Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLVII Szkole Matematyki Poglądowej, *Ekstrema*, Nadarzyn, sierpień 2011.

Kula kuli nierówna

Marek KORDOS, Warszawa

W sierpniu 1900 roku w Paryżu odbył się Międzynarodowy Kongres Matematyków. Formalnie był to drugi lub trzeci Kongres, ale te poprzednie były tak nieudane, że od tej pory Kongresów się nie numeruje, tylko datuje.

Na owym Kongresie, 8 sierpnia, na wspólnym posiedzeniu sekcji piątej – historii i bibliografii – oraz szóstej – dydaktyki i metodologii, wystąpił David Hilbert z wykładem *Problemy matematyczne*. Na wykład przyszedł tłum matematyków z wszystkich sekcji, bowiem trzydziestoośmioletni Hilbert cieszył się niecodzienną sławą lidera naszej dyscypliny. Zamiar wykładu był też niecodzienny – Hilbert postanowił nakreślić strategię dla matematyki XX wieku.

Założenia przyjął proste. Z jego obserwacji wynikało, że matematyka powstaje przez zmagania z konkretnymi zadaniami. Wszelkie nowe pojęcia czy sposoby dowodzenia powstają właśnie i jedynie w tym celu, by odpowiedzieć na konkretne pytania. Tezę tę uzasadnił licznymi i przekonującymi przykładami z historii matematyki, po czym zaczął wymieniać problemy, zmaganie z którymi – jego zdaniem – napędzać będzie matematykę zbliżającego się stulecia.

Ile było tych problemów, nie wiadomo. Stenogram stwierdza, że *niejednokrotnie* ktoś przerywał Hilbertowi, mówiąc, że już zna odpowiedź. Zanotowanych w tym stenogramie problemów jest 23. Wszyscy matematycy, których szczyt aktywności wypadł w ubiegłym stuleciu, grupowali się wokół któregoś z tych problemów. Mnie zdarzyło się dłubać przy problemie czwartym. Dla ilustracji, jak bardzo Hilbert przemawiał potocznym językiem, najpierw przedstawię możliwie dokładne tłumaczenie tego fragmentu stenogramu.

IV problem Hilberta

Jeśli z całego układu aksjomatów, koniecznych do zbudowania zwykłej geometrii euklidesowej, odrzucimy aksjomat o równoległych i przyjmiemy, że wszystkie pozostałe aksjomaty są spełnione, a ten aksjomat nie jest spełniony, to, jak wiadomo, otrzymamy geometrię Łobaczewskiego (czyli hiperboliczną). Dlatego możemy powiedzieć, że geometria ta jest, w pewnym sensie, najbliższa geometrii Euklidesa. Jeżeli następnie zażądamy, by nie był spełniony aksjomat mówiący, że spośród trzech punktów na jednej prostej dokładnie jeden leży między pozostałymi dwoma, to przejdziemy do geometrii Riemanna (czyli eliptycznej), którą, w tym sensie, można uznać za najbliższą geometrii Łobaczewskiego.

Jeżeli zechcemy przeprowadzić w analogiczny sposób rozważania dotyczące aksjomatu Archimedesa, to, przyjąwszy, że aksjomat ten nie jest spełniony, przejdziemy do geometrii niearchimedesowych, badanych przez Veronese i przeze mnie.

Powstaje przy tym bardziej ogólny problem, polegający na pytaniu, czy można, wychodząc z innych płodnych punktów widzenia, zbudować geometrie, które równie zasadnie mogłyby być uważane za najbliższe zwykłej euklidesowej geometrii.

Chciałbym przy tym zwrócić uwagę Państwa na jedno zdanie, przyjmowane nawet przez niektórych autorów za określenie linii prostej, zgodnie z którym linia prosta jest najkrótszym połączeniem dwóch punktów. Sens tego zdania sprowadza się w istocie do twierdzenia Euklidesa o tym, że suma dwóch boków trójkąta jest zawsze większa od trzeciego boku; jak łatwo zauważyć, twierdzenie to jest oparte tylko na pojęciach elementarnych, czyli takich, które można uzyskać bezpośrednio z aksjomatów i dlatego poddają się całkowicie badaniom logiki.

