Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Wbrew intuicji*, Grzegorzewice, sierpień 2009.

Skazani na wolność

Zofia Miechowicz, Zielona Góra

Chyba każdy czasem lubi oddać się niezobowiązującej rozrywce intelektualnej. Dla tych z Państwa, którym nie wystarczają zwykłe krzyżówki, sudoku, czy proste łamigłówki przygotowaliśmy zestaw mniej standardowych problemów. Wprawdzie do rozwiązania niektórych nie wystarczy wiedza matematyczna na podstawowym poziomie, ale odpowiedzi okazują się tak zaskakujące, że bez wątpienia warto się z nimi zapoznać.

Wolność ukryta w pudełkach

Problem

Stu więźniów odsiadujących wyrok w pewnym zakładzie karnym stanęło przed szansą wyjścia na wolność. Ich imiona umieszczono w stu pudełkach, ułożonych w rzędzie w zamkniętym pokoju. Każdego z więźniów, po kolei, wpuszczano do pokoju z zadaniem odnalezienia pudełka ze swoim imieniem. W tym celu więzień mógł otwierać dowolne pudełka, w liczbie co najwyżej pięćdziesiąt. Po każdej wizycie skazańca pokój zostaje przywrócony do stanu wyjściowego – wszystkie pudełka i wszystkie imiona wracają dokładnie na swoje miejsce. Więźniowie nie mogą się komunikować po przystąpieniu do realizacji zadania, ale mogą wcześniej ustalić wspólną strategię. Wszyscy odzyskają wolność, jeżeli każdy z nich odnajdzie swoje imię. Czy istnieje strategia, która daje im szansę na opuszczenie więzienia większą niż strategia losowa? Jak bardzo mogą oni zwiększyć swoje szanse?

Rozwiązanie

Strategia losowa nie daje więźniom dużych nadziei na opuszczenie zakładu. Każdy z nich może otworzyć co najwyżej połowę pudełek, więc jeżeli będą oni postępowali w sposób losowy, szansa, na znalezienie swojego imienia przez konkretnego więźnia wynosi $\frac{1}{2}$, więc szansa, że odgadną wszyscy jest równa

$$\frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \approx 0.0000000000000000000000000000008.$$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie może istnieć strategia dająca lepszy rezultat – imiona w pudełkach są umieszczone w sposób losowy, a więźniowie nie mają żadnej możliwości komunikacji w trakcie wykonywania zadania. Taką właśnie hipotezę w jednej ze swoich prac postawili Peter Bro Miltersen i Anna Gal [2]. Tymczasem okazuje się, że nie dość, że istnieje strategia lepsza niż losowa, to jeszcze zwiększa ona szanse więźniów na odzyskanie wolności do ponad 30%!

Więźniowie muszą wykonać pewne czynności przygotowawcze – ponumerować pudełka (stoją one w rzędzie, więc jest możliwe ustalenie jednej wspólnej numeracji dla wszystkich więźniów), ponumerować siebie (na przykład zgodnie z kolejnością wchodzenia do pokoju) oraz przyjąć, że imię więźnia będzie odpowiadało jego numerowi. Teraz każdy z więźniów, zupełnie niezależnie, powinien postępować zgodnie z następującą strategią:

- otworzyć najpierw pudełko o takim samym numerze, jak ten, który został mu przypisany,

- w każdym kolejnym kroku otwierać pudełko o numerze, który znalazł w poprzednio otwartym pudełku.

Tylko dlaczego ta prosta strategia daje tak nieoczekiwanie dobry rezultat? Żeby to zrozumieć musimy najpierw zauważyć, że po wykonaniu takiego ponumerowania więźniowie dostali w pudełkach po prostu pewną permutację liczb od 1 do 100. Każda permutacja jest sumą rozłącznych cykli, a więźniowie postępując w podany wyżej sposób poruszają się po prostu po jednym z nich. Jeżeli cykl, w którym akurat znajduje się liczba odpowiadająca ich imionom nie będzie dłuższy niż pięćdziesiąt, odnajdą odpowiednie pudełko zanim przekroczą maksymalną dozwoloną liczbę otwarć. Żeby taka sztuka udała się każdemu z nich permutacja, którą dostali nie może zawierać cyklu o długości przekraczającą połowę liczby więźniów. Ponieważ imiona w pudełkach nie zostały rozmieszczone złośliwie, a w sposób losowy, to przy zastosowaniu takiej strategii szansa więźniów na odzyskanie wolności jest taka sama, jak szansa że losowa permutacja nie posiada długiego cyklu. Policzmy to więc dla dowolnej, parzystej liczby $2n$ więźniów.

