Twierdzenie Steinera

i świat, do którego należy

Marek KORDOS, Warszawa

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLV Szkole Matematyki Poglądowej, *Co mi się podoba*, Jachranka, sierpień 2010. Z odczytu usunięto zbyt osobiste wspomnienia autora, gdyż dotyczyły one wielu postronnych osób, z których znaczna część nie mogłaby się dziś już nawet odnieść krytycznie do opowiedzianych przypadków.

Tak się złożyło, że w Polsce o geometrii rzutowej mówiło się (mówi się) w zupełnie innym języku niż w „pozostałej" części świata. Geometria rzutowa używana jest głównie przez geometrów algebraicznych, ale dla nich jest bardziej narzędziem niż obiektem zainteresowania (opinię taką podziela np. Robin Hartshorne, którego można chyba uznać za reprezentatywnego przedstawiciela geometrów algebraicznych – patrz też koniec niniejszego tekstu).

Tak czy owak, terminologia i technologia stosowana np. w fundamentalnych monografiach *Geometria analityczna wielowymiarowa* Karola Borsuka, czy *Podstawy geometrii* Karola Borsuka i Wandy Szmielew, a dotycząca geometrii rzutowej, nie miała wiele wspólnego ze sposobem relacjonowania zachodzących tam zjawisk i prawidłowości, jaki współcześnie stosowano w „reszcie" świata, czego dowiedziałem się od Profesora Borsuka już w latach 60. ubiegłego wieku (pracując nad nową wersją drugiej z wymienionych książek), co zresztą pchnęło mnie w kierunku geometrii rzutowej i czemu zawdzięczam swój doktorat i habilitację.

Przewrót bourbakistowski w Polsce odbył się w połowie tychże lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Wszyscy dostatecznie wiekowi (i oczywiście młodsi ciekawscy) pamiętają spory o istotę matematyki, jakie toczyli (choćby na łamach *Wiadomości matematycznych*) Andrzej Szczepan Białynicki-Birula i Stanisław Balcerzyk z jednej strony, a Karol Sieklucki z drugiej. Oczywiście, wygrali bourbakiści, co zaowocowało tak radykalną zmianą uczelnianych programów nauczania, że dziś trzeba teksty z tamtych lat tłumaczyć – jak z obcego języka – najzdolniejszym nawet doktorantom. Np. do artykułu Andrzeja Schinzla w *Delcie* 5/2010, który używał terminologii wziętej z pierwszej z wymienionych książek, musiałem (nawet dla redaktorów) dopisać obszerny słowniczek (proszę obejrzeć).

Polecam *Bourbaki a sprawa polska*, *M-S-N* 32(I 2004), str. 1–4

Bliższe badania (powrócę do tej sprawy pod koniec artykułu) wykazały, że znajomość dyscypliny, z której wywodzą się supernowoczesne techniki geometryczne, jest również dziś (nawet u wybitnych specjalistów) znikoma.

Pozwalam więc sobie na odwagę, by przypomnieć, skąd te rzeczy się wzięły, i zwrócić uwagę na piękno i efektywność ich źródeł.

A zatem – jeśli kogoś to nie urazi – proszę poczytać, co to takiego ta geometria rzutowa (ograniczę się do płaszczyzny), i jakie nazwy są w niej używane.

Płaszczyzna rzutowa to struktura postaci $\langle U_1, U_2; |\rangle$, intuicyjnie: punkty, proste, incydencja.

Jak widać, jest to struktura dwusortowa, co oznacza, że zmienne przebiegają dwa zbiory. Punkty i proste są równouprawnione i nie łączą ich więzy mnogościowe – punkty to jakby koraliki, a proste jakby sznureczki. Relacja incydencji to fakt, że jakiś koralik jest nawleczony na jakiś sznureczek. Ale mogą istnieć koraliki na nic nienawleczone i sznureczki, na które nic nawleczone nie zostało.

