Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLV Szkole Matematyki Poglądowej, *Co mi się podoba*, Jachranka, sierpień 2010.

Matematyka krawatów i sznurówek

Grzegorz KOSIOROWSKI, Kraków

Matematyka stereotypowo uważana jest za naukę związaną z twardymi faktami, nieliczącą się z kryteriami estetyki. Wszyscy matematycy wiedzą, jak dalekie od prawdy jest to stwierdzenie (sam w MSN pisałem o tym – [Ko]). Ale nawet dla matematyka czymś zaskakującym i dość egzotycznym może być próba matematycznej oceny urody i użyteczności rozmaitych elementów garderoby. A właśnie matematyczne podejście do mody stało się tematem badań, które dotarły nawet na strony słynnego czasopisma Nature ([FM1], [P1])!

Krawaty

Pierwszym przedmiotem analizy była chyba najdziwniejsza i najbardziej bezużyteczna z popularnych części stroju: krawat. Dlaczego ten prosty kawałek materiału, zawiązywany pod szyją uznawany jest powszechnie za elegancki dodatek? Istnieje żartobliwe tłumaczenie, objaśniające, że zakładanie co rano pętli na szyję wyraża pęd do samozagłady brzydszej połowy ludzkości, ale prawdopodobnie powód był prostszy: wymyślono go na dworze króla francuskiego, w czasach, gdy ten właśnie dwór miał przemożny wpływ na europejską modę. Jakkolwiek ozdobne chusty wiązane pod szyją znane są od czasów starożytności (można je zobaczyć m.in. na żołnierzach słynnej Terakotowej Armii pierwszego cesarza chińskiego Qin Shih-huang-di), sama nazwa „krawat” pochodzi z końca XVII wieku, z czasów króla Ludwika XIV. Pochodzi ona od królewskiego regimentu najemników chorwackich zwanego „Royal Cravattes” (to z kolei od przekręconego słowa Croates - Chorwaci). Regiment ten słynął z tradycyjnych chust, w dość skomplikowany sposób wiązanych na szyi. Podobno przed bitwą pod Steenkerke „Royal Cravattes”, nagle wezwani do boju, nie mieli czasu na kunsztowne węzły i zawiązali coś podobnego do dzisiejszego węzła prostego. Jako, że wyróżnili się w boju, na ich cześć król ubrał tak zawiązaną chustę i dalej wszystko potoczyło się już samo...

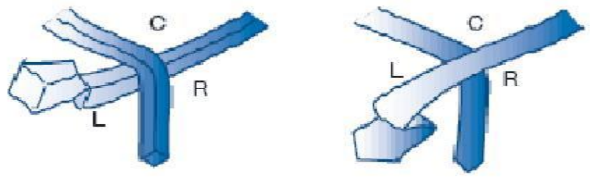
Jednak nie estetyka krawata jako kolorowego paska materiału zainteresowała matematyków. Ciekawszy był sam proces wiązania: w końcu każdy, kto bez wcześniejszego przygotowania pierwszy raz próbował zawiązać krawat, wie, że wiążąc go na „chybił-trafił” można się spodziewać raczej nieforemnego guzła pod szyją, niż eleganckiej ozdoby stroju. Z drugiej strony, praktyka pokazała, że nie istnieje „jedynie słuszny” sposób wiązania. Do dominującego w XIX wieku, gdy moda na krawaty stała się naprawdę powszechna, sposobu wiązania (czyli węzła prostego) wkrótce dołączyły nowe, znane jako windsor i półwindsor (nazwane tak na cześć księcia Windsoru, wcześniej Edwarda VII, króla angielskiego), a dopiero pod koniec XX wieku w Nowym Jorku powstał węzeł Pratta. Wszystkie one były używane na pokazach przez projektantów mody, więc można przypuszczać, że uznano je za mniej więcej jednakowo ładne.

Dlatego w roku 1999 dwaj matematycy z Cambridge: Thomas Fink i Yong Mao stwierdzili, że nie ma sensu zdawać się na los i czekać 100 lat na wynalezienie kolejnego sposobu wiązania. Trzeba sprawdzić, czy nie da się naukowo opisać tych węzłów i przy pomocy obiektywnych kryteriów wskazać wszystkie najbardziej użyteczne i estetyczne. Owocem ich pracy była książka *85 ways to tie a tie* (*85 sposobów wiązania krawata*).

Zanim zaczniemy problem krawatów rozwiązywać, musimy go wpierw przetłumaczyć na język matematyczny. Okazuje się, że każdą sekwencję ruchów prowadzącą do powstania krawata (od tej pory będę ją nazywać *węzłem krawatowym*) można zapisać jako pewien ciąg, którego własności można badać.

