podobnie stwierdzamy, że A_n zna wszystkie osoby A_i dla $i > k$ i być może również osobę A_k oraz nie zna żadnej z osób A_i dla $i < k$. Wykażemy, że osoby $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tworzą klikę. Wybierzmy dowolne dwie osoby A_i, A_j (gdzie $1 \leq i$ i $i + 1 < j < k$). W trójce A_i, A_j, A_n pewne dwie się znają, a skoro A_n nie zna żadnej z pierwszych dwóch, to A_i i A_j muszą się znać. To kończy dowód, że osoby $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tworzą klikę. Tak samo pokazujemy, że osoby $A_{k+1}, \ldots, A_n$ również tworzą klikę. Dowód jest zakończony.

Na koniec znów przykład, w którym wyróżnienie elementu ekstremalnego pozwala bardzo dobrze uporządkować problem.

Zadanie 7. (61. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego) *Dany jest n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geq 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.*

Rozwiązanie. Przez $\sum(S)$ będziemy oznaczać sumę elementów zbioru liczbowego S. Ponieważ dodanie tej samej liczby do wszystkich elementów danego n-elementowego zbioru X nie wpływa na warunki zadania, więc możemy bez utraty ogólności rozumowania przyjąć, że $\sum(X) = 0$. Musimy dowieść istnienia co najmniej $n-1$ dwuelementowych zbiorów $S \subset X$, dla których $\sum(S) = 0$.

Niech α oznacza najwieksza liczbę w zbiorze X. Jeżeli wszystkie elementy X są równe co najmniej $-\alpha$, to każdy z $n-1$ zbiorów postaci $\{-\alpha, x\}$, gdzie $x \in X \setminus \{\alpha\}$, ma nieujemną sumę elementów i teza zadania jest spełniona. Niech więc zbiór M liczb należących do X i mniejszych od $-\alpha$ ma $t > 0$ elementów i niech K będzie zbiorem t największych liczb w zbiorze X (zauważmy, że M jest zbiorem t najmniejszych liczb).



Rys. 3. Liczby $\alpha = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ są elementami zbioru X uporządkowanymi w sposób malejący.

Jest jasne, że
$$\sum(M) < -t\alpha \quad \text{oraz} \quad \sum(X \setminus M) \leq (n-t)\alpha.$$
Otrzymujemy stąd
$$0 = \sum(X) = \sum(M) + \sum(X \setminus M) < -t\alpha + (n-t)\alpha = (n-2t)\alpha,$$
skąd $n > 2t$. Wobec tego zbiory K i M są rozłączne, a zbiór $L = X \setminus (K \cup M)$ jest niepusty. Ponadto nierówności
$$\sum(M) < -t\alpha \quad \text{i} \quad \sum(K) \leq t\alpha$$
wskazują, że $\sum(K \cup M) < 0$, czyli $\sum(L) > 0$. Wobec tego największy element β zbioru L jest liczbą dodatnią.

Wszystkie liczby w zbiorze K są dodatnie, gdyż są większe od β. Zatem każdy dwuelementowy podzbiór S zbioru $(t+1)$-elementowego $K \cup \{\beta\}$ spełnia nierówność $\sum(S) > 0$. Ponadto wszystkie elementy zbioru L są równe co najmniej $-\alpha$, co daje $\sum(\{\alpha, x\}) \geq 0$ dla x będącego dowolnym z $n-2t-1$ elementów zbioru $L \setminus \{\beta\}$. Liczba otrzymanych w ten sposób dwuelementowych podzbiorów o nieujemnej sumie elementów wynosi
$$\binom{t+1}{2} + (n-2t-1) = \frac{1}{2}t(t-3) + n - 1.$$
Jezeli $t \geq 3$, to powyższa liczba jest równa co najmniej $n-1$ i rozwiązanie zadania jest zakończone. Natomiast dla $t = 1$ lub $t = 2$ mamy $\frac{1}{2}t(t-3) = -1$ i do dokończenia rozwiązania należy wskazać jeszcze jeden, różny od wymienionych powyżej, dwuelementowy podzbiór o nieujemnej sumie elementów. Jednak na mocy nierówności $n \geq 6$ dostajemy
$$n - 2t \geq 6 - 2 \cdot 2 = 2.$$
Zbiór L ma zatem przynajmniej 2 elementy i nierówność $\sum(L) > 0$ dowodzi, że szukanym podzbiorem jest zbiór dwóch największych elementów zbioru L. To kończy rozwiązanie.