Specyfiką tej struktury dwusortowej jest dualność syntaktyczna: dla dowolnej formuły Φ mamy

$$\Phi(a_1, \ldots, a_k, A_1, \ldots, A_m) \Leftrightarrow \Phi(B_1, \ldots, B_k, b_1 \ldots, b_m),$$

Jest tak, ponieważ aksjomaty mają tę własność:

$\forall abAB \quad ab|AB \Leftrightarrow a = b \vee A = B$

$\forall ab\, \exists C \quad ab|C$

$\forall AB\, \exists c \quad AB|c$

istnieje czworokąt (co też można zapisać samodualnie).

Ma też miejsce dualność semantyczna:

$\langle Z_1,\, Z_2;\, R\rangle$ *jest modelem geometrii rzutowej wtedy i tylko wtedy, gdy* $\langle Z_2,\, Z_1;\, R\rangle$ *jest jej modelem.*

Przykład: model analityczny nad ciałem $\mathfrak{F}= \langle F,\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot\rangle$ to

$$\langle (F^3 - \{(0,0,0)\})/_\sim,\ (F^3 - \{(0,0,0)\})/_\sim;\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.\rangle$$

(istnieje, gdy dodatkowo spełniony jest *aksjomat Desarguesa*,
aby ciało było przemienne, potrzeba *aksjomatu Pappusa–Pascala*,
czym, ze względu na słownikowy charakter tekstu, zajmować się nie będziemy.

Pierwsza ostra kolizja terminologiczna ma miejsce przy sprawie automorfizmów.

Są to **kolineacje** (*collineations*) $\varphi : (\langle U_1,\, U_2;\, |\rangle) \longrightarrow \langle U_1,\, U_2;\, |\rangle$.
Ze względu na dwusortowy charakter struktury stanowią je pary bijekcji:
$\varphi = (\varphi_1,\, \varphi_2)$, gdzie $\varphi_1(U_1) \longrightarrow U_1$ i $\varphi_2(U_2) \longrightarrow U_2$,
przy czym $a|A \Leftrightarrow \varphi_1(a)|\varphi_2(A)$.

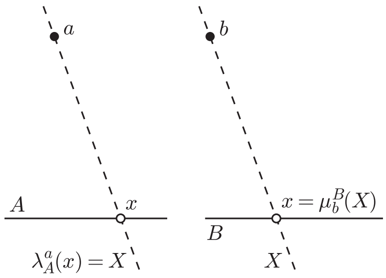
Rozważa się też „bliźniacze" **korelacje** (*correlations*) realizujące dualność
$\psi : (\langle U_1,\, U_2;\, |\rangle) \longrightarrow \langle U_2,\, U_1;\, |\rangle$ również będące parami bijekcji:
$\psi = (\psi_1,\, \psi_2)$, gdzie $\psi_1(U_1) \longrightarrow U_2$ i $\psi_2(U_2) \longrightarrow U_1$,
przy czym $a|A \Leftrightarrow \psi_1(a)|\psi_2(A)$.

Najważniejszym pojęciem jest **PRZEKSZTAŁCENIE RZUTOWE** (*projectivity*), który to termin nie ma absolutnie nic wspólnego z nadanym mu w wymienionych książkach znaczeniem.

Jest to mianowicie złożenie skończonej liczby rzutów. **Rzut** (*projection*) z kolei to przekształcenie **łańcucha** (*range*) – zbioru punktów incydujących z prostą [względnie **pęku** (*pencil*) – zbioru prostych incydujących z punktem] na pęk [łańcuch]:

$$\lambda^a_A(x) = X \Leftrightarrow x|X \qquad [\mu^B_b(X) = x \Leftrightarrow X|x],$$

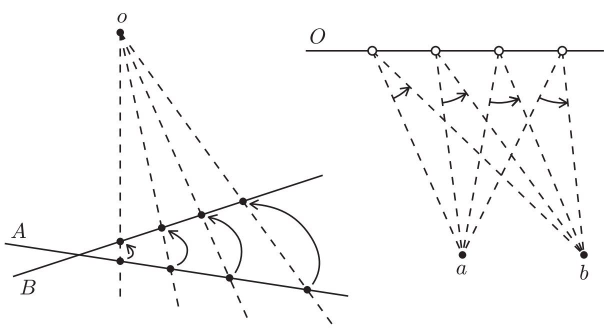
co ilustruje rysunek 1.



