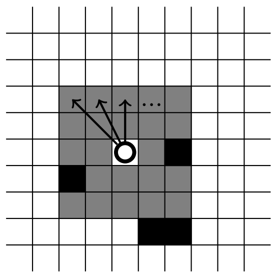
Problem anioła

Jakub RADOSZEWSKI, Warszawa

Wprowadzenie

Anioł z diabłem grają na nieskończonej planszy–kratownicy w następującą grę. Diabeł w każdym ruchu może zablokować dowolnie wybrane pole planszy – od tego momentu gry jest to pole zabronione dla anioła. Anioł porusza się po planszy jak figura szachowa – zaczyna grę na dowolnie wybranym polu, powiedzmy o współrzędnych $(0, 0)$, i w każdym ruchu może przemieścić się na pole odległe od aktualnego o co najwyżej m ruchów zwykłego króla szachowego. Innymi słowy, anioł może przeskoczyć z pola (x_1, y_1) na pole (x_2, y_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $|x_1 - x_2| \leqslant m$ oraz $|y_1 - y_2| \leqslant m$ (patrz rysunek 1). Mówimy, że anioł ma *moc m*. Anioł, jak to anioł, ma skrzydła, może więc fruwać nad polami zabronionymi, natomiast nie może na żadnym takim polu wylądować.



Rys. 1. Fragment planszy do gry; kółko oznacza aktualną pozycję anioła o mocy 2, pola zamalowane na szaro to pola, na które może on przeskoczyć w jednym ruchu, natomiast na czarno zamalowane są pola zabronione w wyniku ruchu diabła.

Celem diabła jest przyblokowanie anioła na dobre, czyli doprowadzenie do sytuacji, w której anioł nie może już wykonać żadnego ruchu. Natomiast anioł wygrywa, jeżeli może wykonywać ruchy w nieskończoność.

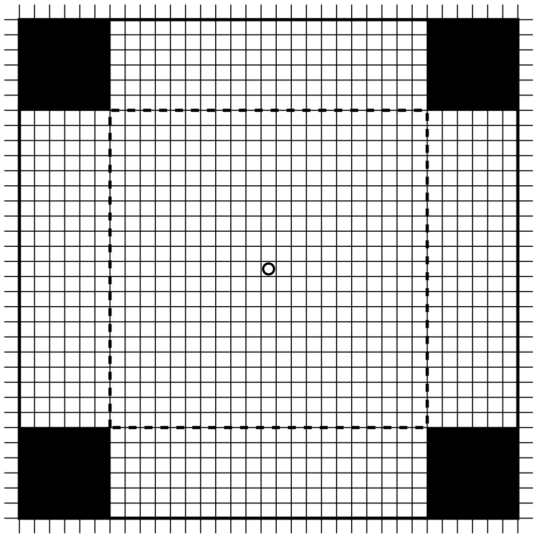
W tym artykule postaramy się odpowiedzieć na następujące, naturalne pytanie: czy któryś z graczy (anioł lub diabeł) ma w tej grze strategię wygrywającą, to znaczy może wygrać niezależnie od ruchów przeciwnika? A może zależy to od mocy anioła?

Anioł o mocy 1

Na początku rozpatrzymy szczególny przypadek anioła o mocy 1. Jest on o tyle nietypowy, że wówczas anioł zachowuje się dokładnie jak król szachowy, a co za tym idzie, jest pozbawiony skrzydeł, czyli nie może przeskoczyć nad żadną z pułapek diabła. W takim razie diabłu wystarczy, że otoczy takiego przyziemnego anioła murkiem o szerokości 1; potem będzie już mógł konsekwentnie blokować kolejne z otoczonych murkiem pól, aż aniołowi nie pozostanie żaden dozwolony ruch. Omówimy teraz z grubsza strategię diabła, która pozwala złapać takiego anioła w pułapkę.

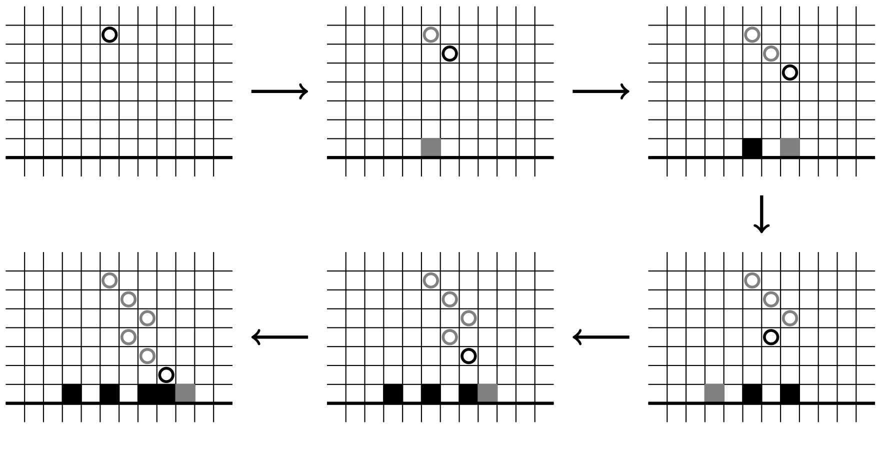
Na początku diabeł obiera sobie kwadratową planszę odpowiednio dużych rozmiarów $(2N + 1) \times (2N + 1)$, której środek przypada dokładnie w początkowej pozycji anioła. Celem diabła będzie niepozwolenie na to, aby anioł wydostał się z tej planszy.

