Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLVI Szkole Matematyki Poglądowej, *Podejście niestandardowe*, Warszawa–Miedzeszyn, styczeń 2011.

Pięć dowodów jednej tożsamości

Wojciech GUZICKI, Warszawa

W tym artykule udowodnimy następującą tożsamość kombinatoryczną:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n.$$

0. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Przypuśćmy, że dany jest zbiór skończony A. Wtedy
$$\begin{aligned}|A|&=\text{liczba elementów zbioru } A,\\ P(A)&=\{B:\ B\subseteq A\},\\ P_k(A)&=\{B\in P(A):\ |B|=k\}.\end{aligned}$$
W szczególności
$$\begin{aligned}P_0(A)&=\{\varnothing\},\\ P_1(A)&=\big\{\{a\}:\ a\in A\big\},\\ P_m(A)&=\{A\},\end{aligned}$$
gdzie $|A|=m$. Ponadto
$$\begin{aligned}[n]&=\{1,2,\ldots,n\},\\ [0]&=\varnothing,\\ [1]&=\{1\},\\ [2]&=\{1,2\},\\ P(n)&=P([n])=P(\{1,2,\ldots,n\}),\\ P_k(n)&=P_k([n])=P_k(\{1,2,\ldots,n\}),\\ P_k(0)&=P_k(\varnothing).\end{aligned}$$
Będą potrzebne dwie funkcje. Jeśli $1\le k\le n$, to
$$(n)_k=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$
Dla $k<0$ i dla $k>n$ przyjmujemy $(n)_k=0$; natomiast dla $k=0$ przyjmujemy $(n)_k=1$. Wreszcie
$$n!=(n)_n=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$$
oraz $0!=1$.

Definiujemy **współczynnik dwumianowy** $\binom{n}{k}$ wzorem
$$\binom{n}{k}=|P_k(n)|.$$
Ponadto
$$\binom{n}{k}=0$$
dla $k<0$ oraz dla $k>n$.

Przypomnijmy, że jeśli $|A|=n$, to
$$P_0(A)=\{\varnothing\}\quad\text{oraz}\quad P_n(A)=\{A\}.$$
Zatem
$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

Twierdzenie 1. Jeśli $0\le k\le n$, to
$$\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Będziemy również korzystać z następujących równości:
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad\text{oraz}\quad\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$$
dla $k=0,1,2,\ldots,n$.

1. „Tożsamość 4^n" i dowód analityczny

Definiujemy funkcje $S_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ wzorem:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Różniczkując obie strony otrzymujemy:

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{k-1}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zmieniając kolejność sumowania (czyli podstawiając $k := n - k$), otrzymujemy

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{n-k},$$

skąd dostajemy

$$x^n \cdot S_n(x^{-1}) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{k-n} = S_n(x).$$

Następnie różniczkujemy obie strony równości

$$S_n(x) = x^n \cdot S_n(x^{-1}).$$

Otrzymujemy

$$S_n'(x) = (x^n)' \cdot S_n(x^{-1}) + x^n \cdot \big(S_n(x^{-1})\big)' = nx^{n-1}S_n(x^{-1}) + \\ + x^n \cdot S_n'(x^{-1}) \cdot (-x^{-2}) = nx^{n-1} \cdot S_n(x^{-1}) - x^{n-2} \cdot S_n'(x^{-1}).$$

Podstawiając teraz $x = 1$, otrzymujemy

$$S_n'(1) = n \cdot S_n(1) - S_n'(1),$$

czyli

$$S_n'(1) = \frac{n}{2} \cdot S_n(1).$$

Z drugiej strony

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^k,$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
S_{n+1}'(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^{k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{2k+2}{k+1}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \frac{2k+2}{k+1} \cdot \binom{2k+1}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (2k+2) \cdot \binom{2k+1}{k+1}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (2k+2) \cdot \frac{2k+1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2(2k+1) \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= 4 \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= 4x \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{k-1} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\
&= 4x \cdot S_n'(x) + 2 \cdot S_n(x).
\end{aligned}$$

Teraz podstawiamy $x = 1$:

$$S'_{n+1}(1) = 4 \cdot S'_n(1) + 2 \cdot S_n(1) = 4 \cdot \frac{n}{2} \cdot S_n(1) + 2 \cdot S_n(1) = (2n+2) \cdot S_n(1).$$

Ponieważ także

$$S'_{n+1}(1) = \frac{n+1}{2} \cdot S_{n+1}(1),$$

więc

$$\frac{n+1}{2} \cdot S_{n+1}(1) = (2n+2) \cdot S_n(1),$$

czyli

$$S_{n+1}(1) = 4 \cdot S_n(1).$$

Ponieważ

$$S_0(1) = \sum_{k=0}^{0} \binom{2k}{k}\binom{0-2k}{0-k} 1^k = 1,$$

więc przez indukcję $S_n(1) = 4^n$. Zatem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = S_n(1) = 4^n,$$

co kończy dowód.

2. Tożsamość Cauchy'ego-Vandermonde'a

Podamy najpierw bez dowodu następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n i k zachodzi równość

$$\sum_j \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

Tożsamość udowodnioną w powyższym twierdzeniu nazywamy czasami **tożsamością Cauchy'ego-Vandermonde'a**.

Symbolem $(x)_n$ oznaczymy wielomian

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Przyjmujemy również $(x)_0 = 1$. Wprowadźmy także oznaczenie:

$$\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zauważmy, że $(x)_n$ oraz $\binom{x}{n}$ są wielomianami stopnia n zmiennej x.

Niech teraz

$$W(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{x}{j}\binom{n}{k-j} \quad \text{oraz} \quad V(x) = \binom{x+n}{k}.$$

Wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów: $W(m) = V(m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Zatem są identyczne; w szczególności $W(x) = V(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Weźmy teraz dowolną liczbę $r \in \mathbb{R}$ i rozważmy wielomiany zmiennej y:

$$U(y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{y}{k-j} \quad \text{oraz} \quad T(y) = \binom{r+y}{k}.$$

Wielomiany $U(y)$ i $T(y)$ przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów: $U(n) = T(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem są identyczne, czyli dla dowolnej liczby rzeczywistej s zachodzi równość $U(s) = T(s)$. To znaczy, że dla dowolnych $r, s \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}.$$

Tę tożsamość też będziemy nazywać **tożsamością Cauchy'ego-Vandermonde'a**.

Uwaga. Można udowodnić (co pozostawiamy jako ćwiczenie), że jeśli dwa wielomiany $W(x, y)$ i $V(x, y)$ dwóch zmiennych x i y przyjmują te same wartości dla wszystkich $r, s \in \mathbb{R}$ (tzn. $W(r, s) = V(r, s)$), to są identyczne: $W(x, y) = V(x, y)$.

Podstawmy teraz w tożsamości Cauchy'ego-Vandermonde'a $r = s = -\frac{1}{2}$. Otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{-\frac{1}{2}}{k-j} = \binom{-1}{k}.$$

Obliczymy teraz współczynniki dwumianowe występujące po obu stronach powyższej równości.

Pokażemy najpierw, że dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n.$$

Dla $n = 0$ ta równość jest oczywista. Niech $n \geq 1$. Mamy teraz

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)_n}{n!} = \frac{(-1) \cdot (-1-1) \cdot (-1-2) \cdot \ldots \cdot (-1-n+1)}{n!} =$$
$$= \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \ldots \cdot (-n)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n.$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Znów dla $n = 0$ równość jest oczywista. Niech zatem $n \geq 1$. Mamy wówczas

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} =$$
$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} =$$
$$= \frac{(-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot \ldots \cdot \big(-(2n-1)\big)}{2^n \cdot n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} =$$
$$= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n!} =$$
$$= \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{4^n \cdot n! \cdot n!} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Podstawmy teraz obliczone wartości do równości

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{-\frac{1}{2}}{k-j} = \binom{-1}{k}.$$

Otrzymamy

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{4^j} \cdot \binom{2j}{j} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{4^{k-j}} \cdot \binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k,$$

czyli

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{4^k} \cdot \binom{2j}{j} \cdot \binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k.$$

Zatem

$$\frac{(-1)^k}{4^k} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k,$$

czyli

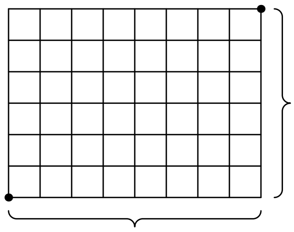
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} = 4^k,$$

co kończy dowód algebraiczny „tożsamości 4^n".

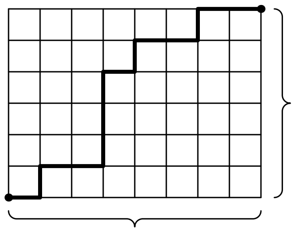
3. Dowód kombinatoryczny

Pokażemy najpierw geometryczną interpretację współczynników dwumianowych.

Mamy dany prostokąt o wymiarach $m \times n$ podzielony na mn kwadratów jednostkowych. Chcemy obliczyć liczbę dróg prowadzących z punktu A do punktu B, spełniających założenie: w czasie przechodzenia drogi wolno poruszać się tylko w prawo i do góry.