Jaka jest szansa na pojawienie się w dowolnej permutacji liczb od 1 do $2n$ cyklu długości k, jeżeli $k > n$? Elementy, które mają się pojawić w cyklu możemy wybrać na $\binom{2n}{k}$ sposobów. Ustawić je możemy na $(k-1)!$ sposobów. Pozostałe elementy możemy ustawić na $(2n-k)!$ sposobów. Po wymnożeniu wszystkich tych wartości otrzymujemy liczbę permutacji z cyklem długości k: $\frac{(2n)!}{k}$. Ponieważ $k > n$, więc w konkretnej permutacji może pojawić się co najwyżej jeden taki cykl, stąd prawdopodobieństwo jego wystąpienia wynosi $\frac{(2n)!}{k(2n)!} = \frac{1}{k}$. Po zsumowaniu tych wartości dla wszystkich możliwych k możemy policzyć prawdopodobieństwo nie pojawienia się długiego cyklu w losowej permutacji:

$$1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n} = 1 - \ln 2 \approx 31.1827821\%,$$

co jest wynikiem całkiem przyzwoitym. Eugene Curtin i Max Warshauer pokazali, że wyniku tego nie da się już poprawić [3].

Licząc na wolność

Problem skończony

W pewnym zakładzie karnym wyrok odsiadywało n więźniów. Któregoś dnia wszystkich umieszczono w jednej sali i każdemu założono na głowę czapkę z wypisaną na niej liczbą z zakresu od 0 do $n-1$ (liczby mogły się powtarzać). Każdy więzień dostał za zadanie odgadnięcie liczby, jaką ma na czapce, przy czym odpowiedzi więźniowie udzielić mieli jednocześnie, pisząc wybraną liczbę na kartce. Jeżeli chociaż jeden więzień udzieli poprawnej odpowiedzi, to wszyscy odzyskają wolność. W trakcie udzielania odpowiedzi więźniowie nie mogli wymieniać żadnych informacji, dostali jednak czas na ustalenie wspólnej strategii. Czy istnieje strategia, która daje im szansę na opuszczenie więzienia większą niż strategia losowa? Jak bardzo mogą oni zwiększyć swoje szanse?

Rozwiązanie

Strategia losowa daje więźniom szansę na wolność w wysokości $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, czyli blisko 63%. Może się wydawać, że to całkiem sporo. Okazuje się jednak, że istnieje strategia, która da więźniom pewność wygranej!

Zobaczmy najpierw co się dzieje w przypadku małego n. Jeżeli weźmiemy $n = 2$, to łatwo możemy zauważyć, że są tylko dwa istotnie różne przypadki rozmieszczenia liczb na czapkach. Więźniowie mogą mieć na czapce tylko zero lub jedynkę – dwie możliwe wartości, które mogą być takie same lub różne. Co więc mogą zrobić? Umówić się, że jeden z nich założy, że zaistniała pierwsza sytuacja (liczby na czapkach są takie same), a drugi przyjmie, że zastali sytuację drugą (liczby na czapkach są różne). Pierwszy będzie więc obstawiał taką liczbę, jaką zobaczył u kolegi, drugi zaś przeciwnie. Któraś z wymienionych sytuacji zajść musi, więc któryś z więźniów na pewno trafi!

Pozostaje pytanie, co można zrobić, kiedy więźniów jest więcej? Przede wszystkim zrozumieć, co tak naprawdę się stało w przypadku $n = 2$. Jeżeli liczby na czołach więźniów były takie same, to w sumie dawały liczbę parzystą. Jeżeli były różne, to ich suma była liczbą nieparzystą. Każdy z więźniów obstawiał więc po prostu inną resztę z dzielenia przez 2 sumy numerów na czołach. Można zrobić dokładnie to samo dla dowolnego n. Wystarczy, że więźniowie ustalą, którą resztę z dzielenia przez n każdy z nich będzie obstawiał. Potem każdy zsumuje liczby widoczne na czołach towarzyszy i sam dobierze taką, żeby po dodaniu jej do uzyskanej sumy otrzymać liczbę, która z dzielenia przez n daje resztę mu przypisaną. Więźniowie dysponują liczbami z zakresu od zera do $n-1$ więc liczba taka jest określona jednoznacznie.