Diabeł rozpoczyna budowanie pułapki od zablokowania najgroźniejszej dla niego drogi ucieczki anioła, a mianowicie narożników planszy. W każdym z nich blokuje on odpowiednio duży kwadrat, np. 6×6 – łącznie zajmie mu to 144 ruchy. Jeżeli teraz $N \geqslant 144 + 6 = 150$, to zanim anioł zdąży dotrzeć do brzegu planszy na odległość nie większą niż 6 jednostek, pułapki będą gotowe (patrz rysunek 2).



Rys. 2. Gdy diabeł buduje pułapki narożnikowe, anioł cały czas znajduje się odpowiednio daleko od krawędzi planszy (rysunek poglądowy, rzeczywiste wymiary kwadratu ograniczonego linią przerywaną są większe).

Odtąd każdą próbę ucieczki w wykonaniu anioła można traktować jako atak na pewną krawędź planszy, a krawędzie rozpatrywać osobno. Gdy tylko anioł znajdzie się w odległości nie większej niż 6 od danej krawędzi planszy, diabeł zaczyna budowanie połowicznego murku, czyli blokowanie co drugiego pola przy brzegu planszy, poczynając od pól najbliższych aktualnemu położeniu anioła. Kiedy zaś anioł zbliży się do krawędzi na odległość trzech pól, diabeł przystępuje do uzupełniania dziur w murku, ponownie począwszy od tych najbliższych aniołowi, remisy zaś rozstrzygając na korzyść pól znajdujących się poza zbudowanym fragmentem połowicznego murku. Rozważając pewną liczbę możliwości, można sprawdzić, że jeśli anioł dotrze kiedykolwiek do rzędu pól sąsiadującego z murkiem, natrafi na blokadę złożoną z co najmniej trzech kolejnych zablokowanych pól, która uniemożliwi mu ucieczkę (przykład na rysunku 3).



Rys. 3. Przykładowa, nieskuteczna szarża anioła ku krawędzi planszy.

Szczegółowe dopracowanie strategii diabła w konfrontacji z aniołem o mocy 1 i dalsze eksperymenty pozostawiamy Czytelnikowi. Dodajmy tylko, że znane są dużo subtelniejsze strategie diabła, które pozwalają zablokować anioła w kwadracie 35×35, a nawet i 33×33. Dość techniczny opis tych strategii można znaleźć w trzecim tomie książki *Winning Ways for your Mathematical Plays* autorstwa Elwyna Berlekampa, Johna Conwaya i Richarda Guya (książka niestety trudno dostępna, i tylko w angielskiej wersji językowej).

Jeśli komuś bardzo zależy na tej książce, to chyba najłatwiej ją znaleźć w internecie np. na rapidshare [przyp. red.]

Co z aniołami o mocy $m > 1$?

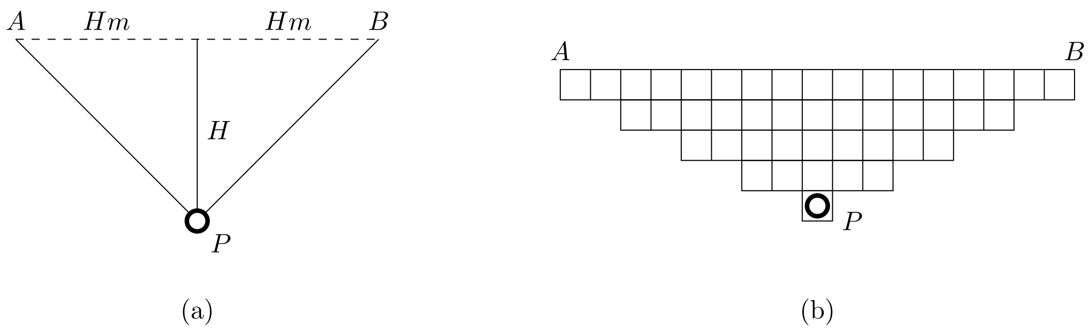
Odpowiedź na pytanie o strategię wygrywającą w przypadku $m > 1$ jest dużo mniej oczywista. Skądinąd wiadomo, że na pewno jeden z graczy ma w tej grze strategię wygrywającą (w ogólności, w przypadku gier nieskończonych nie jest to oczywiste). Niemniej jednak, od chwili, gdy w roku 1982 słynny matematyk John Conway wymyślił grę między aniołem i diabłem, przez ponad 20 lat nie było znane żadne rozstrzygnięcie w ogólnym przypadku, niezależnie od tego, jak dużą mocą dysponuje anioł! W 1996 r. Conway wyznaczył nawet nagrodę: 100$ za podanie strategii wygrywającej dla anioła, a 1000$ za strategię dla diabła.

Podane stawki sugerują, jakie rozstrzygnięcie problemu „obstawiał” sam Conway. Abyśmy i my mogli nabrać pewnej intuicji odnośnie do tego problemu, przeanalizujemy kilka przykładowych, sensownie brzmiących strategii anioła, i zastanowimy się, czy któraś z nich daje nadzieję na skuteczną ucieczkę w nieskończoność.