Przykład takiej drogi widzimy na następnym rysunku:



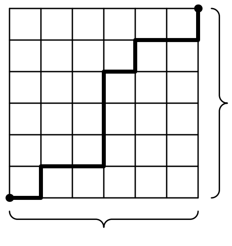
Każdą taką drogę możemy zakodować za pomocą $m+n$ znaków: m poziomych i n pionowych kresek. Kolejność tych kresek odpowiada przechodzonym odcinkom poziomym i pionowym od punktu A do punktu B. Powyższą drogę możemy zatem zakodować za pomocą ciągu

$$- \quad | \quad - \quad - \quad | \quad | \quad | \quad - \quad | \quad - \quad - \quad | \quad - \quad -$$

Oczywiste jest też, że każdy taki ciąg koduje dokładnie jedną drogę. Ciąg składa się z $m+n$ znaków. Jest on wyznaczony jednoznacznie po wskazaniu, na których miejscach znajdują się kreski poziome (równoważnie: kreski pionowe). Zatem istnieje $\binom{m+n}{m}$ (równoważnie: $\binom{m+n}{n}$) takich ciągów, a więc i tyle rozważanych dróg. Mamy zatem

$$\text{liczba dróg z } A \text{ do } B = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

W szczególności dla $m = n$ mamy drogi w kwadracie o boku n:



Innym kodem takiej drogi może być ciąg długości $2n$ składający się z n zer i n jedynek; dla drogi na powyższym rysunku mamy ciąg:

$$(0,1,0,0,1,1,1,0,1,0,0,1,0,1).$$

Otrzymujemy w ten sposób pierwszą z wykorzystywanych w dowodzie interpretacji kombinatorycznych współczynnika dwumianowego $\binom{2n}{n}$: liczba ciągów długości $2n$, w których występuje n zer i n jedynek jest równa $\binom{2n}{n}$.

Przypomnijmy teraz „tożsamość 4^n":

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} = 4^k.$$

Pokażemy teraz dowód kombinatoryczny tej tożsamości. Istnieje 4^n ciągów długości $2n$ o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$:

$$f : [2n] \to \{0,1\}.$$

Niech A będzie zbiorem wszystkich takich ciągów.

W każdym takim ciągu wyróżnimy tzw. odcinek równoliczny. **Odcinkiem równolicznym** ciągu

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2n})$$

nazywamy **najdłuższy** odcinek początkowy

$$f \mid [2k] = (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$$

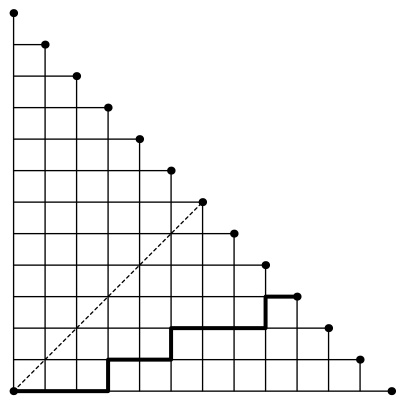
ciągu f (gdzie $0 \le k \le n$), w którym występuje tyle samo zer i jedynek. Oto kilka przykładów odcinków równolicznych; w tych przykładach $n = 6$, odcinek równoliczny został wyróżniony pogrubioną czcionką:

$$\begin{aligned}
k = 0 :&\quad (0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0),\\
k = 1 :&\quad (\mathbf{0},\mathbf{1},0,0,0,0,1,0,0,1,0,0),\\
k = 2 :&\quad (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,0,0,1,0,0,0),\\
k = 3 :&\quad (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},0,0,0,1,0,1),\\
\ldots &\quad \ldots\\
k = n :&\quad (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}).
\end{aligned}$$

Popatrzmy na graficzną ilustrację ciągów z powyższych przykładów. Przypomnijmy, że w tych przykładach przyjęliśmy $n = 6$. Najpierw mamy przykład ciągu bez odcinka równolicznego (dokładniej: $k = 0$, czyli odcinek równoliczny ma długość 0). Oto ciąg:

$$(0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0)$$

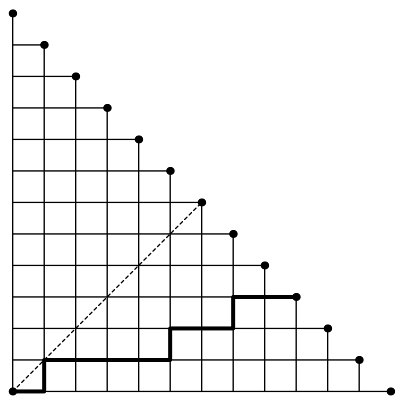
i jego ilustracja graficzna:



Zauważmy, że droga odpowiadająca naszemu ciągowi dotyka „przekątnej” (odcinka AB_n narysowanego linią przerywaną) tylko w punkcie A). W następnym przykładzie mamy $k = 1$ (a więc odcinek równoliczny ma długość 2). Oto ciąg:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

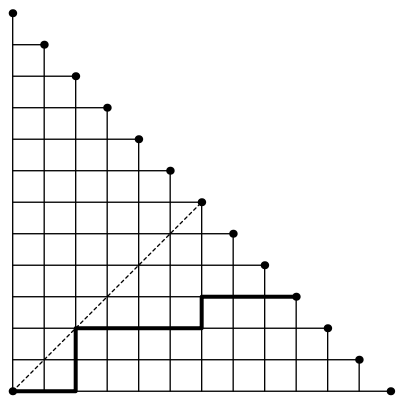
i odpowiadająca mu droga:



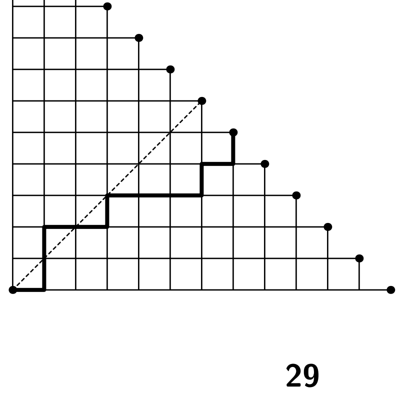
Tym razem droga dotyka przekątnej w jeszcze jednym punkcie oprócz A. Jest to punkt następny po A na narysowanej przerywaną linią przekątnej AB_n. Dla $k = 2$ mamy ciąg:

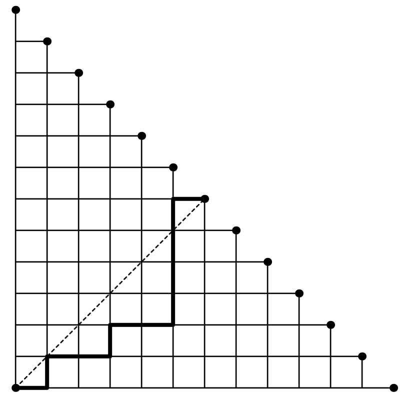
$$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

i drogę:



Ta droga dotyka przekątnej w punkcie następnym po punkcie z poprzedniego przykładu. Dla $k = 3$ i $k = 6$ mamy następujące drogi:





Zauważmy, że drogi te mogą przecinać przekątną wielokrotnie. Ważne jest to, gdzie dotykają tej przekątnej po raz ostatni.

Niech A_k będzie zbiorem tych ciągów długości $2n$, w których odcinek równoliczny ma długość $2k$.

Wówczas

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

oraz zbiory A_k są parami rozłączne. Zatem

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| = |A| = 4^n.$$

Wystarczy zatem udowodnić, że

$$|A_k| = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

Niech $0 \leq k \leq n$. Oczywiście istnieje $\binom{2k}{k}$ odcinków początkowych

$$f \mid [2k] = (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$$

długości $2k$, w których występuje k zer i k jedynek. Do zakończenia dowodu wystarczy więc pokazać, że istnieje $\binom{2n-2k}{n-k}$ ciągów

$$f \mid ([2n] \setminus [2k]) = (f_{2k+1}, f_{2k+2}, \ldots, f_{2n})$$

długości $2n - 2k$ o tej własności, że w żadnym odcinku początkowym takigo ciągu nie ma tyle samo zer i jedynek. Wówczas odcinek $f \mid [2k]$ długości $2k$ będzie odcinkiem równolicznym ciągu

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2k}, f_{2k+1}, \ldots, f_{2n})$$

należącego zatem do A_k. Dowód twierdzenia będzie więc zakończony, gdy udowodnimy następujący lemat pokazujący inną kombinatoryczną interpretację współczynnika dwumianowego $\binom{2n}{n}$.