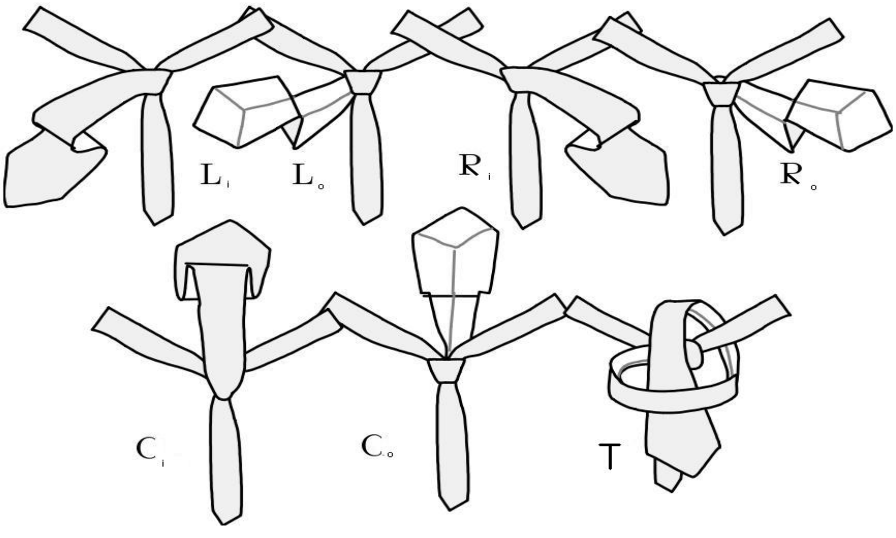
Krawat zawsze zaczynamy wiązać, przewieszając wąski koniec przez lewe ramię, a szeroki przez prawe. Wiążąc krawat, manewrujemy jedynie szerokim końcem, w ustalony sposób owijając go wokół wąskiego. To powoduje, że pierwszy ruch naszej sekwencji jest oczywisty - przełożenie szerokiego końca na lewo, pod lub nad wąskim końcem krawata, jak na rysunku 1[1].

[1] Wszystkie rysunki w artykule są przedstawione w sposób „odwrócony”, czyli tak, jak Czytelnik wiążąc krawat na sobie, widzi odpowiednie ruchy w lustrze. Może się to wydawać nienaturalne, ale ułatwia praktyczne stosowanie informacji z artykułu



Rys. 1. Pierwszy ruch węzła krawatowego. Natychmiast powstają trzy strefy: R, L i C, uzależnione od położenia względem skrzyżowania końców.

Jak widać, przestrzeń możliwych położeń szerokiego końca krawata: R - na prawo od miejsca powstawania węzła (czyli skrzyżowania szerokiego i wąskiego końca krawata), L - na lewo, C - w centrum, pod szyją, powyżej węzła. Tych stref można użyć, by zapisać ciąg kolejnych położeń szerokiego końca krawata (w skrócie: *ciąg węzła krawatowego*). Po każdym przełożeniu szerokiego końca przez wąski, notujemy w której strefie się znajduje. Ruch przeciągnięcia krawata przez powstającą pętlę, kończący węzeł, oznaczamy literą T. Dla ułatwienia, dodajemy oznaczenie, czy przełożyliśmy szeroki koniec pod (mała litera o), czy nad (mała litera i) wąskim.[2]



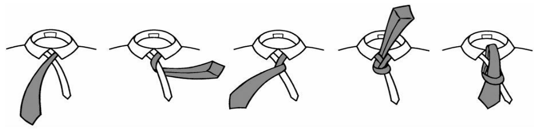
Rys. 2. Wszystkie możliwe położenia w wersji rysunkowej.

Czy te wszystkie oznaczenia są konieczne dla opisu węzła? Okazuje się, że nie. Tak naprawdę, nie musimy zapisywać małych liter: z charakteru krawata (przede wszystkim z faktu, że w końcowym efekcie widoczna powinna być jego reprezentacyjna strona) wynika, że ruchy pod i nad węzłem muszą występować naprzemiennie, a ostatni ruch przed T musi być ruchem „pod". Dzięki temu zawsze jesteśmy w stanie odtworzyć położenie liter „i" oraz „o" przy danej sekwencji liter R,L,C.

Ponadto, ruch T nie ma wpływu na rodzaj węzła krawatowego, gdyż w każdym występuje na końcu. Można go zatem pominąć bez szkody dla jednoznaczności zapisu.

Zatem każdy sposób wiązania krawata można zapisać jako ciąg liter L,R,C. Przykładem niech będzie klasyczny węzeł prosty, przedstawiony na rysunku 3.

[2] Uwaga praktyczna: by po zawiązaniu na wierzchu znalazła się właściwa, „reprezentacyjna" strona krawata, przekładając szeroki jego koniec pod wąskim, musimy odwracać krawat tą właśnie reprezentacyjną stroną do siebie. Przekładając nad, krawat odwracamy reprezentacyjną stroną do zewnątrz – jak na rysunkach.



Rys. 3. Węzeł prosty w wersji rysunkowej.

Sekwencję ruchów prowadzącą do węzła przedstawionego na powyższym rysunku, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, można zapisać ciągiem: Li Ro Li Co T, a po skróceniu: LRLC.

Kolejne pytanie, jakie trzeba sobie postawić brzmi: czy każda sekwencja liter R,L,C odpowiada jakiemuś węzłowi krawatowemu? Oczywiście, nie. Każdy węzeł krawatowy spełnia bowiem poniższe warunki (i każdy ciąg spełniający te warunki jest ciągiem węzła krawatowego):

• Nie można dwa razy z rzędu przenieść krawata do tej samej strefy, czyli w ciągu węzła krawatowego nie może być dwóch tych samych liter z rzędu. Istotnie, taki ruch nie wniósł by nic nowego do konstrukcji węzła.

• Zgodnie z wcześniejszą obserwacją, ciąg węzła krawatowego musi się rozpoczynać literą L.

• Ciąg węzła krawatowego musi kończyć się sekwencją RLC lub LRC, która tworzy pętlę, przez którą można wykonać kończący ruch T.