Pędzący anioł

Niezłą strategią dla anioła, w szczególności takiego o odpowiednio dużej mocy (np. $m = 1000$), wydaje się uciekanie cały czas w tym samym kierunku, dajmy na to na północ, ewentualnie omijając drobnymi zygzakami napotkane zasadzki diabła. Powiedzmy zatem, że anioł obieca diabłu, że przez całą grę, po każdym jego skoku wzrośnie współrzędna y jego położenia. Czy diabeł może w jakikolwiek sposób uczynić pożytek z tej informacji i przeszkodzić aniołowi w jego szarży?

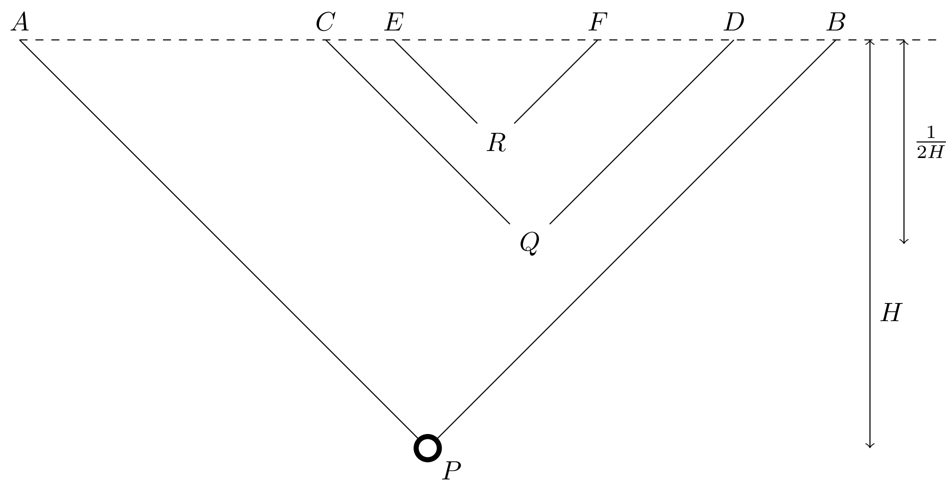
Okazuje się, że tak. Zauważmy, że jeżeli anioł znajduje się w pewnym momencie gry na pozycji P, to już do końca gry jego ruchy będą odbywały się w wycinku szachownicy ograniczonym półprostymi o początku w P i nachyleniach $\pm\frac{1}{m}$ (rysunek 4). Wiedząc o tym, diabeł może zacząć budować pułapkę na anioła na pewnej, bardzo dużej wysokości H ponad punktem P (odcinek AB) – dokładną wartość H obliczymy potem. Zauważmy, że wówczas $|AB| = 2Hm + 1$.



Rys. 4. Wycinek szachownicy ograniczający anioła; (a) ilustracja schematyczna, proporcje celowo niezachowane; (b) ilustracja faktyczna dla $m = 2$.

Pierwszym krokiem ku zbudowaniu pułapki będzie zablokowanie co k-tego pola na odcinku AB; wartość k powinna zostać dobrana tak, by diabeł spokojnie zdążył wykonać swoje zadanie, zanim anioł pokona połowę drogi dzielącej go od odcinka AB, czyli znajdzie się w pewnym punkcie Q odległym o $\frac{1}{2}H$ od AB (rysunek 5). Zauważmy, że trasa ta zajmie aniołowi co najmniej $\frac{H}{2m}$ ruchów. Aby zatem diabeł mógł zablokować żądane $\frac{2Hm+1}{k}$ pól, musi zachodzić nierówność

$$\frac{2Hm+1}{k} \leqslant \frac{H}{2m}, \quad \text{czyli} \quad k \geqslant 4m^2 + 1.$$



Rys. 5. Kolejne fazy budowy blokady diabła.

Po tym jak anioł osiągnie punkt Q, będzie się już zawsze znajdował w wycinku planszy QCD, przy czym $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. Odtąd strategia diabła będzie polegać na blokowaniu co k-tego wolnego pola na tym odcinku. Jeżeli i tym razem diabeł dobierze wartość parametru k tak jak poprzednio, to w momencie, gdy anioł znajdzie się w pewnym punkcie R położonym $\frac{1}{4}H$ jednostek pod odcinkiem CD, na całym tym odcinku dwa z każdych kolejnych k pól będą już zablokowane. Widać zatem, że po wykonaniu k takich faz, z których każda skraca dwukrotnie dystans anioła do odcinka AB, wszystkie pola fragmentu tego odcinka, który znajduje się wciąż w zasięgu anioła, będą zablokowane.