Lemat 3. Istnieje $\binom{2n}{n}$ ciągów

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2n})$$

długości $2n$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, mających następującą własność:

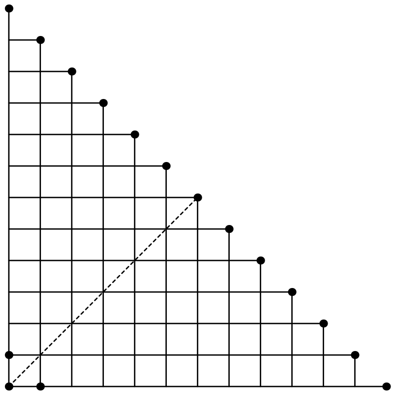
dla każdej liczby $k \in [2n]$ w odcinku początkowym

$$f \mid [2k] = (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$$

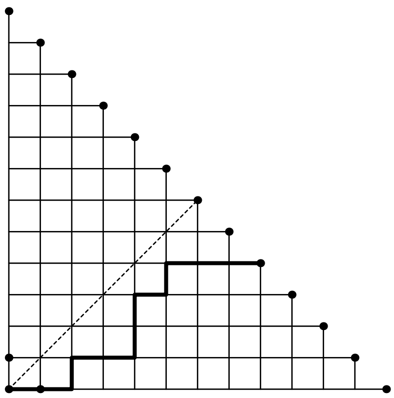
ciągu f występuje różna liczba zer i jedynek. Inaczej mówiąc:

$$|\{i \in [k] : \ f(i) = 0\}| \neq |\{i \in [k] : \ f(i) = 1\}|.$$

Dowód. Popatrzmy najpierw na ilustrację graficzną naszego lematu. Ciągi zerojedynkowe (tzn. o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$) kodujemy za pomocą dróg na papierze w kratkę. Wyrazowi 0 odpowiada odcinek poziomy, wyrazowi 1 odpowiada odcinek pionowy; wyruszamy z ustalonego punktu A i poruszamy się wyłącznie w prawo i do góry.



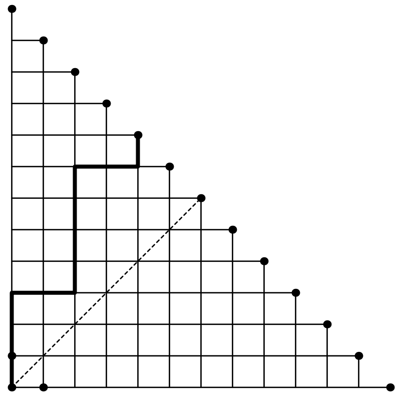
Zauważmy, że droga długości $2n$ zakończy się w jednym z punktów $B_0, B_1, \ldots, B_{2n}$; są to punkty leżące na odcinku łączącym punkty B_0 i B_{2n} oddalone od punktu A o $2n$ kratek. Warunek sformułowany w lemacie oznacza, że poprowadzona droga nigdzie (poza punktem wyjścia A) nie dotknie przekątnej: linii łączącej punkt A z punktem B_n. Takie drogi będziemy nazywać drogami **omijającymi przekątną**. Przykład drogi omijającej przekątną widzimy na następnym rysunku:



Na tym rysunku przyjęto $n = 6$. Zaznaczona droga odpowiada ciągowi

$$(0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0).$$

Drogi omijające przekątną dzielą się na dwa zbiory: drogi zaczynające się od kroku w prawo (czyli do punktu C) i drogi zaczynające się od kroku w górę (do punktu D). Oczywiście drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt C muszą zakończyć się w jednym z punktów $B_0, \ldots, B_{n-1}$. Drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt D zakończą się w jednym z punktów $B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$. Na następnym rysunku widzimy jedną z takich dróg przechodzących przez punkt D.



Na tym rysunku zaznaczona droga odpowiada ciągowi

$$(1,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,1).$$

Ze względu na symetrię liczba dróg omijających przekątną i przechodzących przez punkt C jest równa liczbie dróg omijających przekątną i przechodzących przez punkt D. Policzymy te pierwsze drogi. Pomysł polega na tym, by od liczby wszystkich dróg odjąć liczbę dróg, które nie omijają przekątnej.

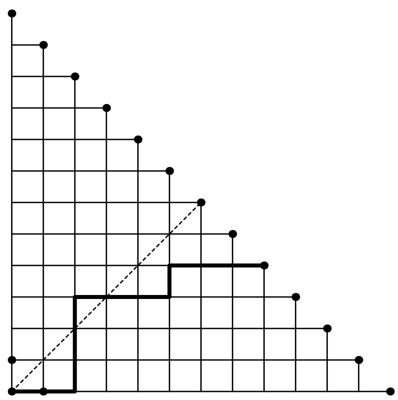
Wprowadźmy wygodne oznaczenie. Jeśli X i Y są dwoma punktami kratowymi, to symbolem

$$d(X,Y)$$

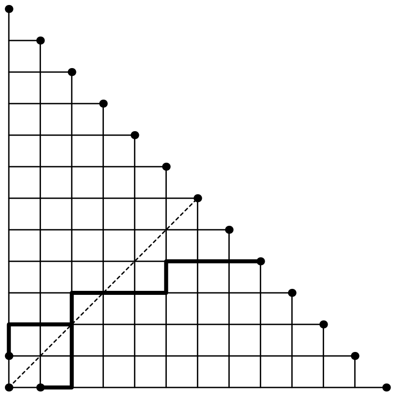
będziemy oznaczać liczbę dróg z X do Y zgodnych z zasadami poruszania się po kratkach (tzn. tylko w prawo i do góry). Wiemy już, że drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt C kończą się w jednym z punktów $B_0, \ldots, B_{n-1}$. Liczba wszystkich dróg z A przez C do jednego z tych n punktów jest zatem równa

$$\sum_{k=0}^{n-1} d(C, B_k).$$

Odejmijmy od tej liczby liczbę dróg „złych": prowadzących z A przez C do jednego z tych n punktów, ale nie omijających przekątnej. Oto przykład takiej drogi:



Droga „zła” w co najmniej jednym punkcie dotyka przekątnej. Fragment tej drogi od punktu C do pierwszego punktu na przekątnej odbijamy symetrycznie względem przekątnej. Otrzymujemy drogę z punktu D do jednego z punktów $B_1, \dots, B_{n-1}$ (zauważmy, że jedyna droga z C do B_0 nie dotyka przekątnej; dlatego pomijamy punkt B_0 jako jeden z punktów końcowych dróg „złych”):



Odwrotnie, każda droga z punktu D do jednego z punktów $B_1, \dots, B_{n-1}$ musi przeciąć przekątną, a więc powstaje z dokładnie jednej drogi „złej” przez odbicie symetryczne. Stąd wynika, że liczba dróg „złych” jest równa

$$\sum_{k=1}^{n-1} d(D, B_k).$$

Zauważmy następnie, że dla każdego $k = 1, 2, \dots, n-1$ mamy równość

$$d(D, B_k) = d(C, B_{k-1}).$$

Mianowicie każdą drogę z D do B_k przesuwamy o jedną kratkę w prawo i jedną w dół, otrzymując w ten sposób drogę z C do B_{k-1}; to przekształcenie dróg jest oczywiście wzajemnie jednoznaczne. Stąd wynika, że liczba dróg „złych” z C do punktów $B_1, \dots, B_{n-1}$ jest równa

$$\sum_{k=1}^{n-1} d(D, B_k) = \sum_{k=1}^{n-1} d(C, B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-2} d(C, B_k).$$

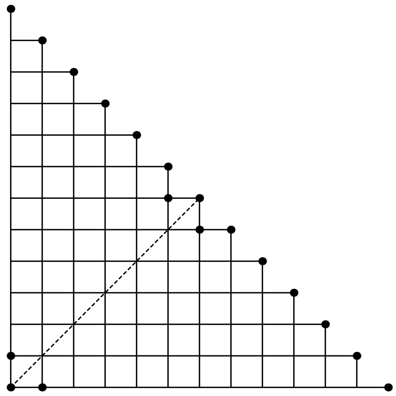
Liczba dróg z A przez C omijających przekątną jest zatem równa

$$\sum_{k=0}^{n-1} d(C, B_k) - \sum_{k=0}^{n-2} d(C, B_k) = d(C, B_{n-1}).$$

Zauważamy następnie, że

$$d(C, B_{n-1}) = d(A, E).$$

Mianowicie każdą drogę z C do B_{n-1} przesuwamy o jedną kratkę w lewo.



Otrzymujemy wniosek: liczba dróg z A przez C omijających przekątną jest równa $d(A, E)$. Przez symetrię, liczba dróg z A przez D omijających przekątną jest równa $d(A, F)$. A więc liczba wszystkich dróg wychodzących z A i omijających przekątną jest równa

$$d(A, E) + d(A, F) = d(A, B_n) = \binom{2n}{n},$$

co kończy dowód lematu.

Możemy teraz przystąpić do dowodu „tożsamości 4^n”:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Niech A będzie zbiorem wszystkich zerojedynkowych ciągów f długości $2n$:

$$A = [2]^{[2n]} = \{f = (f_1, f_2, \dots, f_{2n}) : \ f_1, f_2, \dots, f_{2n} \in [2]\}.$$

Definiujemy następnie zbiory A_k dla $k = 0, 1, \dots, n$:

$$A_k = \big\{ f \in A : \max\{j \in [n] : \\ |f^{-1}(0) \cap [2j]| = |f^{-1}(1) \cap [2j]| = j\} = k \big\}.$$

Inaczej mówiąc, ciąg $(f_1, f_2, \dots, f_{2k})$ jest najdłuższym odcinkiem początkowym ciągu f, w którym jest tyle samo zer co jedynek. Wtedy

$$4^n = 2^{2n} = |A| = \sum_{k=0}^{n} |A_k|.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli $f \in A_k$, to ciąg f można podzielić jednoznacznie na dwa ciągi: ciąg $f|[2k]$, w którym jest po k zer i jedynek (jest $\binom{2k}{k}$ takich ciągów) i ciąg $f|\{2k+1, \dots, 2n\}$, kodowany za pomocą drogi omijającej przekątną (jest $\binom{2n-2k}{n-k}$ takich dróg). Zatem

$$|A_k| = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k},$$

skąd wynika, że

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n,$$

co kończy dowód.