Jak już wspomniałem, dane empiryczne wskazywały na to, że istnieją istotnie różniące się od siebie węzły, które nie są porównywalne pod względem estetycznym: są uważane za mniej więcej jednakowo eleganckie, a wybór konkretnego zależy od okoliczności i gustu danej osoby. Dlatego Mao i Fink zaczęli od wybrania matematycznych cech węzłów krawatowych, które wpływają na wygląd węzła, ale nie na jego estetykę. Tymi cechy można wyrazić liczbowo, a okazały się nimi:

• h - ilość ruchów potrzebnych do zawiązania krawata (nie licząc ruchu T). Im większa jest ta liczba, tym krawat jest krótszy, a węzeł większy.

• γ - ilość ruchów C, użytych w danym węźle. Im większy jest stosunek $\frac{\gamma}{h}$, tym szerszy jest końcowy węzeł.

Istotnie, długość krawata, czy szerokość węzła nie są kryteriami estetycznymi (o ile oczywiście nie popadamy w przesadę w żadnym z tych aspektów): każdy dostosowuje je do swoich indywidualnych preferencji. W tym momencie, Mao i Fink mogli już formalnie przedstawić cel swoich badań. Zbiór ciągów węzłów krawatowych podzielili na klasy równoważności. Krawaty o tych samych liczbach h i γ należą do tej samej klasy i można je porównywać ze względu na estetykę. Zatem celem jest wybranie w każdej klasie węzła w jakimś sensie najładniejszego.

Zanim i to pytanie zapiszemy w języku matematycznym, przyjrzyjmy się kilku elementarnym obliczeniom. Po pierwsze, ile jest węzłów krawatowych dla ustalonego h? Oznaczmy tę liczbę przez $K(h)$. Niech $F_L(k)$ będzie liczbą k-wyrazowych początków ciągów krawatowych, których k-tym wyrazem jest L (analogicznie definiujemy $F_R(k)$ i $F_C(k)$).

Zauważmy, że $F_L(k) + F_C(k) + F_R(k) = 2^{k-1}$, gdyż pierwszy wyraz ciągu węzła krawatowego jest zawsze taki sam (L), a na każdym kolejnym miejscu wybieramy z 2 możliwości (gdyż w ciągu węzła krawatowego nie może być dwu takich samych wyrazów z rzędu). Jednocześnie, ze względu na warunek dwóch możliwych sekwencji kończących węzeł krawatowy, dwa ostatnie wyrazy ciągu krawatowego są wymuszone trzecim od końca, więc zachodzi równość $K(h) = F_L(h-2) + F_R(h-2)$. Oczywiście,

$$F_L(n+2) = F_C(n+1) + F_R(n+1) = 2F_L(n) + F_C(n) + F_R(n) = F_L(n) + 2^{n-1}.$$

Korzystając z zasady indukcji matematycznej z dodatkowymi warunkami początkowymi $F_L(1) = 1$ i $F_L(2) = 0$ łatwo można udowodnić wzór:

$$F_L(n) = \frac{2}{3}(2^{n-2} + (-1)^{n-1}).$$

Rozumując analogicznie (z wyjątkiem podstawienia innych warunków początkowych) dostajemy wzór

$$F_R(n) = \frac{1}{3}(2^{n-1} + (-1)^{n-1}).$$

Ostatecznie:

$$K(h) = \frac{1}{3}(2^{h-2} - (-1)^{h-2}).$$

Kolejną niewiadomą jest liczba węzłów krawatowych w jednej klasie tj. przy ustalonym h i γ. Ciąg takiego węzła składa się z γ grup złożonych z na przemian występujących wyrazów R, L, rozdzielonych wyrazami C (C jest dodatkowo ostatnim wyrazem tego ciągu). Ile zatem istnieje podziałów liczby $h - \gamma$ na sumę γ liczb całkowitych dodatnich? Jest to oczywiście $\binom{h-\gamma-1}{\gamma-1}$. Jako, że ostatnia grupa nie może mieć długości 1 (z waruneku sekwencji końcowej węzła krawatowego) to musimy zmniejszyć otrzymaną wcześniej liczbę o $\binom{h-\gamma-2}{\gamma-2}$. Wreszcie, ze względu na to, że każda grupa, poza pierwszą, może równie dobrze zaczynać się od L jak i R, musimy końcowy wynik przemnożyć przez $2^{\gamma-1}$.

Ostatecznie liczba węzłów krawatowych w klasie (h, γ), to:

$$K(h, \gamma) = 2^{\gamma-1}\left[\binom{h-\gamma-1}{\gamma-1} - \binom{h-\gamma-2}{\gamma-2}\right] = 2^{\gamma-1}\binom{h-\gamma-2}{\gamma-1}.$$

Na koniec tego przygotowania, konieczne okazało się dodanie dwu warunków technicznych.

• Ze względu na skończoną długość krawatów, Fink i Mao ustalili maksymalną wartość $h = 9$. Przy większej ilości ruchów w ciągu węzła krawatowego, węzeł staje się bardzo gruby, a krawat zdecydowanie się skraca, co bardzo utrudnia wiązanie. Stąd pochodzi tytułowa ilość węzłów:

$$\sum_{i=1}^{9} K(i) = 85.$$

• Fink i Mao ostatecznie odrzucili też węzły, dla których $\frac{\gamma}{h} < \frac{1}{6}$, gdyż nie były stabilne tzn. miały tendencję do rozluźniania się i „zjeżdżania” w dół (choć zostały one opisane we wspomnianej książce).