Problem nieskończony

W pewnym więzieniu wyrok odsiaduje nieskończenie wielu skazańców. Któregoś dnia wszystkich umieszczono w jednej sali i każdemu założono na głowę czapkę z wypisaną na niej dowolną liczbą naturalną (liczby tym razem mogą się powtarzać!). Każdy więzień dostał za zadanie odgadnięcie liczby, którą ma na czapce. Jeżeli co najwyżej skończona liczba odpowiadających się pomyli wszyscy więźniowie mieli odzyskać wolność. Odpowiedzi więźniowie udzielić mieli jednocześnie, pisząc wybraną liczbę na kartce. W trakcie udzielania odpowiedzi więźniowie nie mogli wymieniać żadnych informacji, dostali jednak czas na ustalenie wspólnej strategii. Czy teraz również mogą ustalić strategię, która da im pewność zwycięstwa?

Rozwiązanie

Mimo, iż problem wygląda na trudniejszy, również w tym przypadku istnieje strategia, która da więźniom pewność zwycięstwa. Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby więźniowie po raz kolejny nadali sobie numery. Na przykład zgodne z numerami cel, które zajmują (zakładając, że każdy zajmuje osobną celę). Ponumerowani więźniowie z liczbami na czapkach tworzą nieskończony ciąg o wyrazach naturalnych. W wyniku zgadywania przez nich liczb na czapkach również powstanie pewien ciąg. W tym ujęciu, zadanie które więźniowie mają do wykonania sprowadza się do tego, żeby ciąg powstały w wyniku zgadywania różnił się od tego na czapkach tylko na skończonej liczbie pozycji. W zbiorze wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych możemy określić bardzo przydatną relację równoważności. Powiemy, że dwa ciągi są ze sobą w relacji, jeżeli różnią się tylko na skończonej liczbie pozycji. Widzimy, że dwa ciągi, które nas interesują znajdą się w tej samej klasie równoważności. Co więcej, każdy z więźniów, nie znając jedynie liczby na pozycji, którą sam zajmuje, jest w stanie jednoznacznie określić w której. Tym co skazańcy powinni zrobić, przed przystąpieniem do zadania, jest wybranie dla każdej klasy ciągu-reprezentanta. Wystarczy, że po ustaleniu, w której klasie znajduje się ciąg z ich czapek, każdy z więźniów będzie obstawiał liczbę, którą na odpowiadającej mu pozycji w ciągu ma ustalony reprezentant. Ciąg wybrany w ten sposób będzie należał do tej samej klasy, co ciąg z czapek, więc tylko skończona liczba więźniów się pomyli!

Wolność wypisana na twarzy

Bardzo dobrze znane szerokiemu gronu odbiorców są różne warianty zagadki o więźniach w dwukolorowych czapeczkach. Najpopularniejszy mówi o trzech więźniach, którzy zostali posadzeni w rzędzie – jeden za drugim, w taki sposób, że każdy widział tylko towarzyszy siedzących przed nim. Każdemu założono na głowę czapkę w kolorze czerwonym lub niebieskim. Powiedziano im, że wyjdą na wolność, jeżeli co najmniej jeden odgadnie jaką czapkę ma na głowie. Jeżeli którykolwiek się pomyli, wszyscy natychmiast zostaną straceni. Możliwa jest odpowiedź „nie wiem”. Żeby jednak zadanie było możliwe do wykonania, więźniowie dostali pewną dodatkową informację – co najmniej jedna z czapek jest czerwona. Więźniowie odpowiedzi udzielają po kolei, poczynając od tego, który widzi przed sobą dwóch kolegów (rozwiązanie tej zagadki pozostawiamy Czytelnikowi). W rozwiązaniach zadań tego typu (ze względu na sekwencyjność odpowiedzi i fakt, że odpowiadający słyszą się nawzajem) przeważnie niemożność udzielenia odpowiedzi przez poprzednika traktowana jest jako dodatkowa informacja. Tym co chcemy tu zaprezentować, jest zadanie w zaskakujący sposób uogólniające wszystkie tego typu przypadki.