Teoria liczb

Przejdźmy teraz do kilku przykładów z teorii liczb. Pierwszy z nich jest bardzo prosty, lecz ma bardzo ważne konsekwencje.

Zadanie 8.
Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś a dowolną liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Niech ponadto n będzie najmniejszą taką liczbą, że

$$a^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wtedy $n|p-1$.

Rozwiązanie. Oczywiście $n \leq p-1$, bowiem w myśl małego twierdzenia Fermata

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jeśli n nie dzieli $p-1$, to wykonując dzielenie z resztą otrzymujemy, że $p-1 = kn + l$ dla pewnych liczb całkowitych k i $l > 0$. Wtedy korzystając ponownie z małego twierdzenia Fermata oraz założeń zadania dostajemy

$$1 \equiv a^{p-1} = a^{kn+l} \equiv a^l \pmod{p}.$$

W takim razie znaleźliśmy mniejszą potęgę liczby a dającą resztę 1 modulo p wbrew poczynionemu założeniu.

W bardzo podobny sposób możemy udowodnić następujący rezultat.

Załóżmy, że mamy daną liczbę całkowitą dodatnią n oraz liczbę całkowitą a z nią względnie pierwszą. Niech k będzie najmniejszą taką liczbą, że

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Wtedy jeśli

$$a^l \equiv 1 \pmod{n},$$

to $k|l$.

Te dwa proste fakty są niezwykle ważne, gdyż pokazują, że reszty potęg liczby całkowitej z dzielenia przez liczbę z nią względnie pierwszą mają strukturę grupy cyklicznej. Spróbujmy je wykorzystać do rozwiązania znacznie trudniejszego zadania.

Zadanie 9.
Wykazać, że nie istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, że $n|2^n - 1$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieje liczba całkowita $n > 1$, dla której zachodzi podzielność $n|2^n - 1$. Wybierzmy najmniejszy dzielnik pierwszy p liczby n. Wówczas założona podzielność pociąga za sobą kongruencję

$$2^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Niech teraz s będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że

$$2^s \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wówczas jednocześnie $s|p-1$ oraz $s|n$, skąd wniosek, że $s|\mathrm{NWD}(n, p-1)$. Jednakże liczba p była najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n, skąd wynika, że n nie może mieć już żadnych wspólnych dzielników pierwszych z $p-1$. W takim razie $\mathrm{NWD}(n, p-1) = 1$, czyli $s = 1$. To jednak oznacza, że

$$2 \equiv 1 \pmod{p},$$

a to jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie może istnieć taka liczba całkowita $n > 1$, dla której zachodzi podzielność $n|2^n - 1$.

Jak widać znów wykorzystanie elementu ekstremalnego okazało się kluczowe. Bez niego nawet mając dwie wcześniejsze obserwacje kręcilibyśmy się w kółko nie mogąc nic udowodnić. Dodajmy jeszcze, że jeśli zastąpilibyśmy 2 większą liczbą, to teza przestaje by prawdziwa.

Kolejny nasz przykład dotyczy badania sum cyfr wielokrotności pewnej liczby. Zastosowanie ekstremalności wydaje się tutaj dość nieoczekiwane, co nieco powinno tłumaczyć fakt, że to zadanie sprawia dość spore problemy olimpijczykom.

Zadanie 10.
Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką może przyjąć suma cyfr dodatniej wielokrotności liczby $10^k - 1$.

Rozwiazanie. Odpowiedź: $9k$.
Suma cyfr liczby $10^k - 1$ jest oczywiście równa $9k$. Wystarczy więc udowodnić, że założenie istnienia wielokrotności liczby $10^k - 1$ o mniejszej sumie cyfr prowadzi do sprzeczności. Niech więc n będzie najmniejszą dodatnią wielokrotnością liczby $10^k - 1$ o sumie cyfr mniejszej niż $9k$. Wówczas $n > 10^k$ i liczba n nie jest podzielna przez 10. Ponadto zapis dziesiętny liczby n nie może rozpoczynać się k cyframi 9, gdyż w przeciwnym razie suma cyfr liczby n przekraczałaby $9k$. Niech m będzie największą liczbą postaci $(10^k - 1)10^l$ (gdzie $l \geq 0$), która jest mniejsza od n. Liczba $n - m$ jest dodatnia, mniejsza od n i podzielna przez $10^k - 1$. Ponadto liczba m ma o jedną cyfrę mniej niż n. Jeśli więc a_1, a_2, ..., a_{k+1} są pierwszymi $k + 1$ cyframi liczby n, to różnica między sumami cyfr liczb n oraz $n - m$ jest taka sama jak różnica między sumami cyfr liczb $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}}$ oraz $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}} - \overline{99 \ldots 99}$. Ta ostatnia liczba powstaje jednak przez zwiększenie o jeden liczby, której kolejnymi cyframi są $a_1 - 1$, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}. Wobec tego suma cyfr tej liczby nie może przekraczać

