Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLVI Szkole Matematyki Poglądowej, *Podejście niestandardowe*, Warszawa–Miedzeszyn, styczeń 2011.

Program Leibniza

Marek KORDOS, Warszawa

Gottfried Friedrich Wilhelm Leibniz (1646–1716) był i pozostał do dziś człowiekiem zagadkowym. Jego niecodzienne pomysły budziły wiele wątpliwości, w efekcie których np. jego pisma filozoficzne zostały opublikowane dopiero w latach dwudziestych XX wieku. Mimo tego niesłychanie wiele z tych pomysłów było – po oddarciu z nich metefizycznej otoczki – wdrożone do najróżniejszych nauk, z matematyką na czele.

Doskonałym przykładem jest tutaj jego koncepcja różniczkowania. Leibniz dla wprowadzenia wygodnych algorytmów wyposażył każdą z liczb rzeczywistych w *monadę*, która była jej otoczką o szerokości niezerowej, ale którą w rachunkach czasem należało uwzględniać, a czasem nie. Istotnym pojęciem była tu wielkość dx, której odwrotność była z założenia większa od każdej liczby naturalnej. Monady zostały odrzucone, ale symbolika dx-ów do dziś jest obecna, podobnie jak ∂x czy $\int$ (początkowo pisane jak $\int_{umma}$). Jego dzieło *Monadologia* (1714) jest uważane za filozoficzne kuriozum, ale wcześniejsza *Nowa metoda maksimów i minimów oraz stycznych, która stosuje się także do wielkości ułamkowych i niewymiernych oraz szczególny dla niej rodzaj rachunku* (1684) dała początek nazwie *calculus* (ostatnie słowo tytułu tego, napisanego po łacinie dzieła) dała początek używanej w większości krajów nazwie rachunku różniczkowego i całkowego (ponadto praca ta zawiera fundamentalne spostrzeżenie, że pochodna to współczynnik kierunkowy stycznej).

Główną przyczyną zastrzeżeń wobec twórczości Leibniza był fakt, że jego dociekania miały zrealizować zdumiewającą ideę fix: miały stworzyć *scientia generalis*, czyli (bez żartów) ogólną teorię wszystkiego, wobec której poszczególne nauki byłyby przypadkami szczególnymi. W tym celu owa wiedza ogólna miałaby być sformułowana w *lingua uniwersalis* – wszystkowyrażającym języku, mówiącym jednak jedynie o *characteristica generalis* – najbardziej podstawowych własnościach (monady miały być właśnie elementem tego języka).

W czasach, gdy na dzieła Leibniza zaczęto patrzeć z odpowiednim dystansem, wiele z jego absurdalnych, jak się wydawało, pomysłów zostało rozsądnie i z pożytkiem zrealizowane. Wymienione wyżej dx-y, rozumiane tak, jak chciał Leibniz, stały się za sprawą Felixa Kleina motywem do rozważania porządków niearchimedesowych, co w konsekwencji przyniosło stworzenie przez Abrahama Robinsona (1959) analizy niestandardowej.

Ale tutaj chcę dać przykład innego pomysłu Leibniza, który również po długim okresie uznawania go za absurdalny, został zrealizowany.

Język geometrii

W ramach dbałości o używany w badaniach naukowych język Leibniz poddał surowej krytyce geometrię analityczną. Twierdził mianowicie, że używanie do rozważań geometrycznych rachunków na liczbach jest mieszaniem różnych materii i prowadzi tylko do mętliku. Uważał, że w geometrii, oczywiście, też można, a nawet trzeba **rachować**, ale **na obiektach geometrycznych**. Nie powiedział jednak, co konkretnie ma na myśli i sprawa – zwana geometrycznym *programem Leibniza* – leżała długie lata odłogiem.