Pozostało znalezienie najładniejszych reprezentantów pozostałych 13 powstałych w ten sposób klas abstrakcji. Jak jednak matematycznie ocenić estetykę węzła? Naturalnym, narzucającym się kryterium jest symetria węzła. Nie od dziś wiadomo, że ludziom generalnie bardziej podobają się rzeczy bliskie symetrii np. za przystojniejszych uznawani są ludzie o możliwie symetrycznych twarzach. Również w przypadku węzła krawatowego symetria jest pożądana – oznacza bowiem, że węzeł nie jest przechylony na bok. Z punktu widzenia pracy Mao i Finka, symetria ma jeszcze jedną olbrzymią zaletę: posiada naturalną interpretację matematyczną.

Symetria węzła to liczba $s = |\text{ilośćruchów}R - \text{ilośćruchów}L|$. Najestetyczniejsze węzły to te, które mają liczbę s jak najmniejszą (0 lub 1), czyli ilość ruchów w prawo i w lewo jest mniej więcej taka sama.

Zatem, jako najestetyczniejszy węzeł w danej klasie wybieramy ten o najmniejszym współczynniku symetrii. Niestety, kryterium to nie dla wszystkich klas było wystarczające: zdarzało się, że kilka węzłów z danej klasy miało ten współczynnik najniższy: w celu wybrania najładniejszego potrzebna była „dogrywka”. Na współczynnik rozstrzygający tego rodzaju „estetyczne remisy” autorzy wybrali *współczynnik balansu*, odpowiadający za dobre wymieszanie ruchów. W praktyce, decyduje ona o trwałości węzła, czyli utrzymywaniu przez węzeł właściwego kształtu.

By zdefiniować tę liczbę, potrzebujemy pojęcia **kierunku wiązania**. Krawat można wiązać zgodnie z ruchem wskazówek zegara w odbiciu lustrzanym (czyli po ruchu C następuje ruch R, następnie L, ponownie R) lub przeciwnie. **Współczynnik balansu** b to ilość zmian kierunku wiązania w węźle. Czyli za każdym razem, kiedy na n-tym i $n+2$-gim miejscu ciągu krawatowego występuje ta sama litera, do współczynnika b dodajemy 1. Im mniejszy jest ten współczynnik, tym estetyczniejszy według Mao i Finka jest węzeł krawatowy.

Okazało się, że te dwa kryteria wystarczają, by wybrać najestetyczniejszy węzeł w każdej klasie. Efektem pracy dwóch wspomnianych matematyków była poniższa tabela najładniejszych węzłów:

h	γ	$K(h,\gamma)$	s	b	ew. nazwa	ciąg węzła
3	1	1	0	0		Lo Ri Co T
4	1	1	1	1	prosty	Li Ro Li Co T
5	1	1	0	2		Lo Ri Lo Ri Co T
5	2	2	1	0	Pratta	Lo Ci Ro Li Co T
6	1	1	1	3		Li Ro Li Ro Li Co T
6	2	4	0	0	półwindsor	Li Ro Ci Lo Ri Co T
7	2	6	1	1		Lo Ri Lo Ci Ro Li Co T
7	3	4	0	1		Lo Ci Ro Ci Lo Ri Co T
8	2	8	0	2		Li Ro Li Co Ri Lo Ri Co T
8	3	12	1	0	Windsor	Li Co Ri Lo Ci Ro Li Co T
9	2	10	1	3		Lo Ri Lo Ri Co Li Ro Li Co T
9	3	24	0	0		Lo Ri Co Li Ro Ci Lo Ri Co T
9	4	8	1	2		Lo Ci Ro Ci Lo Ci Ro Li Co T

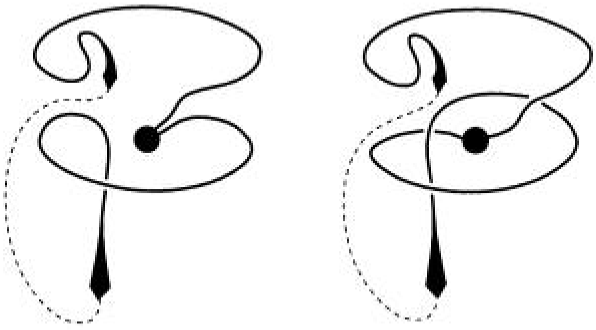
W tym momencie można skonfrontować teoretyczne rozważania Mao i Finka z rzeczywistością. Okazało się, że wśród węzłów matematycznie wskazanych jako najładniejsze znalazły się cztery dotychczas znane i powszechnie uznawane za eleganckie (te, których nazwy znalazły się w tabelce)[3]. Stąd można wnioskować, że kryteria wybrane przez Mao i Finka były sensowne. Istotnie, od czasu opublikowania ich prac, projektanci mody wprowadzają do swoich kreacji wszystkie węzły z tabelki. Tak więc można powiedzieć, że cel pracy został osiągnięty.

Jednak autorzy na tym nie poprzestali. Skoro już udało się zapisać węzły krawatowe w języku matematycznym, to warto się zastanowić, czego jeszcze można się dowiedzieć o danym krawacie mając dany odpowiadający mu ciąg. Na przykład: krawat można rozwiązać, wyciągając przez węzeł jego węższy koniec. Rezultatem będzie albo rozprostowany krawat bez żadnego węzła (jak w przypadku węzła prostego) albo prostszy (choć mocniej zaciśnięty) węzeł (tzw. „trójlistnik”), jak w wypadku pierwszego węzła z tabeli. Od czego to zależy?