$$(a_1 - 1) + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} + 1,$$

czyli – sumy cyfr liczby $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}}$. W takim razie suma cyfr liczby $n - m$ nie przekracza sumy cyfr n, co wszakże przeczy określeniu liczby n. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Dodajmy na koniec, że rozważanie elementów ekstremalnych pojawia się także w tak zwanej metodzie regresji, o której wspomnimy oddzielnie w ostatnim rozdziale.

Geometria

Przejdźmy teraz do ostatniego typu zadań – do geometrii. Istnieje tutaj wiele bardzo wdzięcznych zadań na, często bardzo nieoczywiste, zastosowanie ekstremalności. Rozpocznijmy od poniższego zadania pochodzącego z zawodów II stopnia 33. Olimpiady Matematycznej. Rozważmy je dla uproszczenia w wersji na płaszczyźnie (na zawodach pojawiła się wersja przestrzenna, którą robi się identycznie).

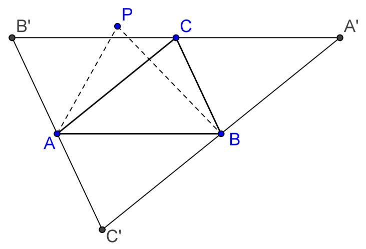
Zadanie 11. (33. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego)
Niech A będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie mającym tę własność, że dla dowolnych jego punktów P i Q istnieje izometria przestrzeni przeprowadzająca zbiór A na zbiór A oraz punkt P na punkt Q. Udowodnić, że istnieje okrąg przechodzący przez wszystkie punkty zbioru A.

Rozwiązanie. Niech K będzie kołem o najmniejszym promieniu zawierającym zbiór A. Wykażemy, że w dowolnej izometrii zachowującej zbiór A koło K przechodzi na siebie. Gdyby bowiem tak nie było, to dla pewnej izometrii f mielibyśmy $f(A) = A$ i $f(K) = K_1$. Wtedy jednak zbiór A byłby zawarty w zbiorze $K \cap K_1$. Część wspólna dwóch różnych kół o tym samym promieniu jest zawarta w kole o promieniu mniejszym. To przeczy jednak temu, że K jest najmniejszym kołem zawierającym A. Zatem każda izometria przeprowadzająca A na siebie przekształca też środek S koła K na siebie. W szczególności rozważając izometrię zachowującą zbiór A i przeprowadzającą punkt P na Q oraz Q na P stwierdzamy, że $PS = QS$. Stąd wniosek, że wszystkie punkty zbioru A leżą na okręgu o środku S.

Zauważmy, że w powyższym rozwiązaniu nie korzystaliśmy ze skończoności zbioru A, lecz jedynie z tego, że jest ograniczony.

A oto inny przykład zastosowania ekstremalności w zadaniu geometrycznym.

Zadanie 12.
Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż 1. Wykazać, że ten zbiór jest zawarty w pewnym trójkącie o polu nie większym niż 4.



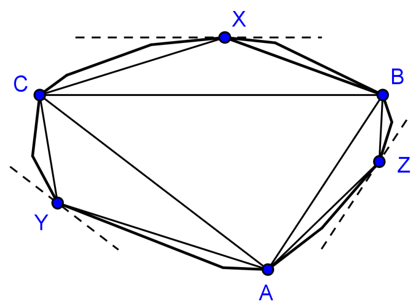
Rys. 4.