4. Algorytm Siostry Celine

Przejdziemy teraz do drugiej części wykładu. Pokażemy w niej dowody algorytmiczne; ich najważniejszą cechą jest to, że mogą być w całości lub prawie w całości przeprowadzone automatycznie, przez komputer wyposażony w program do wykonywania obliczeń symbolicznych. Pierwszą z omawianych metod jest tzw. algorytm Siostry Celine, opracowany w 1945 roku w pracy doktorskiej Siostry Mary Celine Fasenmyer ze Zgromadzenia Sióstr Miłosierdzia (Sisters of Mercy), założonego w połowie XIX w. w Irlandii. Ten algorytm pozwala znaleźć równanie rekurencyjne spełnione przez funkcję określoną za pomocą sumy współczynników dwumianowych.

Przypuśćmy, że funkcja f jest określona wzorem

$$f(n) = \sum_k F(n,k),$$

gdzie $F(n,k)$ jest funkcją dwóch zmiennych całkowitych, spełniającą następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n istnieje tylko skończona liczba liczb całkowitych k takich, że $F(n,k) \neq 0$. Mówimy wówczas także, że $F(n,k) = 0$ **dla prawie wszystkich** k. Jeśli funkcja $F(n,k)$ spełnia ten warunek, to sumowanie w definicji funkcji f – teoretycznie rozciągnięte na wszystkie liczby całkowite k – ma sens: dodajemy tylko skończenie wiele liczb różnych od zera. Ten warunek będziemy nazywać **warunkiem sumowalności**.

Zasadę działania algorytmu Siostry Celine wyjaśnimy na kilku przykładach. W tej części wykładu ograniczymy się do opisu algorytmów, nie dowodząc twierdzeń o ich poprawności.

Przykład 1. Niech funkcja f będzie zdefiniowana wzorem

$$f(n) = \sum_k k\binom{n}{k}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zauważmy, że funkcja

$$F(n,k) = k\binom{n}{k}$$

spełnia warunek sumowalności: dla każdej liczby naturalnej n równość $F(n,k) = 0$ zachodzi dla prawie wszystkich k. Mianowicie $F(n,k) = 0$ dla $k < 0$ oraz dla $k > n$.

Szukamy teraz współczynników a, b, c i d (być może zależnych od n, ale niezależnych od k) takich, że

$$a \cdot F(n,k) + b \cdot F(n+1,k) + c \cdot F(n,k+1) + d \cdot F(n+1,k+1) = 0$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Ustalmy zatem liczbę $n > 0$ oraz k spełniającą nierówności $1 \leq k \leq n-1$. Wówczas będziemy mogli korzystać z twierdzenia 1.

Podzielmy obie strony naszego równania przez $F(n,k)$ (zauważmy, że z przyjętych założeń wynika, iż $F(n,k) \neq 0$):

$$a + b \cdot \frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c \cdot \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d \cdot \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0.$$

Zauważmy teraz, że ułamki

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \quad \text{oraz} \quad \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}$$

wyrażają się prostymi funkcjami wymiernymi:

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{k \cdot \binom{n+1}{k}}{k \cdot \binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n-k+1},$$

$$\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(k+1) \cdot \binom{n}{k+1}}{k \cdot \binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k},$$

$$\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(k+1) \cdot \binom{n+1}{k+1}}{k \cdot \binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k}.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$a + b \cdot \frac{n+1}{n-k+1} + c \cdot \frac{n-k}{k} + d \cdot \frac{n+1}{k} = 0.$$

Mnożymy obie strony przez wspólny mianownik $k(n-k+1)$, otrzymując

$$a \cdot k(n-k+1) + b \cdot k(n+1) + c \cdot (n-k)(n-k+1) + d \cdot (n+1)(n-k+1) = 0.$$

Po otwarciu nawiasów i uporządkowaniu według potęg k, otrzymujemy

$$(c-a) \cdot k^2 + \big(a(n+1) + b(n+1) - c(2n+1) - d(n+1)\big) \cdot k + \\ + \big(cn(n+1) + d(n+1)^2\big) = 0.$$

Dobieramy teraz a, b, c i d tak, by to równanie było spełnione tożsamościowo. W tym celu wystarczy, by trójmian kwadratowy zmiennej k występujący po lewej stronie, był trójmianem tożsamościowo zerowym, czyli, by:

$$\begin{cases} c - a = 0 \\ a(n+1) + b(n+1) - c(2n+1) - d(n+1) = 0 \\ cn(n+1) + d(n+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ jednorodny trzech równań z czterema niewiadomymi. Taki układ ma rozwiązanie niezerowe. Spróbujmy je znaleźć. Podzielmy obie strony ostatniego równania przez $n+1$ i podstawmy w dwóch ostatnich równaniach $c = a$. Otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} c = a \\ a(n+1) + b(n+1) - a(2n+1) - d(n+1) = 0 \\ an + d(n+1) = 0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = a \\ -an + b(n+1) - d(n+1) = 0 \\ an + d(n+1) = 0 \end{cases}$$

Z ostatniego równania wynika, że możemy przyjąć $a = n+1$ oraz $d = -n$. Otrzymamy wówczas układ

$$\begin{cases} a = n+1 \\ c = n+1 \\ d = -n \\ -n(n+1) + b(n+1) + n(n+1) = 0 \end{cases}$$

skąd wynika, że $b = 0$. Mamy ostatecznie

$$\begin{cases} a = n+1 \\ b = 0 \\ c = n+1 \\ d = -n \end{cases}$$

W ten sposób otrzymujemy równanie

$$(n+1) \cdot F(n,k) + (n+1) \cdot F(n,k+1) - n \cdot F(n+1,k+1) = 0,$$

czyli

$$(n+1) \cdot k \cdot \binom{n}{k} + (n+1) \cdot (k+1) \cdot \binom{n}{k+1} - n \cdot (k+1) \cdot \binom{n+1}{k+1} = 0.$$

Tę tożsamość udowodniliśmy przy założeniu, że $n \geq 1$ oraz $1 \leq k \leq n-1$. Nietrudno zauważyć, że jest ona prawdziwa także dla pozostałych k oraz dla $n = 0$. Mianowicie:

- dla $k < -1$ wszystkie współczynniki dwumianowe są równe 0;
- dla $k = -1$ otrzymujemy tożsamość
$$(n+1) \cdot (-1) \cdot 0 + (n+1) \cdot 0 \cdot 1 - n \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$
- dla $k = 0$ otrzymujemy tożsamość
$$(n+1) \cdot 0 \cdot 1 + (n+1) \cdot 1 \cdot n - n \cdot 1 \cdot (n+1) = 0;$$

- dla $k = n$ otrzymujemy tożsamość
$$(n+1) \cdot n \cdot 1 + (n+1) \cdot (n+1) \cdot 0 - n \cdot (n+1) \cdot 1 = 0;$$
- dla $k > n$ wszystkie współczynniki dwumianowe są równe 0.

Ponadto dla $n = 0$ otrzymujemy równanie
$$1 \cdot k \cdot \binom{0}{k} + 1 \cdot (k+1) \cdot \binom{0}{k+1} - 0 \cdot (k+1) \cdot \binom{1}{k+1} = 0,$$
czyli
$$k \cdot \binom{0}{k} + (k+1) \cdot \binom{0}{k+1} = 0.$$
Podobnie jak wyżej sprawdzamy, że dla każdego k to równanie jest tożsamościowe.