No dobrze, ale przecież anioł może mieć dowolnie dużą moc, więc taka cieniutka pułapka nie będzie stanowić dla niego zagrożenia! To prawda, ale zachęcony tym sukcesem, diabeł może zacząć budować drugi rządek pułapki, położony tuż pod dotychczas zbudowanym... W ten sposób, po kolejnych k fazach, z których każda polega na blokowaniu co k-tego wolnego pola w drugim rzędzie na odcinku wciąż osiągalnym dla anioła, diabłu uda się ukończyć blokadę o szerokości 2. Łatwo widać, że łącznie m takich dużych faz (nazwijmy je megafazami) jest potrzebnych do tego, żeby powstała pełna blokada o szerokości m, która już zdoła zatrzymać pędzącego anioła. m megafaz składa się z $mk \geqslant 4m^3 + m$ zwykłych faz. To oznacza, że jeżeli dobierzemy

$$H = m \cdot 2^{4m^3+m},$$

to po m megafazach anioł będzie się znajdował na pewno w odległości nie mniejszej niż m od odcinka AB i będzie miał przed sobą blokadę szeroką na m pól, która go skutecznie zatrzyma. Nie oznacza to oczywiście zwycięstwa diabła, a jedynie to, że opisana strategia nie umożliwia wygranej anioła.

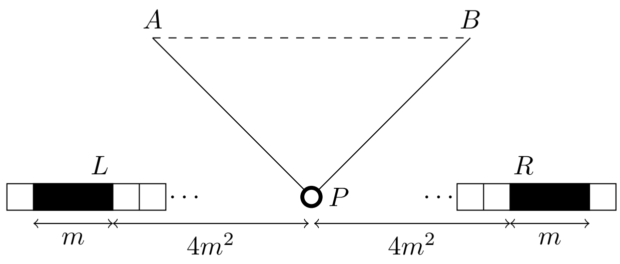
Dodajmy na koniec, że powyższy wzór na wartość parametru H produkuje iście astronomiczne wyniki, chociażby dla rozważanego $m = 1000$. Jednak cóż z tego, skoro anioł z diabłem mają całą wieczność na prowadzenie swojej rozgrywki?

Honorowy diabeł

Aby nieco ułatwić ucieczkę pędzącemu na północ aniołowi, diabeł obiecał mu, że zamiast blokować jakieś pole po każdym jego ruchu, będzie to czynił tylko po co p-tym ruchu. Czy to już umożliwi aniołowi ucieczkę? Bynajmniej. Jeżeli będziemy przyglądać się pozycjom anioła co p skoków, będą one wyglądały dokładnie tak, jakby po planszy skakał anioł o mocy $m \cdot p$. A opisana w poprzedniej sekcji strategia diabła pozwala poradzić sobie z aniołem o dowolnej mocy, w tym także i $m \cdot p$.

Nieco zapobiegliwy pędzący anioł

Ze strachu przed niebezpiecznymi pułapkami diabła, anioł postanowił, poza ruchami stricte na północ, pozostawić sobie możliwość swobodnego poruszania się w poziomie, czyli w linii wschód–zachód. Innymi słowy, obiecał, że w żadnym ruchu nie zmniejszy swojej rzędnej. Czy diabeł znajdzie jakiś sposób na taką strategię anioła?



Rys. 6. Lewa (L) i prawa (R) pozioma pułapka diabła.

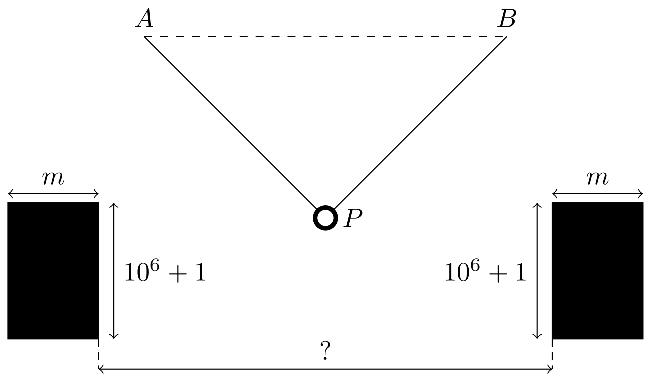
Owszem, znajdzie. Wystarczy, że podzieli swoje ruchy na te o numerach parzystych i nieparzystych. W nieparzystych ruchach jego celem będzie niepozwolenie na to, żeby anioł uciekał w poziomie w nieskończoność. W tym celu będzie w nich przygotowywał pułapki długie na m zablokowanych pól każda, po lewej (L) i po prawej (R) stronie anioła, w odległości $4m^2$ pól od jego pozycji początkowej (rysunek 6). Dlaczego akurat $4m^2$? Otóż diabeł będzie blokował w co drugim nieparzystym ruchu pole po lewej, a w co drugim – po prawej, czyli po $4m$ jego ruchach obie pułapki będą przygotowane. No a w tym czasie anioł może uciec w jednym kierunku w poziomie co najwyżej o $4m^2$ pól.

To oznacza, że anioł może pozostać na tym samym poziomie jedynie przez $8m^2$ ruchów, po czym zostanie zmuszony przez diabła do posunięcia na północ. A jak tylko w jakimś momencie anioł przeskoczy na wyższy poziom, diabeł rozpoczyna od nowa budowanie tam swoich pułapek po lewej i prawej jego stronie.

Jeżeli spojrzymy na ciąg posunięć anioła, które prowadzą choć trochę na północ (czyli nie w poziomie), będziemy mogli je sobie wyobrazić jako ruch pędzącego anioła, tyle że o dużo większej mocy, a dokładniej o mocy $4m^2 + m$. I na takiego anioła diabeł będzie szykował pułapkę gdzieś hen daleko na północy, wykorzystując do tego swoje parzyste ruchy. Zauważmy, że diabłu nie przeszkadza w tym w żaden sposób to, że ma do dyspozycji jedynie co drugi ruch – może się wtedy uznawać za trochę bardziej honorowego...