Rozwiązanie. Skoro zbiór punktów jest skończony, to skończony jest też zbiór wszystkich trójkątów o wierzchołkach w tych punktach. Wybierzmy w nim więc trójkąt ABC o największym polu (jeśli jest ich kilka, to weźmy dowolny z nich). Następnie przez każdy z jego wierzchołków poprowadźmy prostą równoległą do przeciwległego boku otrzymując trójkąt $A'B'C'$. Zauważmy, że trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w środku ciężkości ABC i skali -2. Skoro pole trójkąta ABC było nie większe niż 1, to pole $A'B'C'$ jest nie większe niż 4. Udowodnimy, że wszystkie punkty danego zbioru leżą w trójkącie $A'B'C'$. Gdyby tak nie było, to pewien punkt P leży np. po przeciwnej stronie $A'B'$ niż odcinek AB. Wówczas jednak pole trójkąta ABP byłoby większe niż pole trójkąta ABC, co przeczyłoby temu, że ten ostatni był trójkątem o największym polu. To zaś oznacza, że wszystkie punkty istotnie leżą w trójkącie $A'B'C'$.

Okazuje się, że ten motyw z braniem trójkąta o największym polu jest bardzo skuteczną techniką. Jednym z przykładów jej zastosowania jest następujące dość trudne zadanie, które pojawiło się na finale 56. Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 13. (56. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia trzeciego)
Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż 3/4.

Rozwiązanie.
Sposób I. Jeśli liczba wierzchołków danego wielokąta jest nie większa niż 6 to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie spośród wierzchołków danego wielokąta $\mathcal{W}$ wybieramy trzy A, B i C będące wierzchołkami trójkąta o największym polu, równym s. Niech X będzie punktem wielokąta $\mathcal{W}$, leżącym po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A i oddalonym najdalej od prostej BC. Analogicznie definiujemy punkty Y i Z. Wykażemy, że pole sześciokąta $AZBXCY$ jest nie mniejsze niż 3/4. Oczywiście tak skonstruowany sześciokąt może być zdegenerowany do wielokąta o mniejszej liczbie wierzchołków (np. gdy jeden z boków trójkąta ABC jest bokiem wielokąta $\mathcal{W}$). Jednakże jeśli liczba wierzchołków wielokąta $\mathcal{W}$ jest równa co najmniej 7, to zawsze będziemy mogli otrzymany zdegenerowany sześciokąt $AZBXCY$ powiększyć już do prawdziwego sześciokąta.

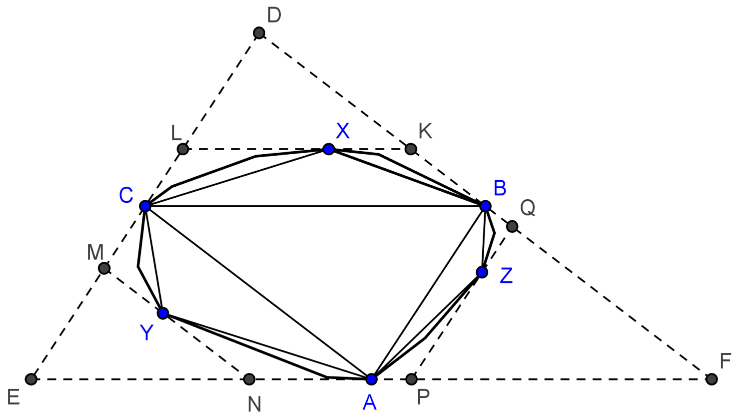


Rys. 5.

Przez punkty A, B i C poprowadźmy proste równoległe odpowiednio do prostych BC, CA i AB wyznaczające trójkąt o wierzchołkach D, E, F. Z faktu, że trójkąt ABC ma największe pole spośród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w wierzchołkach wielokąta $\mathcal{W}$ wynika, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest zawarty w trójkącie DEF.

Niech s będzie polem trójkąta ABC, wtedy każdy z trójkątów BCD, CAE i ABF również ma pole równe s. Przez x, y, z oznaczmy zaś odpowiednio pola trójkątów BCX, CAY i ABZ. Mamy wykazać, że $x + y + z + s \geq 3/4$.

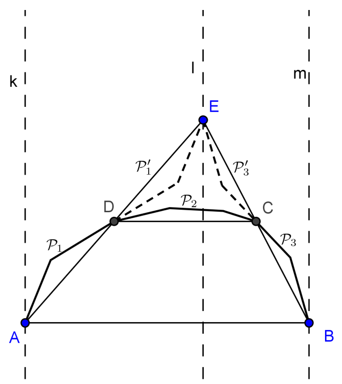
Nietrudno obliczyć, że
$$[CBKL] = 2x - \frac{x^2}{s}, \quad [CANM] = 2y - \frac{y^2}{s}, \quad [ABQP] = 2z - \frac{z^2}{s}.$$
Pole sześciokąta $KLMNPQ$ jest więc równe
$$s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2+y^2+z^2}{s}.$$
A skoro ten sześciokąt zawiera wielokąt $\mathcal{W}$, to powyższe wyrażenie jest nie mniejsze niż 1. Zadanie będzie więc rozwiązane, jeśli wykażemy, że
$$x + y + z + s \geq 3/4\left(s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2+y^2+z^2}{s}\right),$$
co jest równoważne
$$(3x-s)^2 + (3y-s)^2 + (3z-s)^2 \geq 0.$$



Rys. 6.