Euklides dowiódł tego twierdzenia o trójkącie za pomocą twierdzenia o kącie zewnętrznym, wykorzystując własności przystawania. Łatwo jednak przekonać się, że dla dowodu tego euklidesowego twierdzenia nie wystarczają własności przystawania mówiące o odkładaniu odcinków i kątów, lecz niezbędne jest jeszcze twierdzenie mówiące o równości trójkątów.

W ten sposób powstaje pytanie o taką geometrię, w której spełnione są wszystkie aksjomaty zwykłej geometrii euklidesowej i, w szczególności, wszystkie aksjomaty przystawania, z wyjątkiem jednego – aksjomatu przystawania trójkątów (albo założenia o równości kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego), ale w której przyjmuje się dodatkowo aksjomat, że w każdym trójkącie suma dwóch boków jest większa od trzeciego.

Okazuje się, że taka geometria rzeczywiście istnieje i jest to nic innego, jak geometria, którą stworzył Minkowski w swojej książce „Geometria liczb" i której użył za podstawę swoich badań arytmetycznych. W ten sposób geometria Minkowskiego jest również jedną z najbliższych zwykłej geometrii euklidesowej.

Podstawowe założenia tej geometrii są następujące. Po pierwsze, zbiór punktów równo oddalonych od danego punktu O przedstawia wypukłą i domkniętą powierzchnię ze środkiem symetrii w punkcie O w zwykłej przestrzeni euklidesowej. Po drugie, dwa odcinki uważamy za równe także i w tym przypadku, gdy jeden z nich może być nałożony na drugi za pomocą przesunięcia przestrzeni euklidesowej.

W geometrii Minkowskiego spełniony jest aksjomat o równoległych. W jednej z prac, poświęconej zagadnieniu linii prostej jako najkrótszemu połączeniu dwóch punktów, udało mi się zbudować geometrię, w której nie jest spełniony aksjomat o równoległości, a wszystkie inne aksjomaty geometrii Minkowskiego są spełnione.

Uważam za bardzo pożądane zbudowanie i systematyczne zbadanie wszystkich możliwych takich geometrii ze względu na wielkie znaczenie, jakie ma założenie o prostej, jako najkrótszym połączeniu dwóch punktów i (w istocie równoważne mu) twierdzenie Euklidesa o bokach trójkąta nie tylko w teorii liczb, lecz także i w teorii powierzchni, i w rachunku wariacyjnym.

Wydaje się, że wszechstronne zbadanie sytuacji, w których to założenie jest spełnione, wniesie nowe światło zarówno w sprawę pojęcia odległości, jak również w sprawę innych pojęć elementarnych, na przykład pojęcie płaszczyzny i możliwości jej określenia za pomocą pojęcia prostej.

W przypadku płaszczyzny, jeśli przyjąć również aksjomat ciągłości, zarysowana problematyka prowadzi do zadania postawionego przez Darboux: znaleźć na płaszczyźnie wszystkie zadania wariacyjne, których rozwiązaniami są wszystkie proste tej płaszczyzny.

Takie postawienie pytania wydaje mi się sensowne i mające bardzo wiele daleko idących uogólnień.

Interpretacja problemu i rozstrzygnięcie Hamela

Tak swobodne postawienie problemu nie spowodowało jednak powstania różnic w jego bardziej konkretnym rozumieniu. Wszyscy zrozumieli, że chodzi tu o pytanie, jak wyglądają wszystkie **przyzwoite** geometrie?

Co więcej, okazało się, że pogląd na to, co nazywamy przyzwoitością (zazwyczaj wyjątkowo rozbieżny) wśród matematyków nie budził wątpliwości: wszyscy, bez sondaży ani głosowania, zgodzili się, że przyzwoita geometria to każda z możliwych metryzacji przestrzeni rzutowej lub jej wypukłego podzbioru.

Jak więc wyglądają te metryzacje?