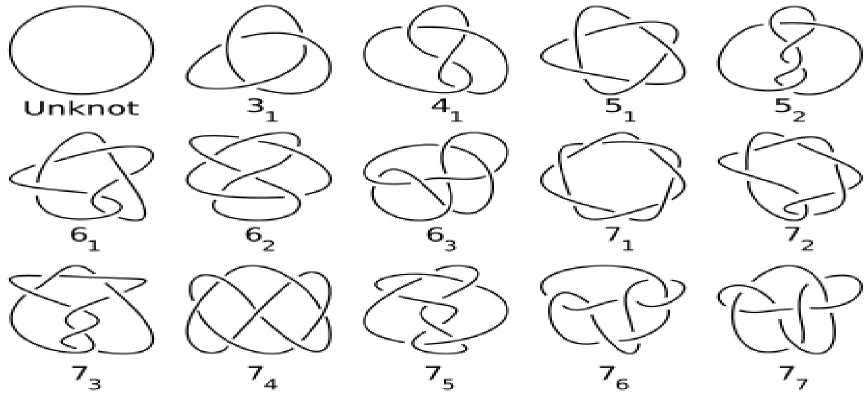
Okazuje się, że tylko od trzech ostatnich ruchów! Istotnie, zauważmy, że wszystkie poprzednie ruchy są tylko owinięciem szerokiego końca wokół wąskiego i przed wykonaniem kończącej sekwencji RoLiCo lub LoRiCo wyciągnięcie szerokiego końca powoduje rozprostowanie krawata. Dopiero jedna z tych dwu sekwencji tworzy pętlę, przez którą przeciągamy krawat ruchem T. Rysunek 4 pokazuje, jak zauważyć, która z sekwencji do jakiego skutku prowadzi.

Kontynuacja tych rozważań prowadzi do działu matematyki, który w naturalny sposób wydaje się być najbliższy krawatom: teorii węzłów. *Węzłem* nazywamy pewne zanurzenie $\mathbb{S}^1$ w $\mathbb{R}^3$. Oczywiście, wszystkie takie zanurzenia są homeomorficzne, ale nie są homeomorficzne ich dopełnienia do $\mathbb{R}^3$ i po tym można te węzły rozróżnić. Przykłady węzłów można zobaczyć na rysunku 5.

[3] Już po opublikowaniu wyników, autorzy dowiedzieli się, że pierwszy węzeł w tabeli jest również powszechnie używany przez członków młodzieżówki Komunistycznej Partii Chin.

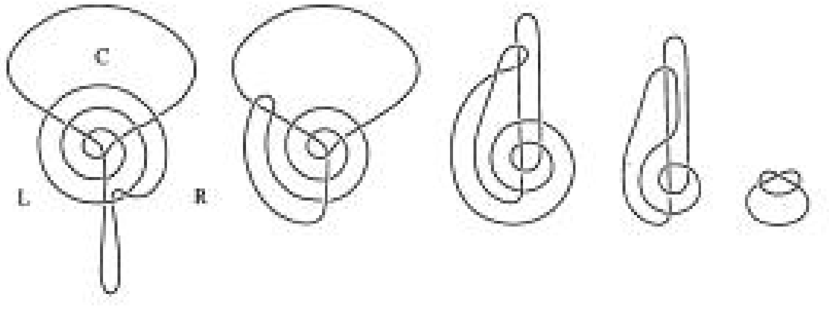


Rys. 4. Na obydwu rysunkach wąski koniec krawata spoczywa na lewym ramieniu, zaś efekty wszystkich ruchów poza sekwencją kończącą zostały uproszczone do dużej kropki. Na rysunku po lewej przedstawiony jest efekt sekwencji RoLiCoT, ewidentnie nie tworzący pętli nie dającej się rozluźnić, a na rysunku po prawej - efekt sekwencji LoRiCoT, który powoduje powstanie węzła, któremu nie przeszkadza usunięcie wąskiego końca. Przypominam, że krawaty na rysunkach przedstawiane są w odbiciu lustrzanym.



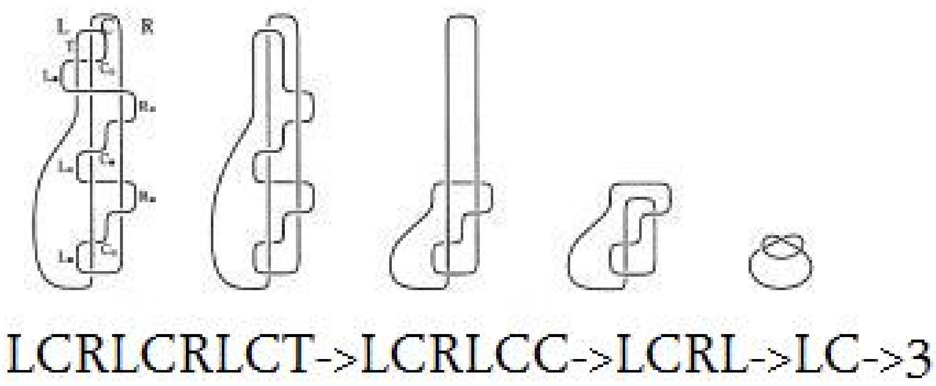
Rys. 5. Galeria najprostszych węzłów wraz z ich indeksami. Jedyny węzeł o indeksie 3 zwany jest trójlistnikiem.