A oto inne podejście do rozwiązania tego samego zadania.

Sposób II. Spośród wszystkich odcinków łączących wierzchołki danego wielokąta wybierzmy najdłuższy. Jeśli jest on bokiem wielokąta, to z dalszego rozumowania wyniknie, że zawiera on czworokąt wypukły o polu równym co najmniej 3/4, który będziemy mogli rozszerzyć do sześciokąta. Załóżmy więc, że dany odcinek jest przekątną wielokąta (załóżmy, że A i B są jej końcami). Wówczas dzieli on go na dwa mniejsze wielokąty – $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$. Wykażemy teraz, że wielokąt $\mathcal{W}_1$ zawiera czworokąt o polu nie mniejszym niż 3/4 pola wielokąta $\mathcal{W}_1$, którego jednym z boków jest wspomniana wcześniej przekątna. To samo rozumowanie przeprowadzimy dla wielokąta $\mathcal{W}_2$ i z tak otrzymanych dwóch czworokątów dostaniemy sześciokąt, o który chodzi.

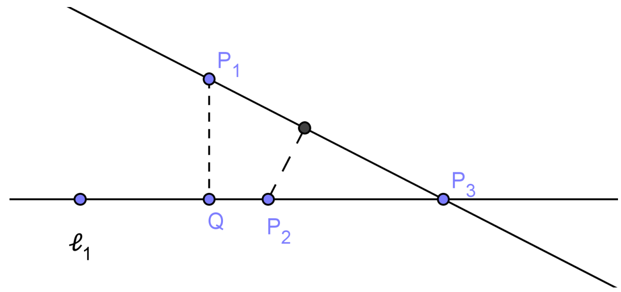


Rys. 7.

Na obwodzie wielokąta $\mathcal{W}_1$ wybierzmy teraz takie punkty C i D, że $CD||AB$ i $2CD = AB$. Wykażemy, że
$$[ABCD] \geq 3/4 \cdot [\mathcal{W}_1].$$
Niech E będzie punktem przecięcia się prostych AD i BC. Wtedy pole trojkąta ABE jest równe 4/3 pola czworokąta $ABCD$ i wystarczy dowieść, że jest ono nie mniejsze niż pole wielokąta $\mathcal{W}_1$. Wielokąt $\mathcal{W}_1$ składa się z czterech części: trapezu $ABCD$ oraz wielokątów wypukłych $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ odciętych odpowiednio przekątnymi AD, CD, BC. Wystarczy więc dowieść, że pole trójkąta CDE jest nie mniejsze niż suma pól trzech ostatnich wielokątów. Niech k, l, m będą prostymi prostopadłymi do AB przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, E, B. Ponadto niech $\mathcal{P}_1'$ i $\mathcal{P}_3'$ będą wielokątami symetrycznymi do $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_3$ względem punktów D i C. Ponieważ odcinek AB był najdłuższym spośród wszystkich łączących wierzchołki wyjściowego wielokąta, to wielokąt $\mathcal{W}_1$ zawiera się między prostymi k i m. W takim razie prosta l rozdziela oba wielokąty $\mathcal{P}_1'$ i $\mathcal{P}_3'$. Dodatkowo wypukłość wielokąta $\mathcal{W}_1$ implikuje, że wielokąt $\mathcal{P}_2$ jest rozłączny z każdym z wielokątów $\mathcal{P}_1'$ i $\mathcal{P}_3'$, a to oznacza, że suma tych pól tych trzech wielokątów nie może przekraczać pola trójkąta CDE

Zadanie 14. (Problem Sylvestera)
Na płaszczyźnie danych jest $n \geq 3$ punktów. Wiadomo, że każda prosta, która przechodzi przez dwa z tych punktów, przechodzi jeszcze przez trzeci z nich. Wykazać, że wszystkie dane punkty leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy zbiór $\mathcal{L}$ wszystkich prostych przechodzących przez co najmniej dwa punkty spośród n rozważanych. W zbiorze par $(\mathcal{L}, P)$ (gdzie P jest jednym z n danych punktów) wybierzmy tą (ℓ_1, P_1), dla której odległość punktu P_1 od prostej $\ell_1 \in \mathcal{L}$ jest najmniejsza (istnieje, bo jest to zbiór skończony).