Wydaje się, że tu potrzebne jest wyjaśnienie, co mianowicie w tej sytuacji znaczy termin *metryzacja.*

Metryzacja przestrzeni rzutowej (lub jej podzbioru) to taka metryka, w której proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią) okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.

Jest to sytuacja podobna do pytania o metryzację przestrzeni topologicznej: chodzi tam o taką metrykę, która indukuje topologię równoważną wyjściowej.

Uściślijmy więc jeszcze i to: prosta w metryce ρ to taki zbiór punktów, że dla dowolnych trzech z nich A, B, C zachodzi

$$\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)\vee\rho(BC)+\rho(CA)=\rho(BA)\vee\rho(CA)+\rho(AB)=\rho(CB);$$

z kolei okrąg wielki w metryce ρ to zbiór punktów, w którym istnieją takie trzy punkty A, B, C, że dla każdego z punktów X tego zbioru zachodzi

$$\rho(AX)+\rho(XB)=\rho(AB)\vee\rho(BX)+\rho(XC)=\rho(BC)\vee\rho(CX)+\rho(XA)=\rho(CA).$$

Odpowiedź na tak rozumiane pytanie Hilberta przyszła po trzech latach i jest zawarta w pracy

Jak widać, Hamel nawiązuje również do dosłownych sformułowań Hilberta.

Georg Hamel, *Über die Geometrien in denen Geraden die Kürzesten sind*, Math.Ann. 57(1903), 231-264

Hamel stwierdza przede wszystkim, że w jednej przestrzeni nie mogą być zrealizowane obie możliwości: albo są w niej jedynie metryczne proste, albo jedynie same metryczne okręgi wielkie.

W tym drugim przypadku zmetryzowana jest cała przestrzeń rzutowa i jedyną metryką jest metryka eliptyczna (czyli naturalna metryka sfery podzielona przez antypodyzm).

W przeciwnym przypadku metryzacji podlega tylko przestrzeń afiniczna i jej wypukłe ograniczone podzbiory otwarte.

W przypadku całej przestrzeni afinicznej odpowiednie metryki to wymienione w tekście Hilberta metryki Minkowskiego.

Słowo *ograniczony* tu oznacza zbiór, którego brzegiem jest krzywa zwyczajna zamknięta. Pominięte metryki Hilberta są literalnym powtórzeniem metryk z modelu Kleina geometrii hiperbolicznej: długość odcinka AB leżącego na cięciwie PQ rozważanego zbioru to

$$\left|\ln\frac{PA}{QA}\cdot\frac{PB}{QB}\right|;$$

oba ułamki są dobrze określone jako afiniczny stosunek podziału odcinka PQ.

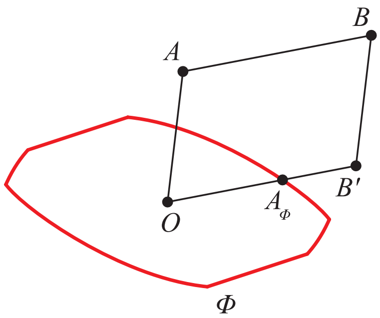
W przypadku wypukłego ograniczonego podzbioru przestrzeni afinicznej są to tzw. metryki Hilberta.

Dalej będzie mowa tylko o metryzacji całej przestrzeni afinicznej. Zasadnicze wyniki przedstawię – dla poglądowości rysunków – tylko w wymiarze 2. Ograniczenie wymiaru nie będzie miało wpływu na ogólność przytaczanych rezultatów.

Na zakończenie, oczywiście, powrócę do rozważań w dowolnym skończonym wymiarze.

Ciała cechujące

Pojęciem ogólniejszym od metryk Minkowskiego jest *metryka dana przez ciało cechujące*. Od razu wypada dodać, że nazwa ta wyszła z użycia jakieś 40 lat temu. Ciekawe, że specjaliści od analizy funkcjonalnej nie zastąpili jej żadną inną nazwą. A więc posługiwanie się ciałem cechującym obecnie znajduje się w klasie (skądinąd zawierającej wiele czynności atrakcyjnych) rzeczy, które się robi, ale o których się nie mówi.