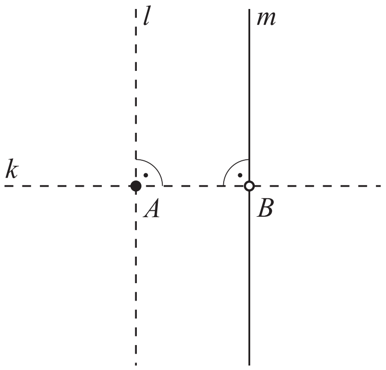
Pierwszym, który ożywił rozważania nad programem Leibniza, był Juhasson Hjelmslev (1873–1950). Zauważył mianowicie, że – mówiąc uczenie – wszystkie automorfizmy inwolucyjne mają zbiór punktów stałych będący podprzestrzenią jakiegoś wymiaru. A mówiąc po ludzku: symetrie mogą być albo względem punktu, albo względem prostej, albo względem płaszczyzny i tak dalej, jeśli, rzecz jasna, mamy jeszcze jakieś wymiary. Można więc oczywisty rachunek na symetriach (działaniem jest ich składanie) traktować jak rachunek na tych podprzestrzeniach, czyli punktach, prostych, płaszczyznach itd.

Powstaje pytanie, czy takim rachunkiem faktycznie można „wszystko” w geometrii wyrazić. Pomysł wydawał się mieć pozytywne rokowania.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do geometrii dwuwymiarowej. Jaki fakt o prostych k i l wyraża zależność

$$kl = lk \ \wedge \ k \neq l \ ?$$

Zapewne każdy z Czytelników zauważy, że przekształcenia po obu stronach równości są odwrotne. Ponadto złożenie dwóch symetrii osiowych to przesunięcie lub obrót. Przesunięcie odwrotne do siebie, to przesunięcie zerowe, ale tego zabrania drugi człon koniunkcji. Zatem kl jest obrotem, który jest inwolucją, a więc jest to obrót o kąt półpełny (czyli symetria środkowa). A ponieważ złożenie symetrii względem dwóch przecinających się prostych to obrót o kąt dwukrotnie większy, więc **proste te są prostopadłe**.



Rys. 1

Oto drugi przykład: co o punkcie A i prostej m mówi napis

$$Am = mA \ ?$$

Zamieńmy (zgodnie z poprzednim przykładem) A na $kl = lk$, wybierając prostą k prostopadła do m. Oznaczmy przecięcie k i m przez B (rys. 1). Wówczas prawa strona rozpatrywanej równości to klm, czyli złożenie symetrii względem k z przesunięciem o wektor $2\overrightarrow{AB}$ (czyli symetria z poślizgiem). Lewą stronę możemy zapisać jako mlk, co da symetrię względem k złożoną z przesunięciem o wektor $2\overrightarrow{BA}$. Równość wskazuje wobec tego, że $A = B$, czyli **punkt A leży na prostej m**.

Możliwość zrealizowania w ten sposób programu Leibniza została wykazana, ale Hjelmslev traktował ją jedynie jako sposób na wygodniejsze dowodzenie pewnych twierdzeń (jedno z nich będzie przytoczone dalej).

Nowy impuls sprawie dał Arnold Schmidt (1902–1967), wprowadzając (zresztą na użytek rozważań teoriogrupowych) pojęcie pęku:

α, β, γ są współpękowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\delta(\alpha\beta\gamma = \delta)$.

Nietrudno zauważyć, że „szkolne” pojęcie pęku właściwego (zbiór prostych mających wspólny punkt) czy niewłaściwego (zbiór prostych mających wspólny kierunek) jest szczególnym przypadkiem pojęcia wprowadzonego przez Schmidta. Zapewne jednak znajdą się zaskoczeni faktem, że punkty przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru tworzą pęk.

Ten, zdawałoby się nic niewnoszący, pomysł terminologiczny pozwolił – jak się okazało – na to, by Friedrich Bachmann (1909–1982) w pełni zrealizował program Leibniza (1959), co można zobaczyć w jego znakomitej monografii *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegrieff*, co znaczy *Wprowadzenie do geometrii opisanej za pomocą symetrii.*

Trochę geometrii widzianej tym sposobem

Oto kilka dalszych przykładów używania języka zaproponowanego przez Hjelmsleva – proszę sprawdzić, czy tłumaczenia są poprawne.