Rys. 8.

Niech Q będzie punktem na prostej ℓ_1 najbliższym punktowi P_1. Gdyby na prostej ℓ_1 istniały trzy punkty spośród rozważanych, to pewne dwa spośród nich P_2 i P_3 leżą po tej samej stronie punktu Q – jak pokazano na rysunku 8 (być może jeden z nich się pokrywa z Q). Wówczas odległość punktu P_2 od P_1P_3 jest mniejsza niż P_1Q.

Porządkowanie rozumowań

Okazuje się, że wyróżnienie elementu ekstemalnego może być wykorzystane do zgrabnego i uporządkowanego zapisania dowodu. Dotyczy to między innymi niektórych rozumowań indukcyjnych, metody półniezmienników czy metody regresji

Rozpocznijmy od dość dobrze znanej zasady indukcji. Jak wiadomo jest ona równoważna zasadzie minimum. Zdarza się, że zamiast przeprowadzać dowód indukcyjny znacznie zgrabniej jest się właśnie posłużyć zasadą minimum. Oto przykład.

Zadanie 15.
Dany jest ciąg (b_n) określony wzorami

$$b_1 = b_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wykazać, że ciąg (b_n) nie zawiera wyrazów podzielnych przez 6.

Jeśli chcielibyśmy się posłużyć jakąś typową indukcją, to należałoby najpierw przeanalizować potencjalne pary reszt modulo 6, jakie dają dwa kolejne wyrazy ciągu (b_n), a potem wykorzystać ich okresowość. Potencjalnie może ich być sporo (zwłaszcza jeśli inaczej dobralibyśmy dane), co sprawia, że takie rozumowanie staje się albo bardzo uciążliwe albo wręcz niewykonalne. Jednak pomysłowe wykorzystanie metody dowodzenia nie wprost oraz zasady minimum pozwala pokonać problem bez żadnych trudności.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa. Zbiór elementów ciągu (b_n) podzielnych przez 6 jest więc niepusty, a zatem posiada element najmniejszy b_k. Ponadto $k \geq 3$, bowiem elementy b_1 i b_2 nie są podzielne przez 6. Zatem korzystając z zależności wnosimy, że $6|b_{k-1} + 6b_{k-2}$ albo $6|b_{k-1}$. Otrzymujemy sprzeczność, bowiem otrzymaliśmy mniejszy element ciągu (b_n) podzielny przez 6.

Ekstremalność bywa także pomocna w zgrabnym zapisaniu rozwiązania opartego na metodzie półniezmienników. Załóżmy, że w danym zadaniu występuje pewien proces albo my sami konstruujemy ten proces w rozwiązaniu. Wówczas metoda polega na znalezieniu pewnej wielkości, która się zmienia kontrolowanie i dziki której możemy wyciągnąć pewne wnioski (np., że procesu nie można kontynuować w nieskończoność albo że doprowadzi on nas w końcu do oczekiwanej przez nas sytuacji). Często zgrabne zapisanie takiego rozwiązania nastręcza wielu kłopotów i wtedy dobrze jest wykorzystać ekstremalność. Oto przykład.

Zadanie 16.
Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów – n białych i n czarnych (żadne trzy nie leżą na jednej prostej). Udowodnić, że można tak połączyć je n odcinkami, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów i aby żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

Rozwiązanie. Niech B_i będą punktami białymi, zaś C_i czarnymi. Połączmy najpierw punkt B_i z punktem C_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Przypuśćmy, że istnieją odcinki, które się przecinają – np. B_1C_1 i B_2C_2. Wówczas naturalne jest zamienić je na B_1C_2 i B_2C_1 (które są bokami czworokąta o przekątnych B_1C_1 i B_2C_2). Taka operacja może jednak zwiększyć liczbę punktów przecięcia. Jednakże należy zauważyć, że ta operacja zmniejszyła sumę długości wszystkich odcinków. Ponieważ ta suma może przyjmować jedynie skończenie wiele wartości, to opisany proces musi się kiedyś zakończyć.