Bardzo zapobiegliwy pędzący anioł

Dostrzegłszy, że możliwość omijania pułapek diabła w poziomie na nic mu się zdała, anioł postanowił pójść na całość: będzie odtąd wykonywał także ruchy na południe. Żeby jednak pozostawić diabłu jakieś szanse, obiecał mu, że w żadnym momencie nie wycofa się w dół o więcej niż milion pól. Innymi słowy, jeżeli anioł znajduje się w jakimś momencie rozgrywki na polu o współrzędnych (x, y), obiecuje, że od tego momentu nigdy nie znajdzie się już na żadnej pozycji o rzędnej mniejszej niż $y - 1\,000\,000$.

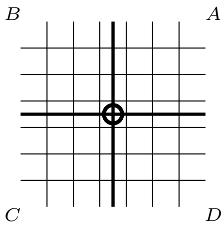


Rys. 7. Remedium na ogromną zapobiegliwość anioła jest pogłębienie pułapek.

Ku zdziwieniu owego anioła, jego nowa strategia nie zrobiła na diable większego wrażenia. Zauważył on mianowicie, że może użyć swojej poprzedniej strategii parzysto-nieparzystej, przy czym musi jedynie poszerzyć tworzone po lewej i po prawej stronie pułapki, tak by sięgały na głębokość miliona plus jeden pól (rysunek 7). Obliczenie odległości pułapek od wyjściowego położenia anioła oraz mocy zwykłego pędzącego anioła, do którego sprowadza się ów bardzo zapobiegliwy pędzący anioł, jeżeli przyjrzeć się jedynie ruchom, które zwiększają jego rzędną do nigdy wcześniej nieosiągniętych wartości, pozostawiamy Czytelnikowi.

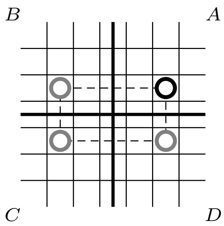
Uciekający anioł

Jak dotychczas rozważaliśmy tylko możliwe strategie anioła, który koniec końców i tak ostatecznie przemieszczał się na północ. Teraz spróbujemy innego podejścia, w którym anioł obiecuje diabłu, że w każdym ruchu zwiększy swoją odległość od środka układu współrzędnych – zauważmy, że nie ma w tym żadnej deklaracji odnośnie do kierunku ruchu. Taka strategia również wydaje się całkiem naturalna – po prostu anioł ucieka w niej „byle dalej", nie bacząc na to gdzie konkretnie. Co na to diabeł? Tym razem będzie on musiał skorzystać z pomocy swoich demonów... Ale po kolei.



Rys. 8. Podział płaszczyzny na ćwiartki.

Podzielmy planszę na cztery ćwiartki, mniej więcej tak jak układ współrzędnych, przy czym jako środek podziału obierzmy początkowe położenie anioła (rysunek 8).



Rys. 9. Odbicia lustrzane anioła znajdującego się faktycznie w ćwiartce A.

W każdej następnej chwili swojej ucieczki anioł będzie znajdował się w jednej z tych ćwiartek, no ewentualnie na skraju dwóch. Ponieważ diabeł nie jest w stanie przewidzieć z góry, która ćwiartka to będzie, może uwzględnić najbardziej pesymistyczny wariant i mieć oko na wszystkie. Do tego celu świetnie nadaje się korzystanie z odbić lustrzanych anioła we wszystkich ćwiartkach (rysunek 9). Można powiedzieć, że diabeł sam sobie utrudnia zadanie – zamiast łapać jednego anioła, będzie blokował czterech. Jak łatwo sprawdzić, przy uwzględnieniu odbić lustrzanych nawet przeskoczenie „prawdziwego" anioła do sąsiedniej ćwiartki może zostać potraktowane jako ruch w ramach tej samej ćwiartki.

„Opiekę" nad każdą z ćwiartek diabeł powierzy jednemu demonowi; w praktyce będzie to wyglądało tak, że w każdej z ćwiartek będzie blokował po jednym polu raz na cztery ruchy. Natomiast w ramach jednej ćwiartki obraz anioła zachowuje się mniej więcej jak klasyczny pędzący anioł. Mniej więcej, bo zbiór osiągalnych przez niego pól w każdym momencie ma kształt wycinka szachownicy podobnego do tego u pędzącego na północ anioła, tylko trochę obróconego. Co prawda nie można powiedzieć, że jest to dokładnie taki sam wycinek (chociażby ze względu na inne ułożenie pól), ale podobieństwo jest na tyle duże, że każdy z demonów będzie mógł zastosować z grubsza tę samą strategię co w przypadku pędzącego anioła – a przypomnijmy, że w takiej sytuacji wykonywanie ruchów co czwarty ruch anioła nie stanowi dla diabła większego utrudnienia.

Bardzo zapobiegliwy uciekający anioł

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku pędzącego anioła, także i tym razem anioł może pozostawić sobie więcej swobody, obiecując diabłu tylko to, że w żadnej sekwencji ruchów nie zbliży się do środka układu współrzędnych o więcej niż milion jednostek (w stosunku do raz osiągniętego położenia). I nie powinno to stanowić dla Czytelnika większego zaskoczenia, że także i w tej sytuacji diabeł bez problemu może zablokować jego ucieczkę, zlecając każdemu ze swoich demonów stosowanie wszystkich sztuczek, jakich nauczył się podczas rozgrywki z bardzo zapobiegliwym pędzącym aniołem.