$ab = bc$	b jest dwusieczną kąta ac, lub gdy są równoległe, ich linią środkową
$ab = cd$	proste a, b, c, d mają wspólny punkt (kierunek) i ab wyznaczają ten sam kąt (wektor), co cd
$Ab = bC$	gdy $A \neq C$, prosta b jest symetralną AC, a gdy $A = C$, dowolną prostą przez A
$Ab = dC$	A, C są na wspólnej prostopadłej prostych b, d, oba między tymi prostymi lub oba na zewnątrz; A w tej samej odległości od b, co C od d
$aB = Bc$	proste są równoległe i gdy $a \neq c$, punkt B leży na ich linii środkowej, a gdy $a = c$ – leży na a
$AB = BC$	B jest środkiem AC

Jak widać, jest to całkiem inny język, choć przykłady są – jak sądzę – dostatecznym argumentem, by nie wątpić, że wszystko, co wyrażamy językiem, którego używamy od dziecka, da się również w nim wyrazić. Widać też, że prosto wyrażają się sytuacje trudne do zwięzłego przedstawienia w naszym języku i przeciwnie – np. dość skomplikowanie wyrażałby się fakt, że odcinki są przystające.

Napisy tego rodzaju można, oczywiście, odczytywać jako zdania dotyczące izometrii. Na przykład zdanie

$$\forall abc \quad (abcabcbcabcacbacbcbacb = 1)$$

pełni rolę tzw. słowa Banacha, czyli pozwala stwierdzić, że w grupie izometrii płaszczyzny euklidesowej nie istnieją podgrupy wolne, co m.in. wyklucza paradoksalny rozkład na płaszczyźnie. Oryginalne **słowo Banacha** to twierdzenie:
dla dowolnych izometrii płaszczyzny euklidesowej φ i ψ przekształcenie

$$\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^4\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^2$$

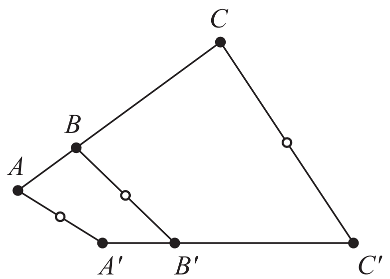
jest identycznością.
Które sformułowanie jest prostsze?

Kolejny przykład to **twierdzenie Michela Chaslesa**:
każda izometria jest postaci ab lub aB,
co Chasles wyrażał w następujący sposób:
każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem
(równoważność obu sformułowań była już obecna w tekście tego artykułu).

Argumentem za tym, że pierwsze ze sformułowań jest bardziej nośne, może być fakt, iż Bachmann pod jego inspiracją stworzył odrębny dział teorii grup **grupy biinwolutywne**, czyli takie, w których każdy z elementów jest inwolucją lub złożeniem dwu inwolucji z tej grupy. Do badania tego rodzaju obiektów może zachęcić spostrzeżenie, że
grupa izometrii przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru jest biinwolutywna
czy jeszcze bardziej niespodziewane, że
biinwolutywna jest też grupa bijekcji dowolnego zbioru.

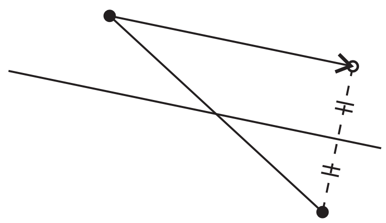
Wypada jeszcze podać przykład problemu łatwego w stylu leibnizowskim i trudnego w stylu klasycznym. Może nim być następujące

Twierdzenie Hjelmsleva. *Jeśli ABC i $A'B'C'$ są przystającymi trójkami punktów współliniowych, to środki odcinków AA', BB' i CC' leżą na jednej prostej* (rys 2).



Rys. 2

Dowód. Odcinek AC, a więc punkty A, B, C, można nałożyć na odcinek $A'C'$ dwiema izometriami: jedną z nich będzie obrót lub przesunięcie, a drugą symetria z poślizgiem. W symetrii z pośligiem zaś środek każdej pary punkt-obraz leży na jej osi (rys. 3).