Po sklejeniu końców krawata (zgodnie z linią przerywaną na rysunku 4), traktowanego jako odcinek, otrzymamy jeden z węzłów w rozumieniu topologicznym. Przy pomocy odrobiny wyobraźni przestrzennej można sprawdzić, któremu z węzłów jest równoważny dany węzeł krawatowy. Przykładowo, rysunek 6 uzasadnia, dlaczego po takim połączeniu węzeł windsor jest równoważny trójlistnikowi.



Rys. 6. Deformacja windsora do trójlistnika.

Fink i Mao znaleźli sposób łatwego znalezienia indeksu węzła (czyli jego minimalnej liczby samoprzecięć po zrzutowaniu na płaszczyznę), bez skomplikowanych manipulacji geometrycznych. W tym celu, przeanalizujmy dokładniej, jakie deformacje są „dozwolone” i jakim zmianom ciągu węzła krawatowego odpowiadają.



Rys. 7. Deformacja windsora do trójlistnika - schemat „użyteczny”.

Na rysunku 7, po lewej stronie, widzimy węzeł windsor przedstawiony w postaci schematycznej, użyteczniejszej dla naszej analizy. Na „szkielet” utworzony z odpowiednio naciągniętych prostych (czyli nietworzących węzła) fragmentów szerokiego i wąskiego końca krawata wraz z ich połączeniem, nawijamy fragmenty tworzące węzeł, odtwarzając kolejne ruchy. Dzięki temu, mamy wyraźny podział na strefy i łatwość manipulacji[4].

Po pierwsze, zauważmy, że w celu uproszczenia węzła, można przełożyć „wypustkę” symbolizującą ostatni (czyli najwyżej położony na rysunku ruch L ponad „szkieletem”. W ten sposób, część rysunku odpowiadająca za tworzenie pętli sekwencją końcową, ląduje „za szkieletem”, więc można ją uprościć do jednego ruchu C, jak na rysunku drugim od lewej i w sekwencji zapisanej pod spodem[5].

W tym momencie, zredukowany ciąg krawatowy kończy się dwoma ruchami C, a część za te ruchy odpowiadająca znajduje się „przed szkieletem”, co powoduje natychmiastową możliwość deformacji do trzeciego od lewej rysunku, odpowiadającego trzeciemu od lewej ciągowi.

Kolejną redukcję uzyskujemy dzięki spostrzeżeniu, że dowolnie długą serię przemiennych ruchów R i L można pominąć w zredukowanym ciągu, o ile występuje na końcu. Wystarczy w tym celu przełożyć odpowiadający im fragment schematu „nad szkieletem”, jak na czwartym rysunku.

Analizując tego typu schematy, autorzy pracy wskazali możliwe redukcje ciągu krawatowego, z których trzy pierwsze opisałem powyżej, a czwarta jest łatwa do zauważenia:

- $\dots RLCT$[6] (lub $\dots LRCT$) $\rightarrow \dots C$
- $\dots Cf(R,L) \rightarrow \dots C$, gdzie $f(R,L)$ jest ciągiem złożonym z naprzemiennych elementów R, L.
- $\dots CC \rightarrow \dots \emptyset$.
- C (lub $f(R,L)$) $\rightarrow \emptyset$.

Ciągi węzłów, które da się w ten sposób zredukować do ciągu pustego odpowiadają węzłom równoważnym trywialnemu, zaś pozostałe węzły mają indeks o jeden większy od długości ich ciągu po redukcji. Poniższa tabela zawiera listę estetycznych węzłów i równoważnych im węzłów topologicznych.

[4] W teorii węzłów, ruchy „dozwolone”, które za chwilę przedstawię, znane są jako ruchy Reidemeistera.

[5] Rysunek drugi nie do końca zgadza się z tą sekwencją, jednak zauważmy, że cała „wypustka” symbolizująca ostatni ruch na prawo znajduje się „za szkieletem”, więc można ją wciągnąć do strefy C. Pominąłem ten ruch, gdyż pierwsza operacja jest najtrudniejsza do przeanalizowania.

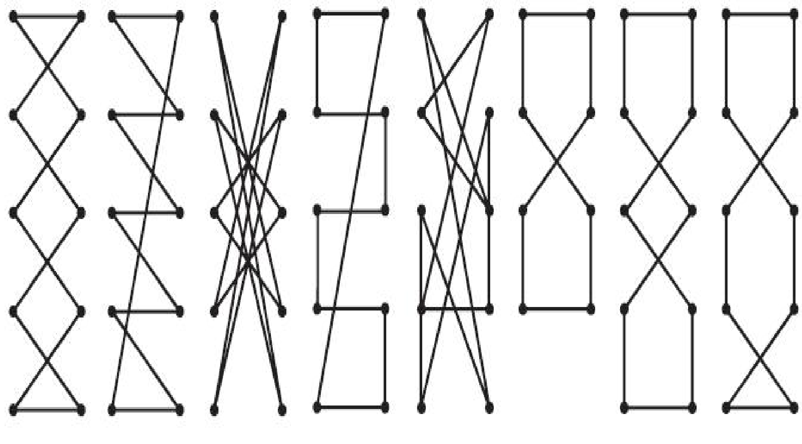
[6] … oznacza, że wcześniejsze wyrazy ciągu nie są istotne dla tej reguły.