Rys. 1

Definicja tej metryki jest na rysunku obok:

$$\rho_\Phi(AB)=\frac{OB'}{OA_\Phi},$$

gdzie Φ ogranicza zbiór wypukły o środku symetrii O, $ABB'O$ jest równoległobokiem, a punkt A_Φ jest przecięciem Φ z półprostą $\overrightarrow{OB'}$, ułamek zaś to moduł stosunku afinicznego podziału odcinka $A_\Phi B'$ punktem O.

Oto najbardziej znane przykłady.

– Gdy Φ jest kwadratem $(1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)$, otrzymujemy metrykę miejską – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego (proste metryczne są „za grube”).

– Gdy Φ jest elipsą, otrzymujemy metrykę euklidesową (poprawna nazwa, bo otrzymana geometria to geometria euklidesowa; tylko, gdy elipsa nie jest okręgiem, o niejednakowych odcinkach jednostkowych na osiach).

Teraz przeprowadzimy dowód, że ρ_Φ jest metryką przesuwalną i odpowiemy na pytanie, kiedy jest metryką Minkowskiego.

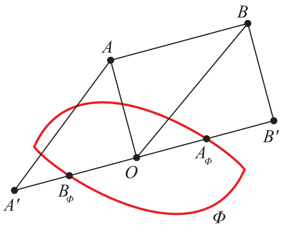
Dalej rozpatrzymy pytanie, jak od własności Φ zależy zdefiniowana przez nią geometria.

W dowodzie, że zdefiniowana funkcja jest metryką przesuwalną, wszystko, poza nierównością trójkąta, jest niezwykle proste.

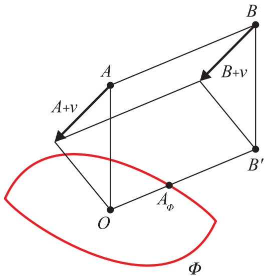
Z poniższego rachunku

$$\rho_\Phi(AB) = 0 \leftrightarrow \rho(OB') = 0 \leftrightarrow \rho(AB) = 0 \leftrightarrow a = b,$$

(gdzie ρ to dowolnie obrana metryka euklidesowa) wynika, że aksjomat przestrzeni metrycznej, mówiący o zerowaniu się metryki, jest spełniony.



Rys. 2



Rys. 3

Rysunek 2 wskazuje na symetryczność funkcji ρ_Φ – i pokazuje, do czego potrzebne jest założenie o środkowosymetryczności Φ:

$$\rho_\Phi(AB) = \frac{\rho(OB')}{\rho(OA_\Phi)} = \frac{\rho(OA')}{\rho(OB_\Phi)} = \rho_\Phi(BA).$$

Rysunek 3 stanowi dowód przesuwalności ρ_Φ:

$$A_\Phi = (A+v)_\Phi, \quad B' = (B+v)'.$$

Dość oczywisty jest też dowód, że punkty afinicznie współliniowe pozostają współliniowe ze względu na ρ_Φ:

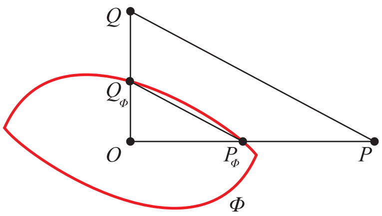
$$\rho(AX) + \rho(XB) = \rho(AB) \to \rho(OX') + \rho(X'B') = \rho(OB') \to$$
$$\to \frac{\rho(OX') + \rho(X'B') = \rho(OB')}{\rho(OA_\Phi)} \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(AB),$$

gdzie równość $\rho(X'B')/\rho(OA_\Phi) = \rho_\Phi(XB)$ bierze się z przesuwalności.

Aby wykazać, że ρ_Φ jest metryką należy wykazać jeszcze, że

(1) $\quad \rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) \geq \rho_\Phi(AB),$

czyli udowodnić nierówność trójkąta dla punktów afinicznie niewspółliniowych.