Rys. 3

Program Leibniza a szkoła

Przewrót bourbakistowski, jaki dokonywał się w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku na całym świecie, w najogólniejszych zarysach polegał na zwróceniu uwagi badaczy bardziej na przekształcenia obiektów niż na same te obiekty, czego ukoronowaniem jest teoria kategorii. Zmianom podległy programy nauczania na większości wydziałów matematyki, nic przeto dziwnego, że postulowano również zmianę programów szkolnych, w szczególności przeformułowanie szkolnej geometrii w tym duchu (Dieudonné, Choquet – pomysły tego ostatniego były tematem pracy magisterskiej piszącego te słowa).

Zostało to zrealizowanie konsekwentnie (lata 60. XX wieku) w obu państwach niemieckich (Lenz, Lingenberg), a za teoretyczną podstawę posłużyła przytoczona wyżej monografia Bachmanna. W ten sposób nauczanie geometrii w szkołach niemieckich stało się istotnie inne od klasycznych programów realizowanych w innych krajach. I ten stan trwa do dziś.

Mniej lub bardziej naśladujące postulaty Euklidesa podstawy, na których opiera się nauczanie geometrii w większości krajów, w Niemczech zastąpiły następujące **aksjomaty** (zapiszę je nieformalnie):
I: Istnieje prosta przez dwa punkty, gdy różne – to jedna.
II: Dla współpękowych a, b, c istnieje taka prosta d, że $abc = d$.
III: Istnieją dwie proste prostopadłe i trzecia niewspółpękowa z nimi i nieprostopadła do żadnej z nich.

Niedowiarkom i innym zainteresowanym polecam do obejrzenia (po polsku!) tłumaczony z niemieckiego poradnik – wydany przez Prószyńskiego *Atlas matematyki.* Część poświęcona geometrii zawiera wiele twierdzeń dla polskiego ucznia całkowicie egzotycznych i nie zawiera tych, które są mu znane. Nie zmienia to faktu, że w Niemczech i w Polsce geometria jest ta sama – można te same struktury opisywać w różnych językach.

W Polsce zaś (reforma 1967 roku) też próbowano ten pomysł zrealizować, ale zrobiono to niekonsekwentnie. W efekcie wprowadzające nowe spojrzenie na geometrię podręczniki Anny Zofii Krygowskiej – po kilku latach zmagań z nimi tak nauczycieli, jak uczniów – wypadły z obiegu.

Wszelako pomysł znalezienia miejsca w szkolnym nauczaniu geometrii na przekształcenia nie jest absurdalny. Ludzie mojego pokolenia i niewiele młodsi wspominają czasy, gdy z zapałem neofitów wprowadzaliśmy bourbakistowską matematykę – już nie tylko geometrię – do szkół (polecam szczególnie wspomnienia Edwarda Tutaja, przepięknie opowiedziane na konferencji Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej w Soczewce w listopadzie 2010). Mamy do tego dystans, ale byłoby nieuczciwie nie zauważyć, że były też i osiągnięcia.

Dlatego chciałbym na zakończenie przytoczyć rezultaty moich uczniów, będących wówczas w drugiej klasie liceum (odpowiada to dzisiejszej pierwszej klasie).

Omawianym tematem był rząd generowania grupy izometrii płaszczyzny, gdy generatorami są symetrie osiowe. Jak każdemu wiadomo, gdy dopuścimy jako osie wszystkie proste, dowolną izometrię możemy uzyskać, składając pewne trzy z nich. Tak więc rząd jest równy 3.

Na lekcji stwierdziliśmy, że do uzyskania wszystkich izometrii wystarczą symetrie o osiach z jednego pęku właściwego (oznaczmy go $[A]$) i jednego niewłaściwego ($[a]$).

Jako zadanie domowe dałem problem: czy wystarczy brać osie z $[A] \cup \{a\}$, gdzie $a \notin [A]$?