Problem

W pewnym więzieniu wyrok odsiaduje n więźniów. Każdy z nich ma na czole czerwoną lub niebieską kropkę. Codziennie więźniowie spotykają się na spacerniaku, tak że każdy widzi ilu kolegów zostało oraz jakie kolory kropek znajdują się na czapkach współwięźniów. Każdy dostaje szansę opuszczenia więzienia odgadując kolor kropki, którą ma na czole. Jeżeli któryś się pomyli, to zostaje stracony (każdy z więźniów odpytywany jest niezależnie). Pewnego dnia jeden ze strażników lituje się nad więźniami i udziela im pewnej informacji odnośnie łącznej liczby niebieskich kropek, które mają na czołach. Czy to możliwe, żeby po udzieleniu przez strażnika dowolnej nietrywialnej informacji (takiej, że istnieje liczba niebieskich kropek, która ją realizuje) po skończonym czasie wszyscy więźniowie opuścili więzienie (zakładamy, że żaden z osadzonych nie będzie grał w rosyjską ruletkę, udzielając odpowiedzi, co do której prawdziwości nie ma pewności)?

Rozwiązanie

Zarówno problem jak i dowód, który tu przedstawimy pochodzą ze wspomnianej wyżej pracy Petera Winklera [1]. Odpowiedź na postawione wyżej pytanie jest twierdząca! Fakt ten udowodnimy za pomocą indukcji wstecznej, ze względu na liczbę zabronionych liczb niebieskich kropek. Po uzyskaniu od strażnika informacji więźniowie mogą wykluczyć pewne liczby niebieskich kropek (jeżeli informacja brzmiała na przykład „Jest parzysta liczba niebieskich kropek”, to więźniowie wykluczają wszystkie liczby nieparzyste). Zbiór wszystkich wykluczonych liczb oznaczmy przez K. Indukcję przeprowadzać będziemy ze względu na moc zbioru K.

Dla $|K| = n - 1$ możliwa jest tylko jedna liczba niebieskich kropek, w związku z czym więźniowie, którzy mają czerwoną kropkę widzą dokładnie tyle kropek niebieskich. Wiedzą stąd, że kropka na ich głowie jest czerwona. Natomiast więźniowie z niebieską kropką na czole widzą o jedną niebieską kropkę za mało, w związku z czym wiedzą, że ich kropka musi być również niebieska. Załóżmy, że $|K| = k$, $k < n - 1$ i jeżeli moc zbioru liczb zabronionych jest większa, wszyscy więźniowie potrafią odgadnąć po skończonej liczbie dni, jaką mają kropkę na czole. Załóżmy dalej, że faktyczna liczba niebieskich kropek wynosi j. Możliwe są następujące przypadki:

• **Liczba $j - 1$ jest liczbą zabronioną.** Wtedy wszyscy więźniowie, którzy mają na czole niebieską kropkę widzą $j - 1$ niebieskich kropek. Ponieważ nie może być ich tyle, to już pierwszego dnia wszyscy oni potrafią określić kolor swojej kropki. Skoro po pierwszym dniu żaden z więźniów nie widzi już niebieskiej kropki na czołach towarzyszy, to wszyscy wiedzą już, że zaszła właśnie ta sytuacja. Wiedzą więc, że mają czerwoną kropkę na czole i wychodzą na wolność drugiego dnia.

• **Liczba $j + 1$ jest liczbą zabronioną.** Wtedy sytuacja jest analogiczna, z tym że pierwszego dnia mogą wyjść na wolność więźniowie mający na czole czerwoną kropkę.

• **Żadna z powyższych sytuacji nie zachodzi.** Pierwszego dnia wszyscy więźniowie mający na czole niebieską kropkę widzą $j - 1$ niebieskich kropek u towarzyszy, natomiast wszyscy mający na czole czerwoną kropkę, widzą j niebieskich kropek. Niestety ta informacja nie przydaje im się do niczego, więc następnego dnia spotykają się w niezmienionym składzie. Dodatkową informacją jaką mają w tej chwili jest taka, że nie zaszła żadna z poprzednich sytuacji, czyli ani $j - 1$, ani $j + 1$ nie są zabronione. Mogą więc rozszerzyć zbiór K o liczby mniejsze i większe o 1 od wszystkich liczb już w nim zawartych. W ten sposób dostajemy zbiór liczb zabronionych o większej mocy, a dla takiego, na mocy założenia indukcyjnego, mamy pewność, że wszyscy więźniowie odzyskają wolność.

Literatura

[1] Peter Winkler, Seven puzzles you think you must not have heard correctly (with solutions), *Gathering for Gardner 7, March 16-19,* Atlanta.

[2] Anna Gal, Peter Bro Miltersen, The cell probe complexity of succinct data structures, *International Colloquium on Automata, Languages and Programming,* 332-344, 2003.

[3] Eugene Curtin, Max Warshauer, The Locker Puzzle, *The Mathematical Intelligencer* Vol. 28, Number 1, 2006.