W ten sposób otrzymaliśmy tożsamość
$$(n+1) \cdot F(n,k) + (n+1) \cdot F(n,k+1) - n \cdot F(n+1,k+1) = 0$$
dla $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Mamy zatem
$$(n+1) \cdot \sum_k F(n,k) + (n+1) \cdot \sum_k F(n,k+1) - n \cdot \sum_k F(n+1,k+1) = 0.$$
Korzystamy teraz z oczywistych równości:
$$\sum_k F(m,k) = \sum_k F(m,k+1) = \ldots = \sum_k F(m,k+l) = f(m).$$
Mamy zatem
$$(n+1) \cdot f(n) + (n+1) \cdot f(n) - n \cdot f(n+1) = 0,$$
czyli
$$f(n+1) = \frac{2(n+1)}{n} \cdot f(n)$$
dla $n \geq 1$. Korzystając z tego równania rekurencyjnego łatwo dowodzimy przez indukcję, że
$$f(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$
Ten wzór możemy także wyprowadzić w następujący sposób. Najpierw obliczamy
$$f(1) = \sum_k k\frac{1}{k} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$
Następnie zauważamy, że
$$\begin{aligned}
f(1) &= 1, \\
f(2) &= \frac{2 \cdot 2}{1} \cdot f(1) = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot f(1), \\
f(3) &= \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot f(2) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot f(2), \\
f(4) &= \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot f(3) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot f(3), \\
\ldots & \ldots \\
f(n-1) &= \frac{2 \cdot (n-1)}{n-2} \cdot f(n-2) = 2 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot f(n-2), \\
f(n) &= \frac{2 \cdot n}{n-1} \cdot f(n-1) = 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot f(n-1).
\end{aligned}$$
Mnożąc te n równości stronami, otrzymujemy
$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n) = 2^{n-1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1),$$
czyli
$$f(n) = 2^{n-1} \cdot n.$$

To, że powyższe postępowanie zakończyło się sukcesem i otrzymaliśmy równanie rekurencyjne dla funkcji f, wynikało z tego, że wszystkie ilorazy
$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \quad \text{oraz} \quad \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}$$

wyrażały się tak prostymi funkcjami wymiernymi, iż po pomnożeniu równości

$$a + b \cdot \frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c \cdot \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d \cdot \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0$$

przez wspólny mianownik, otrzymaliśmy po lewej stronie wielomian zmiennej k (w naszym przypadku trójmian kwadratowy) stopnia niższego o 2 od liczby niewiadomych (w tym przypadku równej 4). Można było zauważyć, że wybierając tylko ilorazy

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \quad \text{oraz} \quad \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}$$

otrzymalibyśmy trzy niewiadome i wielomian stopnia pierwszego:

$$a + c \cdot \frac{n-k}{k} + d \cdot \frac{n+1}{k} = 0,$$

czyli

$$ak + c(n-k) + d(n+1) = 0.$$

Po uporządkowaniu wyrazów według potęg k, otrzymujemy teraz

$$(a-c)k + cn + d(n+1) = 0.$$

Tym razem otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ cn + d(n+1) = 0 \end{cases}$$

którego rozwiązanie otrzymujemy tak jak poprzednio:

$$\begin{cases} a = n+1 \\ c = n+1 \\ d = -n \end{cases}$$

W następnym przykładzie zastosujemy także tę uproszczoną metodę znajdowania współczynników w równaniu rekurencyjnym. Zauważmy tylko, że w rozwiązaniu za pomocą komputera rozważalibyśmy układ równań ze wszystkimi niewiadomymi a, b, c i d. Zauważmy jeszcze, że poza prostymi przekształceniami algebraicznymi, stosowany program do obliczeń symbolicznych musi „umieć” skracać wyrażenia zawierające silnie, tzn. musi „umieć” stosować wzór rekurencyjny

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Wreszcie może okazać się, że rozważane ilorazy wyrażają się bardziej skomplikowanymi funkcjami wymiernymi. Musimy wtedy wprowadzić więcej niewiadomych i rozważać więcej ilorazów. Wybieramy stałe I oraz J i rozważamy równanie postaci

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j} \cdot F(n+i, k+j) = 0$$

mające $(I+1)(J+1)$ niewiadomych. Stałe I oraz J dobieramy tak, by równanie

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j} \cdot \frac{F(n+i,k+j)}{F(n,k)} = 0$$

po skróceniu silnii i pomnożeniu przez wspólny mianownik można było doprowadzić do postaci, w której po lewej stronie wystąpi wielomian zmiennej k stopnia o co najmniej 2 niższego niż liczba niewiadomych. Nie będziemy tu dowodzić, w jakich przypadkach jest to możliwe.

W przypadku „tożsamości 4^n” wybierzemy $I = 2$ oraz $J = 1$. Nie będziemy rozwiązywać układu równań z sześcioma niewiadomymi; pozostawimy jako ćwiczenie przeprowadzenie odpowiednich obliczeń prowadzące do znalezienia wielomianu czwartego stopnia zmiennej k. Wystarczy do tego prosty program do obliczeń symbolicznych, np. DERIVE. My wybierzemy natomiast takie ilorazy, by otrzymany na końcu wielomian zmiennej k był stopnia drugiego. Przyjmiemy także odpowiednie założenia dotyczące n i k – tak, by móc korzystać z twierdzenia 1. Sprawdzenie, że otrzymane równanie rekurencyjne jest spełnione przez wszystkie liczby n i k pozostawimy także jako ćwiczenie.

Przykład 2. Definiujemy funkcję f wzorem

$$f(n) = \sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

Zauważmy, że

$$f(n) = \sum_k F(n,k),$$

gdzie

$$F(n,k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$. Oczywiście funkcja $F(n,k)$ spełnia warunek sumowalności: dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i prawie wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ mamy równość $F(n,k) = 0$. Jest tak bowiem dla $k < 0$ i dla $k > n$.

Przyjmujemy najpierw, że $0 \leq k \leq n-1$ i obliczamy wszystkie ilorazy $\frac{F(n+i,k+j)}{F(n,k)}$ dla $i \in \{0,1,2\}$ oraz $j \in \{0,1\}$; podamy tylko wyniki, szczegóły obliczeń pozostawiając jako ćwiczenie:

$$\begin{aligned}
\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} &= \frac{2(2n-2k+1)}{n-k+1},\\
\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{(2k+1)(n-k)}{(k+1)(2n-2k-1)},\\
\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{2(2k+1)}{k+1},\\
\frac{F(n+2,k)}{F(n,k)} &= \frac{4(2n-2k+1)(2n-2k+3)}{(n-k+1)(n-k+2)},\\
\frac{F(n+2,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{4(2k+1)(2n-2k+1)}{(k+1)(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że ilorazy pierwszy, trzeci i piąty można doprowadzić do wspólnego mianownika $(k+1)(n-k+1)$ stopnia 2 ze względu na zmienną k. Zauważamy również, że po pomnożeniu odpowiedniego równania przez ten wspólny mianownik, otrzymamy po lewej stronie trójmian kwadratowy zmiennej k. A oto obliczenia.

Rozważamy równanie

$$a \cdot F(n,k) + b \cdot F(n+1,k) + c \cdot F(n+1,k+1) + d \cdot F(n+2,k+1) = 0,$$

czyli

$$a + b \cdot \frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c \cdot \frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} + d \cdot \frac{F(n+2,k+1)}{F(n,k)} = 0.$$

Po podstawieniu obliczonych ilorazów otrzymujemy

$$a + b \cdot \frac{2(2n-2k+1)}{n-k+1} + c \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} + d \cdot \frac{4(2k+1)(2n-2k+1)}{(k+1)(n-k+1)} = 0.$$

Następnie mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik $(k+1)(n-k+1)$, otrzymując równanie

$$\begin{aligned}
&a(k+1)(n-k+1) + 2b(k+1)(2n-2k+1) +\\
&\qquad + 2c(2k+1)(n-k+1) + 4d(2k+1)(2n-2k+1) = 0,
\end{aligned}$$

które po otwarciu nawiasów i uporządkowaniu wyrazów przybiera postać

$$\begin{aligned}
&-(a+4b+4c+16d)\cdot k^2 + \big(an + 2b(2n-1) + 2c(2n+1) + 16dn\big)\cdot k +\\
&\qquad + \big(a(n+1) + 2b(2n+1) + 2c(n+1) + 4d(2n+1)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Tak jak poprzednio, otrzymujemy układ trzech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{cases}
a + 4b + 4c + 16d = 0\\
an + 2b(2n-1) + 2c(2n+1) + 16dn = 0\\
a(n+1) + 2b(2n+1) + 2c(n+1) + 4d(2n+1) = 0
\end{cases}$$

W podobny sposób jak poprzednio możemy otrzymać rozwiązanie

$$\begin{cases} a = 16(n+1) \\ b = -2(2n+3) \\ c = -2(2n+3) \\ d = n+2 \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$16(n+1)\cdot F(n,k) - 2(2n+3)\cdot F(n+1,k) - 2(2n+3)\cdot F(n+1,k+1)+ \\ +(n+2)\cdot F(n+2,k+1)=0.$$

Tak jak w poprzednim przykładzie możemy sprawdzić, że to równanie jest spełnione dla wszystkich liczb całkowitych k. Po zsumowaniu (względem k) i zastosowaniu równości

$$\sum_k F(n,k) = f(n), \quad \sum_k F(n+1,k) = \sum_k F(n+1,k+1) = f(n+1)$$

oraz

$$\sum_k F(n+2,k+1) = f(n+2)$$

otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$(n+2)\cdot f(n+2) - 4(2n+3)\cdot f(n+1) + 16(n+1)\cdot f(n) = 0.$$

Przez indukcję można teraz udowodnić, że $f(n) = 4^n$, co zakończy dowód „tożsamości 4^n". Pokażemy także sposób obliczenia, że istotnie $f(n) = 4^n$.