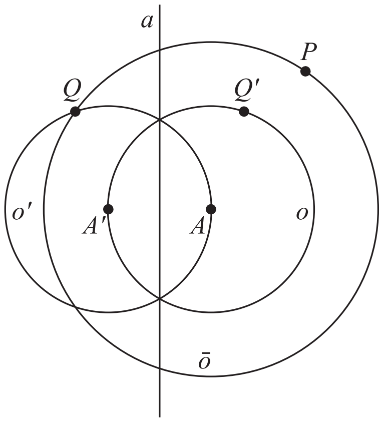
Na następnej lekcji czworo uczniów odpowiedziało TAK. Wobec tego postawilem kolejny problem (już nie jako pracę domową, bo nie znałem odpowiedzi): jaki jest rząd generowania w przypadku I, a jaki w przypadku II?

O dziwo uzyskałem rozwiązanie: podali je Wiesław Mielniczuk i Jerzy Zabilski, a było ono takie: I – 4; II – ∞.

Był to rok 1969. Rezultat ten spotkał się z dużym zainteresowaniem zawodowców, w szczególności profesor Stefan Straszewicz zarekomendował go do umieszczenia w *Wiadomościach Matematycznych*, gdzie też błyskawicznie (czyli po dwóch latach) został opublikowany (WM XIII(1971), pp. 37-41). Przyjrzyjmy się temu rozwiązniu.

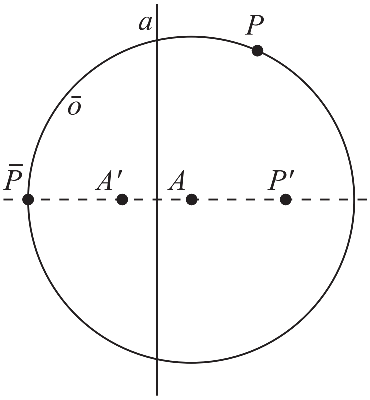
Pomysł na rozwiązanie zadania domowego zasadza się na spostrzeżeniu, że *izometria mająca punkt stały jest obrotem względem tego punktu lub symetrią względem prostej przechodzącej przez ten punkt.*
Pozostaje zatem do wykazania, że dowolny punkt P można za pomocą symetrii o osiach z rozważanego zbioru nałożyć na punkt A.

Autorzy pracy rozwiązali to w dwóch krokach:
1° wskazali konkretne symetrie o osiach z $[A] \cup \{a\}$, których złożenie nakłada punkt P na punkt A, o ile tylko leży on nie dalej od niego niż $4r$, gdzie r to odległość A od a;
2° wskazali również symetrie z $[A] \cup \{a\}$, które punkt P leżący dalej niż $4r$ przybliża do A o $2r$, co po skończonej liczbie kroków sprowadza sytuację do rozpatrzonej w 1°.



Rys. 4

Przypadek 1°. Rysujemy okrąg o o środku A i promieniu $2r$, a na nim punkt A', będący obrazem symetrycznym A względem a. Teraz rysujemy okrąg o' o środku A' i promieniu $2r$ – jest on obrazem symetrycznym o względem a. Z kolei rysujemy okrąg $\bar{o}$ o środku A i przechodzący przez P. Zgodnie z założeniem $\bar{o}$ przecina o' – oznaczmy jeden z punktów przeciecia przez Q (rys. 4). Niech dalej Q' będzie obrazem Q w symetrii względem a – zatem Q' leży na o. Nałożymy P na A za pomocą czterech symetrii: kolejno wzgledem symetralnej PQ, a, symetralnej $Q'A'$ i znów a – daje to ciąg $P \to Q \to Q' \to A' \to A$.



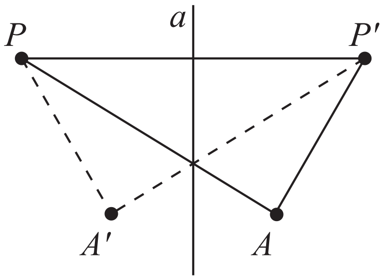
Rys. 5

Przypadek 2°. Narysujmy punkt A' i okrąg $\bar{o}$ jak poprzednio. Oznaczmy przez $\bar{P}$ ten z punktów przeciecia prostej AA' z $\bar{o}$, który leży po tej samej stronie prostej a, co A' i przez P' jego obraz symetryczny względem a (rys. 5). Symetrie względem symetralnej $P\bar{P}$ i a dają ciąg $P \to \bar{P} \to P'$. Ale

$$P'A = \bar{P}A' = \bar{P}A - AA' = PA - 2r,$$

co kończy dowód 2° i tym samym dowód, że do uzyskania wszystkich izometrii płaszczyzny wystarczą symetrie o osiach z $[A] \cup \{a\}$.