A więc kto wygra?

Wszystkie powyższe analizy potencjalnych strategii anioła sugerują, że w całej rozgrywce to diabeł jest w dużo korzystniejszej sytuacji. Co więcej, w przeciwieństwie do anioła, diabeł nie może wykonać naprawdę złego ruchu – niezależnie od wszystkich swoich posunięć, w dowolnym momencie gry znajduje się on w lepszej sytuacji niż na samym początku, więc może bez problemu zacząć szkodzić aniołowi „od nowa". Z drugiej strony, anioł o dużej mocy jest bardzo mobilny i pułapki diabła nie zdają się mu realnie zagrażać...

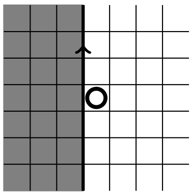
Ostateczna odpowiedź na pytanie o to, który z graczy ma w tej grze strategię wygrywającą, pojawiła się bardzo niedawno – w 2006 roku. Wówczas, mniej więcej równocześnie, opublikowane zostały cztery różne dowody faktu, że...

Jednak to anioł wygrywa!

W swoich pracach Oddvar Kloster i András Máthé udowodnili, że już anioł o mocy 2 ma strategię wygrywającą, Brian Bowditch pokazał to samo dla anioła o mocy 4, natomiast Péter Gács uzasadnia tylko, że anioł o odpowiednio dużej (niesprecyzowanej w pracy) mocy może pokonać diabła. W niniejszym artykule opiszemy strategię podaną w pracy Klostera, natomiast skrócone i pełne opisy wszystkich wspomnianych dowodów można znaleźć na prowadzonej przez niego stronie internetowej `http:/home.broadpark.no/~oddvark/angel`.

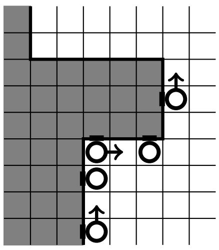
Łamana brzegowa

Przez całą rozgrywkę anioł będzie przemieszczał się wzdłuż tak zwanej *łamanej brzegowej*. Na samym początku gry łamana ta jest prostą pionową skierowaną ku górze, stykającą się z lewej z polem startowym anioła (rysunek 10), natomiast w ciągu rozgrywki jej kształt będzie ulegał zmianom. Pola położone po przeciwnej stronie łamanej w stosunku do anioła będziemy nazywali *unikanymi*; są to pola, na których anioł postanawia nigdy nie wylądować, niezależnie od tego, czy zostały zablokowane przez diabła, czy nie.



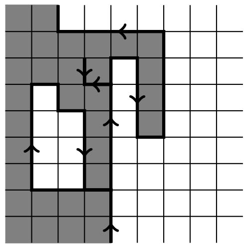
Rys. 10. Początkowa łamana brzegowa; pola unikane zamalowane na szaro.

Odcinek jednostkowy łamanej, z którym styka się w danym momencie anioł z lewej strony, nazwiemy *aktualnym*. Każdy ruch anioła będzie polegał na przesunięciu aktualnego odcinka łamanej o dwie jednostki w przód, a następnie wykonaniu takiego skoku, żeby nowy odcinek sąsiadował z lewej z nowym położeniem anioła. Rysunek 11 ilustruje kilka kolejnych skoków anioła. Łatwo widać, że nowe pole jest zawsze w zasięgu skoku anioła.



Rys. 11. Kilka skoków anioła wzdłuż pewnej łamanej brzegowej. Wyróżnione odcinki łamanej to odcinki aktualne.

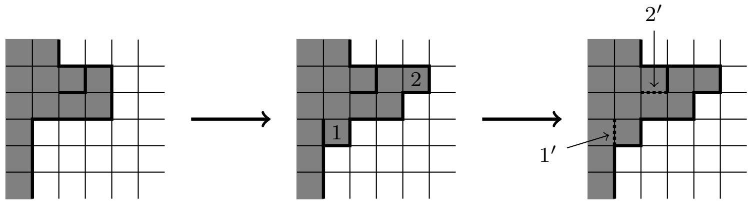
Niezależnie od zmian, jakim będzie poddawana łamana brzegowa, będzie ona dwustronnie nieskończoną krzywą, dzielącą planszę na dwie nieskończone części: zbiór pól unikanych, leżących po lewej stronie krzywej, i pozostałe pola. Każdy odcinek jednostkowy pojawi się na krzywej co najwyżej dwukrotnie; w przypadku dwukrotnego jego wystąpienia oba sąsiadujące z nim pola będą należeć do grupy pól unikanych. Dodatkowo, zbiór pól unikanych będzie zawsze spójny (czyli z każdego pola unikanego będzie można dojść do każdego innego, nie przecinając po drodze żadnego odcinka łamanej), a zbiór pozostałych pól – już niekoniecznie. Ciekawy przykład poprawnej łamanej brzegowej znajduje się na rysunku 12.



Rys. 12. Przykład łamanej brzegowej; pewne odcinki jednostkowe pojawiają się na niej dwukrotnie, z czego niektóre tworzą ślepy zaułek.