Rys. 4

Natomiast, by wykazać, że jest metryką Minkowskiego, należy wykazać więcej:

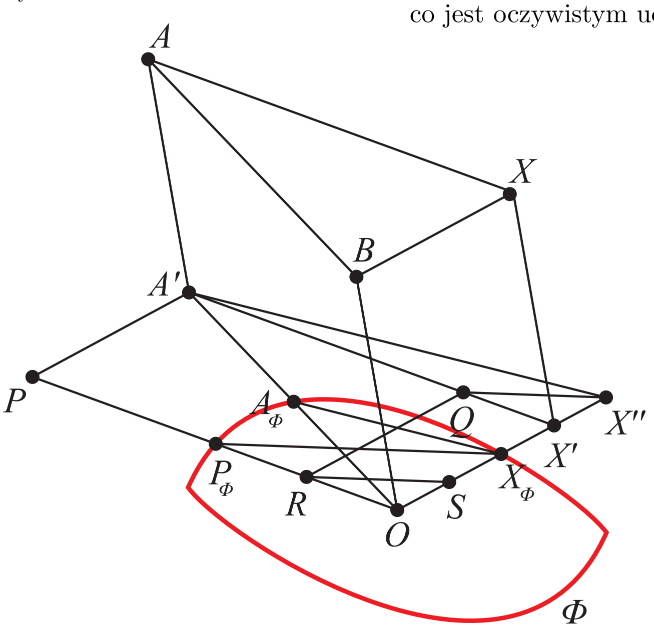
(2) $\quad \rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) > \rho_\Phi(AB),$

czyli że jeśli punkt X nie jest punktem prostej afinicznej, to nie jest punktem prostej metrycznej.

Istotnym technicznym elementem tego dowodu jest spostrzeżenie (rys. 4), że

$$\rho_\Phi(OP) = \rho_\Phi(OQ) \leftrightarrow PQ \parallel P_\Phi Q_\Phi,$$

co jest oczywistym uogólnieniem trywialnej obserwacji dla Φ będącej okręgiem.



Rys. 5

Dla dowodu nierówności (1) bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho_\Phi(XB) < \rho_\Phi(AB)$.

Dość odstręczający rysunek 5 powstaje w następujący sposób. Najpierw trójkąt ABX przesuwamy o $\overrightarrow{BO}$, otrzymując $A'OX'$. Punkt P rysujemy tak, by $A'X'OP$ był równoległobokiem. Powstają nam (patrz definicja ρ_Φ) punkty A_Φ, X_Φ i P_Φ. Następnie odkładamy (zgodnie z podanym wyżej spostrzeżeniem) OA' na półprostej OX', otrzymując X'' – zgodnie z przyjętym dodatkowym założeniem X' leży w odcinku OX''.

Punkt Q jest przecięciem poprowadzonej z X'' równoległej do $X_\Phi P_\Phi$ z **prostą** $A'X'$. Nierówność (1) będzie dowiedziona, gdy wykażemy, że Q jest punktem **odcinka** $A'X'$ – tak jak widać na rysunku. Punkty R i S rysujemy, odpowiednio na **półprostych** $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OX'}$, tak by $X''QRS$ był równoległobokiem.

Z wypukłości Φ wynika nierówność

(3) $\quad \sphericalangle OX''Q = \sphericalangle OX_\Phi P_\Phi \leq \sphericalangle OX_\Phi A_\Phi = \sphericalangle OX''A',$

co daje

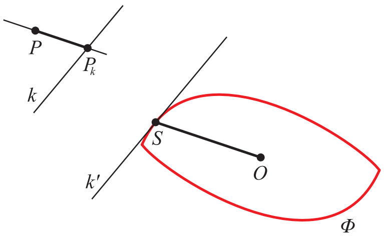
$$\rho_\Phi(AB) - \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(OX'') - \rho_\Phi(OX') = \rho_\Phi(X'X'') = \rho_\Phi(OS) = \rho_\Phi(OR) = \rho_\Phi(X'Q) \leq \rho_\Phi(X'A') = \rho_\Phi(AX),$$

czyli (1).