Rząd generowania dla $[A] \cup \{a\}$. Aby wykazać, że ten rząd jest nieskończony, należy wskazać dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ izometrię, do której uzyskania potrzeba użyć więcej niż n symetrii z rozważanego zbioru.



Rys. 6

Zauważmy, że symetrie względem osi należących do $[A]$ nie zmieniają odległości punktów od A. Natomiast symetrie względem a mogą przybliżyć punkty do A co najwyżej o 2r. Rozważmy dowolny punkt P. Jeśli leży on po tej samej stronie a co A, symetria względem a tylko jego dystans od A powiększy. W przeciwnym przypadku oznaczmy jego obraz względem a przez P' (rys. 6). Mamy

$$PA - P'A = PA - PA' \leq AA' = 2r.$$

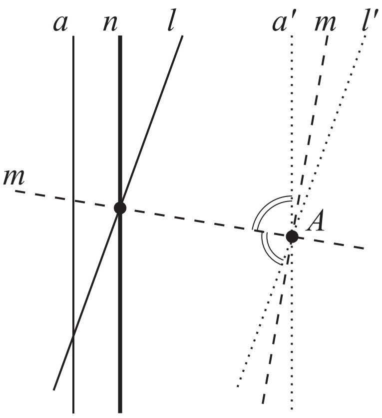
Biorąc zatem pod uwagę izometrię, która ma przekształcić na punkt A punkt P, którego odległość od A jest większa od $(2n+1) \cdot r$, stwierdzamy, że potrzeba do jej uzyskania więcej niż n symetrii z rozważanego zbioru.

Wypada tu dodać, że problematyka nie zamyka się na tym. Można bez większego trudu wykazać np., że zbiór potrzebnych osi symetrii można znacznie uszczuplić, zastępując $[A]$ prostymi zawartymi w dowolnie małym kącie.

Pozostał do przeprowadzenie jeszcze dowód, że **rząd generowania dla** $[A] \cup [a]$ jest równy 4. Dowód ten ma charakter raczej algebraiczny i wymaga dwóch lematów:

(1) $$\forall\ A, m, n\ \exists\ k, l\ (mn = lk \wedge k \in [A]);$$

(2) $$\forall\ A, a, l\ \exists\ m, n\ (l = mnm \wedge m \in [A] \wedge n \in [a]).$$



Rys. 7

Pierwszy z nich jest oczywisty: w przypadku, gdy mn jest przesunięciem, to samo przesunięcie realizuje każda para prostych równoległych do m i tak samo odległych jak m i n – a zatem w szczególności można dowolną z nich poprowadzić przez A. Podobnie, gdy mn jest obrotem – bierzemy dowolne dwie proste współpękowe z nimi i tworzące ten sam kąt, więc jedną z nich można wziąć przez A. W przypadku drugiego procedura jest następująca: przez A prowadzimy prostą a' równoległą do a i l' równoległą do l oraz ich dwie dwusieczne. Dowolną z nich nazywamy m i przez punkt jej przecięcia z l prowadzimy prostą równoległą do a, którą oznaczamy n. Lektura załączonego wyżej słowniczka daje odpowiedź na pytanie, dlaczego to jest dobry wybór m i n.

Dowolna izometria φ jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych, co rozpatrujemy kolejno.

$$\varphi = vu = lk_{(1) \to k \in [A]} = mnmk_{(2) \to m \in [A] \wedge n \in [a]};$$

$$\varphi = wvu = wpq_{(1) \to q \in [A]} = ltq_{(1) \to t \in [A]} =$$
$$= mnmtq_{(2) \to m \in [A] \wedge n \in [a]} = mnr,$$

ostatnia równość bierze się stąd, że q, t, m są współpękowe.