Ruch anioła

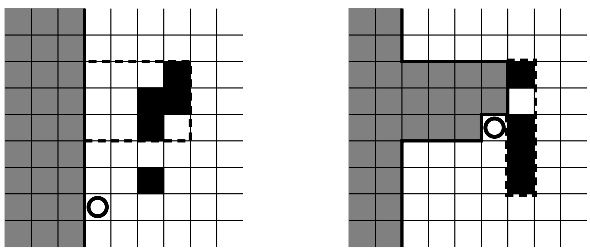
Przyszła wreszcie pora na opis tego, jakim modyfikacjom będzie poddawana łamana brzegowa. Każda z modyfikacji będzie składać się z szeregu *operacji elementarnych*: rozszerzeń i skrótów (rysunek 13). W wyniku rozszerzenia jakiś odcinek jednostkowy łamanej sąsiadujący z prawej z polem niebędącym unikanym zostaje zastąpiony trzema pozostałymi odcinkami sąsiadującymi z tym polem. Z kolei skrót polega na usunięciu dwukrotnego przejścia pod rząd po tym samym odcinku łamanej. Można sprawdzić, że po wykonaniu każdej z tych operacji łamana brzegowa wciąż spełnia wymienione wcześniej warunki.



Rys. 13. Pierwsze przejście ilustruje dwukrotne wykonanie rozszerzenia (1 i 2), drugie natomiast – dwukrotne wykonanie skrótu ($1'$ i $2'$).

Po każdym ruchu diabła anioł dokonuje modyfikacji łamanej za pomocą operacji elementarnych, dbając jednak o to, żeby nie zmienić „historycznej” części łamanej, czyli nieskończonego fragmentu położonego wcześniej niż aktualny odcinek łamanej, wraz z tym odcinkiem. Celem tej modyfikacji jest wprowadzenie do zbioru pól unikanych jak największej liczby pól zablokowanych przez diabła, w taki sposób, aby długość łamanej nie wzrosła o więcej niż dwie jednostki w przeliczeniu na jedno tak przekonwertowane pole. Dokładniej, jeżeli $\Delta\ell$ stanowi wzrost długości łamanej wskutek modyfikacji, a Δn to liczba przekonwertowanych pól, to anioł wybiera nową łamaną tak, by zminimalizować wartość $\Delta\ell - 2 \cdot \Delta n$, a wśród takich łamanych decyduje się na taką, która maksymalizuje wartość Δn [1]. Łamanych spełniających powyższe warunki może być bardzo dużo – w takiej sytuacji anioł zadowala się dowolną z nich. Przykłady takich modyfikacji można znaleźć na rysunku 14. Można pokazać, że w wyniku zastosowania takiej operacji na dowolnej łamanej brzegowej anioła zachodzi $\Delta\ell \geqslant 0$, czyli długość łamanej nie może zmaleć...

[1] Ponieważ łamana jest nieskończona, wzrost długości musimy definiować ostrożnie, biorąc pod uwagę jedynie zbiory odcinków jednostkowych, na których łamane się różnią.



Rys. 14. Przykładowe modyfikacje łamanej brzegowej (dokonywane po ruchu diabła).

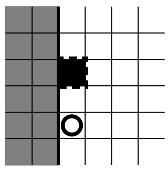
Czy da się to zaimplementować?

Co prawda strategia anioła została dosyć konkretnie zdefiniowana, jednakże wciąż może nas nurtować jedno pytanie: czy anioł może zawsze znaleźć nową łamaną brzegową w skończonym czasie? Zapewne dla samego anioła przejrzenie nieskończenie wielu możliwości nie stanowi większego problemu, lecz dla nas, śmiertelników, gdybyśmy chcieli zasymulować jego strategię, już owszem.

Na szczęście odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Zauważmy mianowicie, że w każdym kroku długość łamanej wzrasta w porównaniu do poprzedniej co najwyżej o $2 \cdot \Delta n$, która to wartość nie przekracza dwukrotności numeru tury, a zatem jest zawsze skończona. Co więcej, zmieniane odcinki łamanej muszą następować po odcinku aktualnym, a nie ma sensu zmieniać żadnych odcinków położonych na północ od najbardziej północnego zablokowanego przez diabła pola. No a liczba łamanych, które można skonstruować przez zastąpienie skończonego fragmentu łamanej innym fragmentem ograniczonej długości, jest skończona – wystarczy więc, że anioł rozważy wszystkie takie opcje.

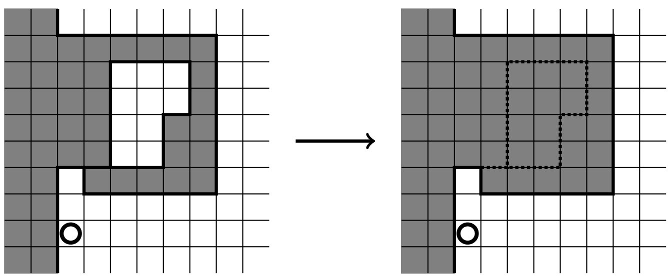
Dlaczego to działa?