Podzielmy obie strony otrzymanego równania rekurencyjnego przez 4^{n+2}:

$$(n+2)\cdot \frac{f(n+2)}{4^{n+2}} - (2n+3)\cdot \frac{f(n+1)}{4^{n+1}} + (n+1)\cdot \frac{f(n)}{4^n} = 0.$$

Definiujemy nową funkcję g wzorem

$$g(n) = \frac{f(n)}{4^n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy równanie rekurencyjne dla funkcji g:

$$(n+2)\cdot g(n+2) - (2n+3)\cdot g(n+1) + (n+1)\cdot g(n) = 0.$$

Przekształcamy otrzymane równanie:

$$(n+2)\cdot g(n+2) - (n+2)\cdot g(n+1) - (n+1)\cdot g(n+1) + (n+1)\cdot g(n) = 0,$$

czyli

$$(n+2)\cdot \big(g(n+2) - g(n+1)\big) - (n+1)\cdot \big(g(n+1) - g(n)\big) = 0.$$

Definiujemy następną funkcję wzorem

$$h(n) = g(n+1) - g(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Spełnia ona równanie rekurencyjne

$$(n+2)\cdot h(n+1) - (n+1)\cdot h(n) = 0,$$

czyli

$$h(n+1) = \frac{n+1}{n+2}\cdot h(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Teraz wystarczy zauważyć, że

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 16,$$

skąd dostajemy

$$g(1) = 1, \quad g(2) = 1,$$

czyli $h(1) = 0$. Stąd wynika, że $h(n) = 0$ dla $n \geq 1$, czyli $g(n) = 1$ dla $n \geq 1$. Zatem

$$f(n) = \sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

dla $n \geq 1$. Bezpośrednio obliczamy, że także $f(0) = 4^0$. To kończy dowód „tożsamości 4^n".

5. Pary Wilfa-Zeilbergera

W tym paragrafie pokażemy pochodzącą od Wilfa i Zeilbergera metodę dowodzenia tożsamości kombinatorycznych. Przypuśćmy, że chcemy udowodnić tożsamość postaci

$$\sum_k t(n,k) = P(n),$$

gdzie funkcja $t(n,k)$ spełnia warunek sumowalności: dla każdej liczby naturalnej n równość $t(n,k)=0$ zachodzi dla prawie wszystkich liczb całkowitych k. Przyjmujemy ponadto, że $P(n)\neq 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Dzielimy wówczas obie strony dowodzonej tożsamości przez $P(n)$:

$$\sum_k \frac{t(n,k)}{P(n)} = 1.$$

Definiujemy

$$F(n,k) = \frac{t(n,k)}{P(n)}.$$

Oczywiście funkcja $F(n,k)$ spełnia warunek sumowalności. Niech teraz $G(n,k)$ będzie inną funkcją spełniającą warunek sumowalności. Mówimy, że para funkcji

$$F(n,k) \quad \text{oraz} \quad G(n,k)$$

jest **parą Wilfa-Zeilbergera** dla tożsamości

$$\sum_k t(n,k) = P(n),$$

jeśli dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

Definiujemy następnie

$$f(n) = \sum_k F(n,k) \quad \text{oraz} \quad g(n) = \sum_k G(n,k).$$

Mamy wówczas

$$\sum_k F(n+1,k) - \sum_k F(n,k) = \sum_k G(n,k+1) - \sum_k G(n,k),$$

czyli

$$f(n+1) - f(n) = g(n) - g(n) = 0.$$

Korzystamy tu z równości

$$\sum_k G(n,k+1) = \sum_k G(n,k) = g(n).$$

Funkcja $f(n)$ jest więc stała i do zakończenia dowodu naszej tożsamości wystarczy pokazać, że $f(n)=1$, czyli, że

$$\sum_k t(1,k) = P(1).$$

Zilustrujemy teraz tę metodę dowodzenia tożsamości dwoma przykładami; będą to te same tożsamości, które wybraliśmy jako ilustrację algorytmu Siostry Celine.

Przykład 3. Udowodnimy tożsamość

$$\sum_k k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}.$$

Pokażemy, że para funkcji

$$F(n,k) = \frac{k\cdot\binom{n}{k}}{n\cdot 2^{n-1}},$$

$$G(n,k) = -\frac{\binom{n-1}{k-2}}{2^n}$$

jest parą Wilfa-Zeilbergera dla naszej tożsamości. Nietrudno zauważyć, że obie funkcje spełniają warunek sumowalności. Mamy udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

czyli

$$\frac{k\cdot\binom{n+1}{k}}{(n+1)\cdot 2^n}-\frac{k\cdot\binom{n}{k}}{n\cdot 2^{n-1}}=-\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}+\frac{\binom{n-1}{k-2}}{2^n}.$$

Sprawdzenie tej równości dla $k\leq 1$ oraz dla $k\geq n+1$ jest łatwym ćwiczeniem. Przyjmijmy zatem, że $2\leq k\leq n$ i skorzystajmy z twierdzenia 1. Mamy pokazać, że

$$\frac{k\cdot(n+1)!}{(n+1)\cdot 2^n\cdot k!\cdot(n-k+1)!}-\frac{k\cdot n!}{n\cdot 2^{n-1}\cdot k!\cdot(n-k)!}=$$
$$=-\frac{(n-1)!}{2^n\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{2^n\cdot(k-2)!\cdot(n-k+1)!}.$$

Dzielimy obie strony tej równości przez

$$\frac{(n-1)!}{2^{n-1}\cdot(k-2)!\cdot(n-k)!},$$

otrzymując równość równoważną

$$\frac{kn(n+1)}{2k(k-1)(n-k+1)(n+1)}-\frac{kn}{kn(k-1)}=-\frac{1}{2(k-1)}+\frac{1}{2(n-k+1)}.$$

Następnie skracamy ułamki

$$\frac{n}{2(k-1)(n-k+1)}-\frac{1}{k-1}=-\frac{1}{2(k-1)}+\frac{1}{2(n-k+1)}$$

i po pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik, otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych po obu stronach, otrzymujemy równoważną równość prawdziwą

$$-n+2k-2=-n+2k-2.$$

To kończy dowód naszej tożsamości.

Przykład 4. Udowodnimy teraz „tożsamość 4^n":

$$\sum_k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n.$$

Definiujemy funkcje

$$F(n,k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}},$$

$$G(n,k)=-\frac{k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k+1}{n-k+1}}{(n+1)2^{2n+1}}.$$

Oczywiście obie te funkcje spełniają warunek sumowalności. Pokażemy, że te funkcje tworzą parę Wilfa-Zeilbergera dla tożsamości 4^n. W tym celu musimy pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$F(n+1,k)-F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k),$$

czyli

$$\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k+2}{n-k+1}}{2^{2n+2}}-\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}=-\frac{(k+1)\binom{2k+2}{k+1}\binom{2n-2k-1}{n-k}}{(n+1)2^{2n+1}}+\frac{k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k+1}{n-k+1}}{(n+1)2^{2n+1}}.$$

Udowodnimy tę równość przy założeniu, że $0\leq k\leq n$; dla pozostałych k jest to proste ćwiczenie. Skorzystajmy zatem z twierdzenia 1. Mamy udowodnić, że

$$\frac{(2k)!\cdot(2n-2k+2)!}{2^{2n+2}\cdot k!^2\cdot(n-k+1)!^2}-\frac{(2k)!\cdot(2n-2k)!}{2^{2n}\cdot k!^2\cdot(n-k)!^2}=$$
$$=-\frac{(k+1)\cdot(2k+2)!\cdot(2n-2k-1)!}{(n+1)2^{2n+1}\cdot(k+1)!^2\cdot(n-k)!\cdot(n-k-1)!}+$$
$$+\frac{k\cdot(2k)!\cdot(2n-2k+1)!}{(n+1)2^{2n+1}\cdot k!^2\cdot(n-k+1)!\cdot(n-k)!}.$$

Dzielimy obie strony równości przez

$$\frac{(2k)!\cdot(2n-2k-1)!}{2^{2n}\cdot k!^2\cdot(n-k)!\cdot(n-k-1)!},$$

otrzymując równość równoważną

$$\frac{(2n-2k)(2n-2k+1)(2n-2k+2)}{4(n-k+1)^2(n-k)} - \frac{2n-2k}{n-k} =$$
$$= -\frac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{2(n+1)(k+1)^2} + \frac{k(2n-2k)(2n-2k+1)}{2(n+1)(n-k+1)(n-k)}.$$

Po skróceniu ułamków otrzymujemy

$$\frac{2n-2k+1}{n-k+1} - 2 = -\frac{2k+1}{n+1} + \frac{k(2n-2k+1)}{(n+1)(n-k+1)}.$$

Mnożymy obie strony tej równości przez wspólny mianownik $(n+1)(n-k+1)$, otrzymując

$$(n+1)(2n-2k+1) - 2(n+1)(n-k+1) = -(2k+1)(n-k+1) + k(2n-2k+1)$$

i bez trudu sprawdzamy, że otrzymana równość jest tożsamością. To kończy dowód tożsamości 4^n.