ciąg węzła krawatowego	równoważny węzeł
Lo Ri Co T	trywialny
Li Ro Li Co T	3_1
Lo Ri Lo Ri Co T	4_1
Lo Ci Ro Li Co T	trywialny
Li Ro Li Ro Li Co T	5_2
Li Ro Ci Lo Ri Co T	trywialny
Lo Ri Lo Ci Ro Li Co T	trywialny
Lo Ci Ro Ci Lo Ri Co T	3_1
Li Ro Li Co Ri Lo Ri Co T	7_4
Li Co Ri Lo Ci Ro Li Co T	3_1
Lo Ri Lo Ri Co Li Ro Li Co T	8_4
Lo Ri Co Li Ro Ci Lo Ri Co T	4_1
Lo Ci Ro Ci Lo Ci Ro Li Co T	5_2

Sznurówki

Zainteresowaniem matematyków cieszył się też inny wiązany element garderoby: sznurówki. Szerokie spektrum rozmaitych wyników z nimi związanych przedstawił znany poszukiwacz matematycznych osobliwości Burkard Polster w książce [P2]. Poniżej opiszemy kilka z nich.

Naturalnie, trzeba zacząć od matematycznego modelu sznurówki. Rozważmy wyidealizowany *but*, czyli $2n$ „oczek” ($n \geq 2$). *Oczka* są punktami przecięć dwu linii pionowych (oddalonych o 1) i n równoodległych (oddalonych od siebie o h) linii poziomych. *n-sznurowaniem* nazywam drogę na płaszczyźnie, złożoną z $2n$ odcinków, których końcami są wszystkie *oczka*. Dodatkowo zakładamy, że dla dowolnego oczka, przynajmniej jeden z dwu odcinków zakończonych w danym oczku, musi mieć drugi koniec w innej kolumnie niż to oczko. Ten ostatni warunek może wydawać się zbędny. W istocie jednak jest konieczny, jeśli pamiętamy o funkcji, jaką sznurówki pełnią: mają „przyciągać” do siebie obie strony buta. Dzięki ostatniemu warunkowi, każde oczko ma w tym przyciąganiu swój udział. Gdyby go nie spełniało, możnaby je usunąć z sznurowania bez szkody dla funkcji sznurówki.



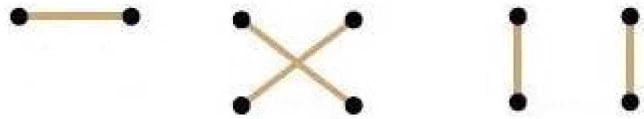
Rys. 8. Przykłady różnych sznurowań.

Zbiór matematycznie interesujących sposobów sznurowania buta jest zdecydowanie większy od zbioru interesujących węzłów krawatowych. Elementarne kombinatoryczne obliczenia wystarczą, by zauważyć, że istnieje

$$\left(\frac{(n!)^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k}^2$$

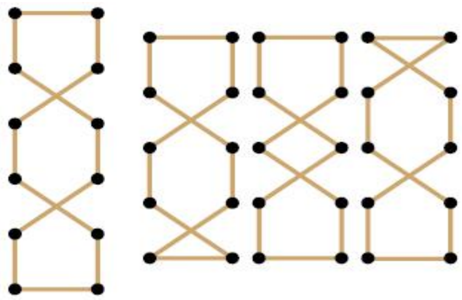
różnych n-sznurowań. Na przykład, istnieje 382 838 400 różnych 7-sznurowań. Ale które z tych sznurowań są (w jakimś sensie) najlepsze? Jako, że sznurówki zazwyczaj nie są eksponowanym elementem stroju, estetyka sznurowania schodzi na drugi plan. Bardziej interesujące są kryteria użyteczności: chcemy, by sznurówka mogła być jak najkrótsza i by dane sznurowanie było jak najmocniejsze.

Ustalmy jeszcze kilka definicji: odcinek sznurowania jest *pionowy*, jeśli jego końce należą do tej samej kolumny. W innym wypadku nazywamy taki odcinek *przekątną*. *Długością sznurowania* nazywam sumę długości wszystkich jego odcinków.



Rys. 9. Fragmenty sznurowania „muszki": koniec, skrzyżowanie i luka

Na rysunku 9 przedstawiono pewne szczególne fragmenty sznurowań. *Końcami* nazywamy poziome odcinki łączące najwyższą lub najniższą parę oczek. *Skrzyżowanie* to dwa rzędy oczek połączone przekątnymi. Luka, to dwa rzędy oczek, połączone pionowymi odcinkami sznurowania. Dla dowolnego n najkrótszymi n-sznurowaniami okazują się sznurowania zwane muszkami. *Muszką* nazywam n-sznurowanie, które można podzielić na: 2 końce, maksymalną możliwą ilość luk i skrzyżowania umieszczone tam, gdzie trzeba uzupełnić sznurowanie ze względu na warunek odcinków kończących się w jednym oczku. Istotnie, jeśli w n-sznurowaniu istnieje większa liczba skrzyżowań, niż jest to konieczne, można zastąpić każde „zbędne" skrzyżowanie luką, zmniejszając tym jego długość.