Przejdźmy wreszcie do uzasadnienia faktu, że anioł postępujący zgodnie z opisaną strategią wygrywa niezależnie od strategii użytej przez diabła. Opiera się ono na spostrzeżeniu, że tuż przed każdym kolejnym ruchem anioła, dla wszystkich „przyszłych" odcinków łamanej poza ewentualnie odcinkiem następującym bezpośrednio po aktualnym, pole sąsiadujące z danym odcinkiem z prawej nie jest unikane ani też zablokowane przez diabła. Zastosujmy argument przez sprzeczność, tzn. załóżmy, że istnieje jakieś takie pole unikane lub zablokowane. Łatwo pokazać, że pole to nie może być zablokowane, ale nie unikane – gdyby tak było, to zostałoby wcześniej wcielone do pól unikanych za pomocą pojedynczego rozszerzenia łamanej, przy którym jej długość wzrasta co najwyżej o dwie jednostki (rysunek 15).



Rys. 15. Pojedyncze rozszerzenie łamanej powoduje pozbycie się zablokowanego prawego sąsiada.

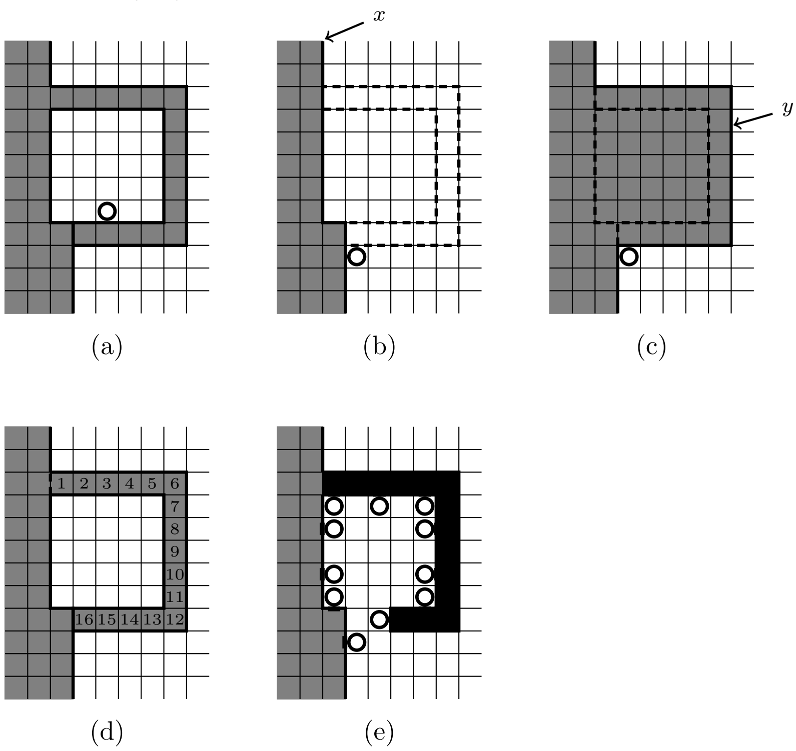
W takim razie załóżmy, że pole stanowiące owego kłopotliwego prawego sąsiada odcinka jest unikane. Na mocy opisanych własności łamanej brzegowej, odcinek ten musi występować na łamanej dwukrotnie, co oznacza, że fragment łamanej między tymi wystąpieniami tworzy cykl. Mamy teraz dwie możliwości – albo cykl ten występuje w całości po odcinku aktualnym łamanej, albo go zawiera. Pierwszy z tych przypadków nie może zajść, gdyż wówczas łamana powstała przez usunięcie tego cyklu byłaby z pewnością krótsza od danej, więc to ją skonstruowałby anioł w danym ruchu (w tym miejscu trzeba zauważyć, że dowolnego cyklu można się pozbyć z łamanej przez ciąg rozszerzeń i skrótów) – patrz rysunek 16.



Rys. 16. Cykl w ramach łamanej położony całkowicie w „przyszłości" nie może wystąpić.

Pozostał nam do rozważenia ostatni przypadek, w którym anioł został zamknięty wewnątrz cyklu. Niestety jest to też przypadek najtrudniejszy. Z tego względu, dowód w tym przypadku przeprowadzimy na przykładzie rysunkowym; pełny dowód można znaleźć na wspomnianej już stronie internetowej.

Załóżmy więc, że anioł został przez diabła zamknięty w cyklu (rysunek 17a). Cofnijmy się do momentu, w którym anioł znajdował się tuż przed wejściem do tego cyklu (łamana x na rysunku 17b). Ile pól zablokowanych (ale nie unikanych) mogło się wówczas znajdować w obszarze ograniczonym rozważanym cyklem (wraz z tym cyklem)? Łatwo zauważyć, że nie więcej niż 4, gdyż w przeciwnym przypadku lepszym kandydatem na łamaną anioła byłaby łamana y z rysunku 17c. Aby przygotować całą swoją pułapkę, diabeł musi jednak zablokować aż 16 pól (rysunek17d). Prosty rachunek pokazuje zatem, że niezależnie od tego, w jakiej kolejności diabeł będzie blokował pola w pułapce, po maksymalnie 10 ruchach anioł zdoła się z niej wymknąć – najgorszy taki przypadek ilustruje rysunek 17e.



Rys. 17. Rysunkowe uzasadnienie faktu, że diabeł nie zdąży zamknąć anioła w pułapce.