Zauważmy, że w ogólnym przypadku nierówność (3) nie musi być ostra (jak na rysunku) – może się zdarzyć, że odcinek $X_\Phi P_\Phi$ leży na krzywej Φ i kąty są równe. Gdy jednak tak nie jest, nierówność jest ostra i w konsekwencji otrzymujemy (2).

Zatem ciało cechujące faktycznie daje metrykę, w której okręgami (sferami $(n-1)$-wymiarowymi) są wszystkie obrazy Φ w przesunięciach i jednokładnościach, a samo Φ jest okręgiem (sferą) jednostkowym.

Gdy ciało cechujące jest **mocno wypukłe** (czyli Φ nie zawiera odcinków), otrzymana metryka jest metryką Minkowskiego.

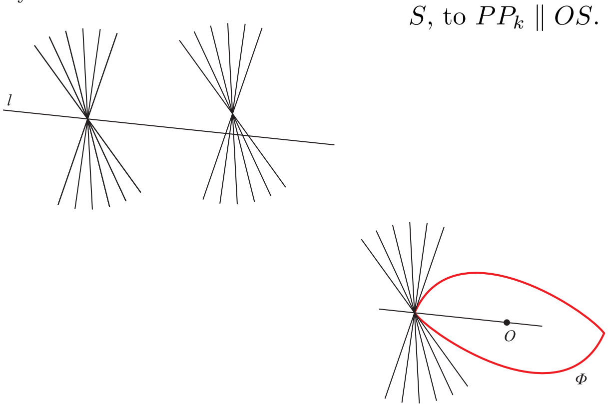


Rys. 6

Różne ciała – różne geometrie

W geometriach danych przez ciało cechujące prostopadłość definiuje się za pomocą rzutu prostokątnego.

Rzut prostokątny P_k punktu P na prostą k to najbliższy punktowi P punkt prostej k (rys. 6): gdy równoległa do k styczna k' do Φ ma z Φ punkt wspólny S, to $PP_k \parallel OS$.

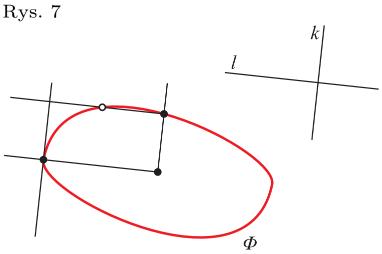


Rys. 7

Stąd
$$k \perp l \leftrightarrow \forall P, Q \in l \ (P_k = Q_k).$$
Nietrudno zauważyć, że $k \perp l_1 \wedge k \perp l_2 \to l_1 \parallel l_2$.

Rysunek 7 przekonuje nas jednak, że nie musi być
$$k_1 \perp l \wedge k_2 \perp l \to k_1 \parallel k_2.$$
Okazuje się, że w ogólnym przypadku tak podnoszenie, jak i opuszczanie prostopadłej do danej prostej może nie być jednoznaczne.

Nietrudno zauważyć, że jednoznaczność zapewnia dopiero **gładkość** (czyli jednoznaczność stycznej) krzywej Φ.

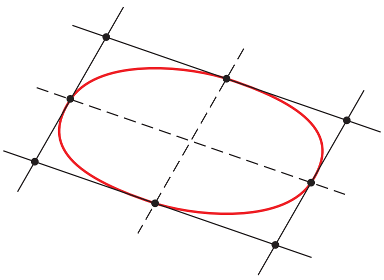


Rys. 8

Ale na tym nie koniec kłopotów z prostopadłością – nawet dla gładkiej Φ nie musi ona być symetryczna, co demonstruje rysunek 8, na którym
$$k \perp l \wedge l \not\perp k.$$

Tu trudniej było odgadnąć potrzebną własność krzywej Φ. Okazuje się, że aby prostopadłość była symetryczna, potrzeba i wystarcza, żeby Φ miała **własność równoległoboku**, co oznacza, że

jeśli opiszemy na Φ równoległobok, którego dwa przeciwległe boki są styczne do Φ w swoich środkach, to jest tak i dla drugiej pary boków.