Zauważmy, że – podobnie jak w przypadku algorytmu Siostry Celine – wszystkie obliczenia mogły być wykonane automatycznie przez komputer za pomocą programu do obliczeń symbolicznych. Tak jak poprzednio, ten program musi umieć skracać wyrażenia zawierające silnie, tzn. musi umieć korzystać z indukcyjnej definicji:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Ponadto musi umieć wykonywać proste obliczenia symboliczne: sprowadzać do wspólnego mianownika czy redukować wyrazy podobne. Zasadaniczym problemem w metodzie Wilfa-Zeilbergera jest zatem nie wykonanie obliczeń, ale znalezienie funkcji $G(n,k)$. Tym problemem zajmiemy się w następnym paragrafie.

6. Algorytm Gospera

Obliczanie wielu sum sprowadza się do obliczania tzw. „sum teleskopowych”. Popatrzmy na dwa przykłady.

Przykład 5. Udowodnimy wzór

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$s_k = \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{oraz} \quad z_k = -\frac{1}{k}.$$

Proste obliczenie pokazuje, że

$$s_k = z_{k+1} - z_k$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ Mamy zatem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} z_{k+1} - z_k = \sum_{k=1}^{n} z_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=2}^{n+1} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k =$$
$$= z_{n+1} - z_1 = -\frac{1}{n+1} - (-1) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Sumy postaci

$$\sum_{k=1}^{n} z_{k+1} - z_k = (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + (z_{n+1} - z_n) = z_{n+1} - z_1$$

nazywamy czasami **sumami teleskopowymi**. Obliczenie sumy

$$\sum_{k=1}^{n} s_k$$

było możliwe dzięki wyrażeniu każdego składnika s_k za pomocą takiej różnicy, że otrzymana suma stała się sumą teleskopową.

Przykład 6. Udowodnimy wzór

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Niech tym razem

$$s_k = k \cdot k! \quad \text{oraz} \quad z_k = k!$$

Nietrudno sprawdzić, że i tym razem $s_k = z_{k+1} - z_k$, skąd – tak jak wyżej – wynika, że

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = z_{n+1} - z_1 = (n+1)! - 1.$$

Opiszemy teraz najprostszą wersję algorytmu pochodzącego od Gospera, za pomocą którego w wielu przypadkach potrafimy wyrazić daną sumę za pomocą sumy teleskopowej. Przypuśćmy zatem, że musimy obliczyć sumę

$$\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Najpierw obliczamy iloraz

$$\frac{s_{k+1}}{s_k}.$$

Następnie znajdujemy wielomiany $p(k)$, $q(k)$ i $r(k)$ (być może z parametrami, np. z parametrem n) takie, że

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{q(k+1)}{r(k+1)} \cdot \frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Teraz znajdujemy wielomian $f(k)$ taki, że

$$q(k+1) \cdot f(k) - r(k) \cdot f(k-1) = p(k).$$

W przypadku, gdy spełnione jest założenie, że $\mathrm{NWD}(q(k), r(k+j)) = 1$ dla $j \in \mathbb{N}$ oraz istnieje funkcja wymierna $f(k)$ spełniająca ostatnie równanie, to ta funkcja jest wielomianem. Jeśli taki wielomian $f(k)$ znajdziemy, to definiujemy

$$z_k = \frac{r(k)}{p(k)} \cdot f(k-1) \cdot s_k.$$

W przypadku, gdy takiego wielomianu nie znajdziemy, wykonanie algorytmu kończymy odnotowując porażkę.

Przykład 5 – c. d. Ponieważ

$$s_k = \frac{1}{k(k+1)},$$

więc

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{k}{k+2}.$$

Przyjmujemy

$$p(k) = 1, \quad q(k) = k - 1, \quad r(k) = k + 1.$$

Wówczas

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{k}{k+2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{q(k+1)}{r(k+1)} \cdot \frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Przyjmujemy następnie $f(k) = c$ (tzn. przyjmujemy, że wielomian $f(k)$ jest stały). Mamy wówczas

$$q(k+1) \cdot f(k) - r(k) \cdot f(k-1) = kc - (k+1)c = -c = p(k) = 1,$$

skąd $f(k) = c = -1$. Zatem

$$z_k = \frac{r(k)}{p(k)} \cdot f(k-1) \cdot s_k = \frac{k+1}{1} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{k}.$$

Przykład 6 – c. d. Tym razem

$$s_k = k \cdot k!,$$

skąd wynika, że

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{(k+1)^2}{k} = \frac{k+1}{1} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Przyjmujemy

$$p(k) = k, \quad q(k) = k, \quad r(k) = 1.$$

Wówczas

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{k+1}{1} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{q(k+1)}{r(k+1)} \cdot \frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Znów zauważamy, że wielomian $f(k)$ może być stały: $f(k) = c$ oraz

$$q(k+1) \cdot f(k) - r(k) \cdot f(k-1) = (k+1)c - c = kc = p(k) = k,$$

skąd wynika, że $f(k) = c = 1$. Zatem

$$z_k = \frac{r(k)}{p(k)} \cdot f(k-1) \cdot s_k = \frac{1}{k} \cdot 1 \cdot k \cdot k! = k!$$

Przykład 7. Obliczymy sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}$$

Mamy zatem

$$s_k = \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}},$$

czyli

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{k+1}{k-n}.$$

Przyjmujemy

$$p(k) = 1, \quad q(k) = k, \quad r(k) = k - n - 1.$$

Wówczas

$$p(k+1) = 1, \quad q(k+1) = k+1, \quad r(k+1) = k - n,$$

a więc

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{k+1}{k-n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{q(k+1)}{r(k+1)} \cdot \frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Tak samo jak w poprzednich przykładach przypuszczamy, że wielomian $f(k)$ jest stały i podobne obliczenia pokazują, że

$$f(k) = \frac{1}{n+2}.$$

Zatem

$$z_k = \frac{r(k)}{p(k)} \cdot f(k-1) \cdot s_k = \frac{k-n-1}{1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} = \frac{(-1)^k \cdot (k-n-1)}{(n+2) \cdot \binom{n}{k}}.$$

Sprawdzenie, że jeśli $0 \le k \le n-1$, to $s_k = z_{k+1} - z_k$, pozostawimy jako ćwiczenie. Obliczymy natomiast poszukiwaną sumę:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s_k &= s_n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k = s_n + \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} - z_k = s_n + z_n - z_0 = \\ &= \frac{(-1)^n}{\binom{n}{n}} + \frac{(-1)^n \cdot (-1)}{(n+2) \cdot \binom{n}{n}} - \frac{(-1)^0 \cdot (-n-1)}{(n+2) \cdot \binom{n}{0}} = (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} = \\ &= \frac{(n+2) \cdot (-1)^n + (-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2} = \frac{(n+1) \cdot \big(1 + (-1)^n\big)}{n+2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{n+2} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Za pomocą algorytmu Gospera możemy szukać funkcji $G(n,k)$ takiej, by para (F,G) była parą Wilfa-Zeilbergera dla pewnej tożsamości kombinatorycznej. W tym celu przyjmujemy

$$s_k = F(n+1,k) - F(n,k)$$

i po znalezieniu z_k przyjmujemy $G(n,k) = z_k$. Popatrzmy na dwa przykłady; znajdziemy w nich pary Wilfa-Zeilbergera dla tożsamości rozważanych w przykładach 3 i 4 poprzedniego paragrafu.

Przykład 8. Szukamy pary Wilfa-Zeilbergera dla tożsamości

$$\sum_{k} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Przyjmujemy

$$F(n,k)=\frac{k\cdot\binom{n}{k}}{n\cdot 2^{n-1}}$$

oraz

$$\begin{aligned}s_k=F(n+1,k)-F(n,k)&=\frac{k\cdot\binom{n+1}{k}}{(n+1)\cdot 2^n}-\frac{k\cdot\binom{n}{k}}{n\cdot 2^{n-1}}=\\&=\frac{k\cdot(n+1)!}{(n+1)\cdot 2^n\cdot k!\cdot(n-k+1)!}-\frac{k\cdot n!}{n\cdot 2^{n-1}\cdot k!\cdot(n-k)!}=\\&=\frac{k\cdot n!}{2^{n-1}\cdot k!\cdot(n-k)!}\cdot\left(\frac{n+1}{2(n+1)(n-k+1)}-\frac{1}{n}\right)=\\&=\frac{n!}{2^{n-1}\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-2(n-k+1)}{2n(n-k+1)}=\\&=\frac{(n-1)!\cdot(n-2n+2k-2)}{2^n\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}=\frac{(n-1)!\cdot(2k-n-2)}{2^n\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}\end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$s_{k+1}=\frac{(n-1)!\cdot(2k-n)}{2^n\cdot k!\cdot(n-k)!}$$

i następnie

$$\frac{s_{k+1}}{s_k}=\frac{(n-1)!\cdot(2k-n)\cdot 2^n\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}{2^n\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-1)!\cdot(2k-n-2)}=-\frac{(k-n-1)(2k-n)}{k(2k-n-2)}.$$