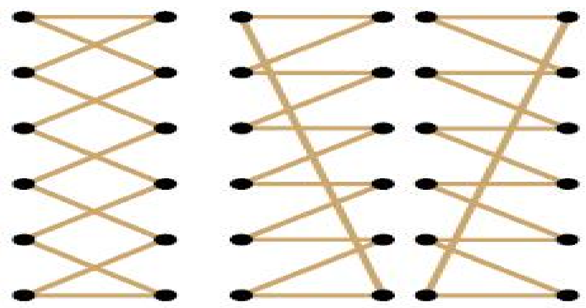
Rys. 10. Przykłady muszek: najkrótsze 5-sznurowania i najkrótsze 6-sznurowanie.

Dla parzystych n istnieje dokładnie jedno takie sznurowanie. Dla n nieparzystych jest ich $\frac{n+1}{2}$.

Ciekawym podzbiorem wszystkich sznurowań są sznurowania gęste. Sznurowanie nazywam *gęstym*, jeśli dla dowolnego oczka e, żaden z odcinków kończących się w e nie ma drugiego końca w tej samej kolumnie. Innymi słowy, gęste sznurowanie to takie, które „zygzakuje" pomiędzy kolumnami. Liczba n-sznurowań gęstych to $\frac{n!(n-1)!}{2}$: na przykład 7-sznurowań gęstych jest 1 814 400.

Krzyżowym nazywam n-sznurowanie, składające się jedynie z końców i skrzyżowań. Okazuje się (acz wymaga to bardziej skomplikowanej analizy), że sznurowanie krzyżowe jest zawsze najkrótszym ze sznurowań gęstych ([H1]), nawet jeśli opuścimy założenie, że „oczka" z jednej kolumny leżą na jednej prostej ([M1]).

Sznurowania gęste są interesujące ze względu na fakt, że są wyjątkowo mocne. Każde sznurowanie działa jako „ściągacz", utrzymujący razem obie strony buta. Zakładamy, że naprężenie sznurówki T jest stałe, niezależne od sznurowania. To naprężenie generuje naprężenie sznurówki w kierunku „poziomym" T_h. Najmocniejsze jest n-sznurowanie, które maksymalizuje T_h, gdyż najmocniej ściąga ku sobie przeciwne strony buta. Z kolei, T_h jest sumą „poziomych" składowych naprężeń wzdłuż wszystkich odcinków sznurowania. Dlatego można przeanalizować naprężenie na każdym odcinku z osobna.



Rys. 11. Po lewej stronie – sznurowanie krzyżowe, pozostałe dwa nazywamy prostymi.

Oczywiście, pozioma składowa naprężenia wzdłuż pionowego odcinka wynosi 0. Pozioma składowa naprężenia wzdłuż przekątnej o długości l wynosi T/l. Zatem, jeśli n-sznurowanie zawiera odcinki pionowe, to zawsze możemy znaleźć n-sznurowanie mocniejsze, zastępując te odcinki odpowiednimi przekątnymi. Stąd wynika, że najmocniejsze n-sznurowanie musi być gęste. W takim razie, gdy oznaczymy przez $l_1, \ldots, l_{2n}$ długości przekątnych takiego sznurowania, to problem będzie polegać na minimalizacji sumy

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{l_i}.$$

Oczywiście, dla $n = 2$ najmocniejszym sznurowaniem jest jedyne gęste. Polster udowadnia, że dla $n > 2$ najmocniejsze sznurowanie zależy od h (czyli odległości w pionie między „oczkami”), a najmocniejszymi wiązaniami są najpopularniejsze, przedstawione na rysunku 11 wiązania krzyżowe i proste. Według jego obliczeń, dla każdego $n > 2$ istnieje $h_n > 0$, takie, że najmocniejszymi n-sznurowaniami są:

- krzyżowe, dla $h < h_n$;
- krzyżowe i proste dla $h = h_n$;
- proste, dla $h > h_n$.

Polster oszacował też, ile wynosi współczynnik h_n dla konkretnych n. Rezultaty zawiera poniższa tabela:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
h_n	$0,9029$	$0,7412$	$0,645$	$0,3794$	$0,3309$	$0,4931$	$0,4625$	$0,4372$

Co ciekawe, w przypadku prawdziwych butów, stosunek odległości oczek w kolumnie do odległości między kolumnami jest zbliżony do h_n. To oznacza, że niemal obojętne jest, które z najpopularniejszych sznurowań się stosuje. Tym razem więc analiza matematyczna nie była konieczna: rynek dotarł do optymalnych rozwiązań samorzutnie. Polster jednak zaznacza, że podobno większość ludzi stosuje nieoptymalny sposób wiązania końcówek sznurówki. Ale to już zupełnie inna historia...

Literatura

[FM1] T. Fink, Y. Mao, *Designing tie knots by random walks*, Nature 398 (4 III 1999) 31-32.

[FM2] T. Fink, Y. Mao, *Tie knots, random walks and topology*, Physica A 276 (2000) 109-121.

[H1] J.H.Halton, *The shoelace problem*, Math. Intelligencer 17, 3741 (1995).

[Ko] G.Kosiorowski, *Piękne i bestie*, Matematyka Społeczeństwo Nauczanie 43 (VII 2009), 1-4.

[M1] M.Misiurewicz, *Lacing irregular shoes*, Math. Intelligencer 18, 3234 (1996).

[P1] B. Polster, Mathematics: *What is the best way to lace your shoes?*, Nature 420 (5 XII 2002).

[P2] B. Polster, *The shoelace book*, Mathematical World, vol. 24 (2006).