Rys. 9

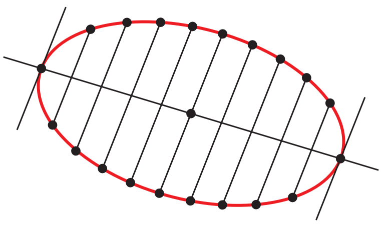
Jeden z takich równoległoboków jest na rysunku 9.

W takim mniej więcej stanie, mniej więcej stulecie temu rzecz się zatrzymała. Pojawiła się hipoteza, wręcz nadzieja, że gdy krzywa Φ będzie mocno wypukła, gładka i będzie miała własność równoległoboku, to wyznaczone przez nią ciało cechujące da nam geometrię euklidesową.

Należało zatem rozstrzygnąć pytanie, czy każda taka krzywa jest elipsą.

Pytanie okazało się trudne, a odpowiedź – wbrew oczekiwaniom – negatywna. Została ona opublikowana w pracy

Johann Radon, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber.Vehr.Sachs.Akad., 68 (1916), 123-128.



Rys. 10

Dopełnia te warunki – charakteryzując elipsę – **własność symetrii**:

dla każdej średnicy l krzywej Φ istnieje taka średnica k, że wszystkie sieczne równoległe do k mają środek na l.

Nazwa warunku bierze się stąd, że implikuje on istnienie symetrii osiowej względem każdej prostej.

Zapewne przyda się w tym miejscu zwrócenie uwagi, że chodzi o symetrię osiową w sensie metryki ρ_Φ, a więc o fakt, iż przekształcenie, które – dla ustalonej prostej k – każdemu punktowi P przyporządkowuje taki punkt Q, że środek PQ leży na k, a prosta PQ jest prostopadła (w sensie ρ_Φ) do k, jest izometrią (w sensie ρ_Φ).

Nie sposób nie zauważyć, że uzyskany rezultat doskonale odpowiadał ówczesnym nowinkom metodologicznym, zmierzającym w kierunku wyartykułowanym przez bourbakistów, a mianowicie uczynienia centrum matematycznych badań z przekształceń, późniejszych teoriokategoryjnych morfizmów.

Vive la petite différence?

No właśnie, czy wskazane różnice między geometriami danymi przez różne ciała cechujące są istotne?

Skoro umiemy wyróżnić, spośród geometrii danych w przestrzeni afinicznej przez ciało cechujące, geometrię euklidesową, powstaje też pytanie, jak dalece różnią się one od tej ich najdoskonalszej wersji.

Odpowiedź jest przykra: różnią się niewiele, a dokładniej:

dla każdej krzywej Φ istnieje taka elipsa (elipsoida) E, że

$$\rho_E \le \rho_\Phi \le \sqrt{n} \cdot \rho_E,$$

gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

Rezultat został opublikowany w pracy

Fritz John, *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions* in Studies and Essays presented to R.Courant..., NY 1948.

W tytule pracy Johna pojawia się hasło Szkoły: poszukujemy ekstremalnych elips: opisanej i wpisanej w Φ. Dlatego też pozwoliłem sobie taki temat zaproponować i – po uzyskaniu zgody – przedstawić.

Dowód twierdzenia Johna dogodnie jest przeprowadzić przez trzy lematy:

Lemat 1. *Dla ograniczonego środkowosymetrycznego ciała wypukłego istnieje zawarta w nim elipsa o maksymalnym polu, co więcej, jest z nim współśrodkowa.*

(Ach, jak cudowną własnością jest zwartość...)

Lemat 2. *Ze wszystkich rombościanów opisanych na jednostkowej kuli najmniejszą miarę ma kostka.*

Dowód. Rombościan to obraz kostki w powinowactwie prostokątnym o kierunku jednej z głównych przekątnych. Przyjmiemy też, że powinowactwo to ma skalę większą od jedności. Przy takim rozumieniu tej nazwy jego objętość jest postaci

$$V_n(a) = k_n \cdot a \cdot b^{n-1},$$

gdzie a to odległość najdalszego wierzchołka rombościanu od jego środka symetrii (będącego, oczywiście, środkiem wymienionej w twierdzeniu kuli); b to promień $(n-1)$-wymiarowej kuli wpisanej w przecięcie rombościanu symetralną odcinka łączącego jego najodleglejsze wierzchołki; k_n to współczynnik charakterystyczny dla wymiaru n przestrzeni (np. $k_2 = 1$, $k_3 = 2/3$).