Przyjmujemy teraz

$$p(k)=2k-n-2,\quad q(k)=-(k-n-2),\quad r(k)=k-1.$$

Wówczas

$$p(k+1)=2k-n,\quad q(k+1)=-(k-n-1),\quad r(k+1)=k,$$

a więc

$$\frac{s_{k+1}}{s_k}=\frac{-(k-n-1)}{k}\cdot\frac{2k-n}{2k-n-2}=\frac{q(k+1)}{r(k+1)}\cdot\frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Jeszcze raz szukamy wielomianu stałego $f(k)=c$ takiego, by

$$q(k+1)\cdot f(k)-r(k)\cdot f(k-1)=p(k).$$

Mamy więc równanie z niewiadomą c:

$$-(k-n-1)c-(k-1)c=2k-n-2,$$

z którego otrzymujemy $c=-1$. Ostatecznie dostajemy znany nam z przykładu 3 wzór na funkcję $G(n,k)$:

$$\begin{aligned}G(n,k)=z_k=\frac{r(k)}{p(k)}\cdot f(k-1)\cdot s_k=\frac{k-1}{2k-n-2}\cdot(-1)\cdot\frac{(n-1)!\cdot(2k-n-2)}{2^n\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}=\\=-\frac{(n-1)!}{2^n\cdot(k-2)!\cdot(n-k+1)!}=-\frac{\binom{n-1}{k-2}}{2^n}.\end{aligned}$$

Przykład 9. Szukamy pary Wilfa-Zeilbergera dla „tożsamości 4^n”:

$$\sum_k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n.$$

Przyjmujemy

$$F(n,k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}$$

oraz

$$s_k=F(n+1,k)-F(n,k).$$

Zanim obliczymy s_k, udowodnimy następujący lemat:

Lemat. $\binom{2m+2}{m+1}=\frac{2(2m+1)}{m+1}\cdot\binom{2m}{m}.$

Dowód. Korzystamy kilkakrotnie z równości podanych po twierdzeniu 1:

$$\binom{2m+2}{m+1}=\frac{2m+2}{m+1}\cdot\binom{2m+1}{m}=2\cdot\binom{2m+1}{m+1}=\frac{2(2m+1)}{m+1}\cdot\binom{2m}{m}$$

Powracamy do przykładu 9. Mamy teraz

$$s_k = F(n+1,k) - F(n,k) = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k+2}{n-k+1} - \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} =$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \left[\frac{2(2n-2k+1)}{n-k+1} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} - 4 \cdot \binom{2n-2k}{n-k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \frac{(2n-2k+1) - 2(n-k+1)}{n-k+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \frac{1}{k-n-1}.$$

Stąd – po nietrudnych obliczeniach – wynika, że

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{(2k+1)(k-n-1)}{(k+1)(2k-2n+1)}.$$

Przyjmujemy teraz

$$p(k) = 1, \quad q(k) = (2k-1)(k-n-2), \quad r(k) = k(2k-2n-1),$$

czyli

$$p(k+1) = 1, \quad q(k+1) = (2k+1)(k-n-1), \quad r(k+1) = (k+1)(2k-2n+1).$$

Mamy zatem

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{q(k+1)}{r(k+1)} \cdot \frac{p(k+1)}{p(k)}.$$

Po raz kolejny szukamy wielomianu stałego $f(k) = c$ takiego, by

$$q(k+1) \cdot f(k) - r(k) \cdot f(k-1) = p(k).$$

Tym razem

$$f(k) = -\frac{1}{n+1},$$

skąd dostajemy znany z przykładu 4 wzór na funkcję $G(n,k)$:

$$G(n,k) = z_k = \frac{r(k)}{p(k)} \cdot f(k-1) \cdot s_k =$$

$$= \frac{k(2k-2n-1)}{1} \cdot \frac{-1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \frac{1}{k-n-1} =$$

$$= -\frac{k}{(n+1)2^{2n+1}} \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k+1}{n-k+1}.$$

7. Kilka zadań

Za pomocą algorytmu Siostry Celine znajdź równania rekurencyjne dla następujących funkcji, a następnie znajdź wzory jawne:

1. $f(n) = \sum_k \binom{n}{k}$,

2. $f(n) = \sum_k \binom{n}{k}^2$,

3. $f(n) = \sum_k 2^k \cdot \binom{n}{k}$,

4. $f(n) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{2k}{k}(-2)^{n-k}$,

5. $f(n) = \sum_k \frac{\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}}{4^k}$,

6. $f(n) = \sum_k \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{2k+1}{k+1}\binom{n+k}{2k}$.

Udowodnij następujące tożsamości, sprawdzając, że podane pary funkcji są parami Wilfa-Zeilbergera dla tych tożsamości:

7. $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$

$$F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n},$$

$$G(n,k) = -\frac{\binom{n}{k-1}}{2^{n+1}}.$$

8. $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$$F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}},$$

$$G(n,k) = -\frac{3n-2k+3}{2(2n+1)} \cdot \frac{\binom{n}{k-1}^2}{\binom{2n}{n}}.$$

9. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k} 4^{n-k} = \binom{2n}{n}$

$$F(n,k) = (-1)^k \frac{\binom{n}{k}\binom{2k}{k}4^{n-k}}{\binom{2n}{n}},$$

$$G(n,k) = (-1)^{k-1}\frac{2k-1}{2n+1} \cdot \frac{\binom{n}{k-1}\binom{2k-2}{k-1}4^{n-k+1}}{\binom{2n}{n}}.$$

10. $\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}$

$$F(n,k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{m}},$$

$$G(n,k) = \frac{k-m-1}{m+n+1} \cdot F(n,k-1).$$

11. $\sum_k k\binom{n}{k}\binom{m}{k} = \frac{mn}{m+n}\binom{m+n}{m}$

$$F(n,k) = \frac{k(m+n)\binom{n}{k}\binom{m}{k}}{mn\binom{m+n}{m}},$$

$$G(n,k) = -\frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k-2}}{\binom{m+n}{m}}.$$

12. $\sum_k (2n-3k)\binom{n}{k}^2\binom{2k}{k} = 0$

$$F(n,k) = (2n-3k)\binom{n}{k}^2\binom{2k}{k},$$

$$G(n,k) = k\binom{n}{k-1}^2\binom{2k}{k}.$$

13. Za pomocą algorytmu Gospera oblicz sumę:

$$\sum_k \frac{(-1)^k\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}.$$

8. Bibliografia

Kilka innych dowodów „tożsamości 4^n" można znaleźć w [4]. Stamtąd pochodzi dowód I. Dowód kombinatoryczny jest modyfikacją dowodu korzystającego z błądzenia przypadkowego. Dowód II pochodzi z [G]. Druga część wykładu została opracowana głównie na podstawie książki [P], pracy [WZ], wykładów Victora Adamchika [A] oraz pracy [M] zawierającej rozwiązania wielu zadań z Amarican Mathematical Monthly. W książce [P] można znaleźć obszerną bibliografię. Życiorys Siostry Celine można znaleźć w [F].

[A] http://www.andrew.cmu.edu/course/15-355/

[F] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Fasenmyer.html

[G] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik O., Matematyka konkretna, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1996.

[M] Nemes, I., Petkovsek, M., Wilf, H. S., Zeilberger, D., How to do Monthly problems with your computer, The American Mathematical Monthly 104 (June-July, 1997).

Także w [W].

Zob. także: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Monthly/

[P] Petkovsek, M., Wilf, H. S., Zeilberger, D., A = B, A. K. Peters, Welesley, 1996.

Także w: http://ww.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html

[W] http://www.math.upenn.edu/~wilf/index.html

[WZ] Wilf, H. S., Zeilberger, D, Rational functions certify combinatorial identities, Journal of the American Mathematical Society, 3 (1990), 147-158.

Także w [W] oraz [Z].

[Z] http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/index.html

[4] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=40150

9. Dodatek

Podamy tu szósty dowód „tożsamości 4^n”. Korzysta on z tzw. funkcji tworzących. **Funkcją tworzącą** dla ciągu (a_n) nazywamy funkcję $F(z)$ zmiennej zespolonej z określoną za pomocą wzoru

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Skorzystamy z dwóch wzorów, których nie będziemy dowodzić:

$$\frac{1}{az} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$$

oraz

$$(1+az)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n z^n$$

dla $a \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Obie sumy istnieją dla z takich, że $|az| < 1$, czyli $|z| < \frac{1}{|a|}$.

Mamy zatem

$$(1-4z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4)^n z^n$$

i korzystając ze wzoru

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}$$

wyprowadzonego w paragrafie 2, otrzymujemy

$$(1-4z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot (-4)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$

Następnie

$$\frac{1}{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^n.$$

Skorzystamy teraz ze wzoru Cauchy’ego na iloczyn szeregów potęgowych. Niech

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{oraz} \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Wówczas

$$F(z) \cdot G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

gdzie ciąg (c_n) jest określony wzorem

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Przyjmijmy

$$F(z) = G(z) = (1-4z)^{-1/2}.$$

Wówczas

$$a_n = b_n = \binom{2n}{n}$$

oraz

$$F(z) \cdot G(z) = (1-4z)^{-1} = \frac{1}{1-4z}.$$

Zatem dla ciągu (c_n) określonego wyżej mamy:

$$\sum_{n=0}^{n} c_n z^n = F(z) \cdot G(z) = \frac{1}{1-4z} = \sum_{n=0}^{n} 4^n z^n,$$

skąd wynika, że $c_n = 4^n$. Zatem

$$4^n = c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k},$$

co kończy dowód.