Powyższe rozwiązanie można zapisać znacznie zgrabniej. Połączmy tak punkty białe i czarne, że suma długości wszystkich otrzymanych odcinków jest najmniejsza (taka istnieje, bowiem wszystkich sum jest skończenie wiele). Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że są to odcinki B_1C_1, B_2C_2, …, B_nC_n. Przypuśćmy, że pewne dwa odcinki się przecinają – np. B_1C_1 i B_2C_2. Wtedy źczymy punkty odcinkami B_1C_2, B_2C_1, B_3C_3, …, B_nC_n – suma ich długości jest mniejsza niż poprzednia, co stoi w sprzeczności z poczynionym założeniem.

Na koniec przejdźmy do wspomnianej już metody regresji. Podobnie jak w metodzie półniezmienników także i tutaj zazwyczaj konstruujemy pewien proces, który nie może się zatrzymać. Zobaczmy to dokładniej na przykładzie.

Zadanie 17.
Udowodnić, że równanie

$$2a^2 + 3b^2 = c^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że liczby a, b, c są rozwiązaniem danego równania. Kwadraty liczb całkowitych dają reszty 0 lub 1 z dzielenia przez 3. Badając dane równanie modulo 3 stwierdzamy, że $2a^2 \equiv c^2 \pmod 3$. W takim razie $a = 3a_1$ i $c = 3c_1$. wstawiając to do danego równania i dzieląc przez 3 dostajemy

$$6a_1^2 + b^2 = 3c_1^2.$$

Stąd wniosek, że $b = 3b_1$, więc

$$2a_1^2 + 3b_1^2 = c_1^2.$$

Otrzymaliśmy równanie identyczne z wyjściowym. Zatem jeśli liczby a, b, c są rozwiązaniem danego równania, to również liczby $a_1 = a/3$, $b_1 = b/3$, $c_1 = c/3$ są rozwiązaniem. Kontynuując to postępowanie dostajemy, że liczby $a_n = a/3^n$, $b_n = b/3^n$, $c_n = c/3^n$. Ale to jest niemożliwe.

Znów powyższe rozumowanie można zredagować znacznie zgrabniej. Przypuśćmy, że dane równanie ma rozwiązanie. Wybierzmy w zbiorze tych rozwiązań taką trójkę (a, b, c), że suma $a + b + c$ jest najmniejsza (w zbiorze liczb całkowitych dodatnich istnieje element najmniejszy). Przeprowadzając identyczne rozumowanie jak wyżej otrzymujemy, że liczby $a_1 = a/3$, $b_1 = b/3$, $c_1 = c/3$ również są rozwiązaniem danego równania. Jednak suma $a_1 + b_1 + c_1$ jest mniejsza od $a + b + c$. Sprzeczność.

Kilka zadań

Na koniec przedstawiamy kilka innych zadań, które również można zręcznie rozwiązać rozważając elementy ekstremalne.

Zadanie 18. (55. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego)
Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5 \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

Zadanie 19. (nierówność Schura)
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2.$$

Zadanie 20.
Udowodnić, że w dowolnym pięciokącie wypukłym istnieją trzy przekątne, z których można zbudować trójkąt.

Zadanie 21.
Wykazać, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 jest zawarty w pewnym równoległoboku o polu $\sqrt{2}$.

W istocie najlepszym oszacowaniem jest 4/3, lecz dowód w tym przypadku jest znacznie trudniejszy.

Zadanie 22. (62. Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia trzeciego)
Udowodnić, że nie istnieją takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach wymiernych, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$x^2 + 7 = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + (f_3(x))^2 + (f_4(x))^2.$$

Zadanie 23.
Udowodnić, że równanie

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Literatura

[1] Broszury Olimpiady Matematycznej: 33., 37., 55., 56. ,57., 61., 62.

[2] Sprawozdanie z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu w 2007 roku.

[3] Henryk Pawłowski *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Trygonometria i geometria*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2003.

[4] Lev Kourliandtchik *Wędrówki po krainie nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2000.

[5] Martin Aigner, Günter Ziegler *Dowody z Księgi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[6] Wacław Sierpiński *200 zadań z elementarnej teorii liczb*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1964.

[7] Krzysztof Chełmiński, Waldemar Pompe *Kącik Olimpijski (18), Niezmienniki i półniezmienniki (II)*, Delta 8/1996.