Skoro rombościan jest opisany na kuli jednostkowej, więc

$$\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \quad \text{i} \quad b = a(a^2-1)^{-(1/2)}.$$

Oznaczmy

$$f_n(a) := V_n(a)/k_n = a \cdot b^{n-1} = a^n(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}.$$

Jak łatwo obliczyć,

$$\begin{aligned} f'(a) =& na^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}} + a^n \cdot \big(-\frac{n-1}{2}\big) \cdot 2a(a^2-1)^{\frac{-(n+1)}{2}} = \\ =& a^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}\big(n(a^2-1) - (n-1)a^2\big) = \\ =& a^{n-1}(a^2-1)^{\frac{-(n-1)}{2}}(a^2-n). \end{aligned}$$

Zatem ekstremum jest dla $\sqrt{n}$.

Lemat 3. *Jeśli największą elipsoidą zawartą w ciele $\mathcal{C}$ jest kula jednostkowa, to $\mathcal{C}$ zawiera się w kuli o promieniu $\sqrt{n}$.*

Dowód. Niech P będzie punktem $\mathcal{C}$ najdalszym od O – jego środka symetrii (i środka kuli $\mathcal{K}$). Opiszmy na kuli kostkę tak, by Q – jeden z jej wierzchołków – leżał na półprostej OP. Niech $\mathcal{P}$ będzie symetrycznym uwypukleniem $\mathcal{K} \cup \{P\}$, $\mathcal{Q}$ zaś $\mathcal{K} \cup \{Q\}$.

Przypuśćmy, że Q jest wewnątrz odcinka OP. Wówczas $\mathcal{K} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.

$\mathcal{K}$ jest, wobec lematu 2, największą elipsoidą w kostce, więc tym bardziej w $\mathcal{Q}$. Wykonajmy powinowactwo prostokątne φ o hiperpłaszczyźnie stałej przechodzącej przez O, w którym $\varphi(Q) = P$. Obraz $\mathcal{K}$ w φ jest elipsoidą wpisaną w $\mathcal{P}$, a więc zawartą w $\mathcal{C}$ i większą od $\mathcal{K}$ – sprzeczność.

Zatem P jest punktem odcinka OQ i $\rho(OP) \leq \sqrt{n}$.

Dowód twierdzenia Johna:

Oznaczmy największą elipsoidę wpisaną w ciało $\mathcal{C}$ przez $\mathcal{E}$, a przez ψ powinowactwo osiowe przekształcające $\mathcal{E}$ na kulę i wreszcie przez χ jednokładność przekształcającą tę kulę na kulę jednostkową $\mathcal{K}$.

Wobec lematu 3 istnieje kula $\mathcal{K}'$ o promieniu $\sqrt{n}$ zawierająca $\chi(\psi(\mathcal{C}))$.
Zatem $\mathcal{E}' := \psi^{-1}(\chi^{-1}(\mathcal{K}))$ jest szukaną elipsoidą, jednokładną z $\mathcal{E}$ w skali $\sqrt{n}$ i zawierającą $\mathcal{C}$.

⋆ ⋆ ⋆

Dla pesymistów wynika stąd morał, że wszelkie geometrie skończenie wymiarowe dane przez ciała cechujące różnią się nieistotnie, bo wszystko w nich daje się oszacować dość dobrze tak z góry, jak z dołu, przez geometrię euklidesową.

Dla optymistów wynika stąd morał, że wszelkie problemy asymptotyczne pojawiające się w analizie funkcjonalnej (bo tam stosuje się tego rodzaju metryki – czy, jak wolą widzieć to specjaliści: normy) można rozstrzygać przez zręczne stosowanie metod euklidesowych, w czym niewiele tylko przeszkadza ów wymiarowy $\sqrt{n}$.