Rys. 1

Łańcuch prostej P oznaczamy P^*, pęk punktu p oznaczamy p^*.

Wśród przekształceń rzutowych wyróżnia się **przekształcenia perspektywiczne** (*perspectivities*) – złożenia dwóch rzutów. Wyróżnienie to ma głębszy sens: jak łatwo zauważyć, przekształcenie rzutowe łańcucha na łańcuch (czy pęku na pęk) jest złożeniem przekształceń perspektywicznych. Przykłady przekształceń perspektywicznych przedstawia rysunek 2.

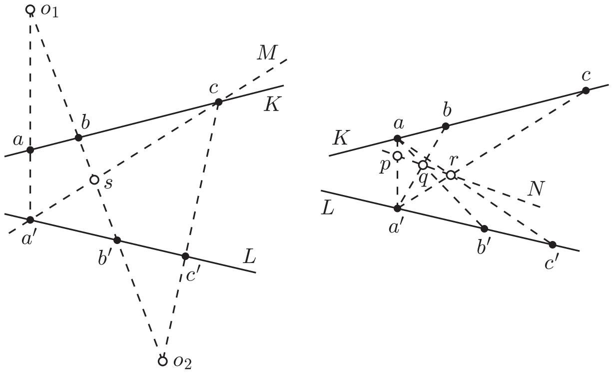


Rys. 2. Przekształcenie perspektywiczne łańcucha A^* na łańcuch B^* będące złożeniem rzutów na pęk o^* i z pęku o^*; w tej sytuacji punkt o to *środek* tego przekształcenia. Obok przekształcenie pęku a^* na pęk b^* o *osi* O.

Znaczenie przekształceń rzutowych podkreśla nazwa **Podstawowe Twierdzenie Geometrii Rzutowej, FTPG** (*the Fundamental Theorem of Projective Geometry*), które orzeka, że

przekształcenie rzutowe jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości w trzech punktach/prostych.

Nietrywialność tego twierdzenia ilustruje rysunek 3. Pokazane na nim są dwa sposoby realizacji przekształcenia rzutowego K^* na L^*, w którym te same punkty a, b, c są przekształcane na też te same punkty a', b', c'. Z lewej jest to złożenie przekształcenia perspektywicznego K^* na M^* o środku o_1 (punkty a, b, c przechodzą na a', s, c) i przekształcenia perspektywicznego M^* na L^* o środku o_2 (punkty a', s, c przechodzą na a', b', c'). Z prawej jest to złożenie przekształcenia perspektywicznego K^* na N^* o środku a' (punkty a, b, c przechodzą na p, q, r) i przekształcenia perspektywicznego N^* na L^* o środku a (punkty p, q, r przechodzą na a', b', c'). Twierdzenie orzeka, że oba te złożenia dadzą te same rezultaty dla każdego z punktów łańcucha K^*.



Rys. 3

Od razu też widać (rysunki 2 i 3 pomagają) wiele bezpośrednich konsekwencji tego twierdzenia, na przykład:
– każde przekształcenie rzutowe łańcucha na różny od niego łańcuch (pęku na różny od niego pęk) jest przekształceniem perspektywicznym lub złożeniem dwóch takich przekształceń;
– dowolna parzysta liczba rzutów może być zastąpiona sześcioma (czemu nie czterema?), a nieparzysta pięcioma rzutami.

Specjalne znaczenie (o czym dalej) ma

Spostrzeżenie 1. Przekształcenie rzutowe łańcucha na różny od niego łańcuch (pęku na różny od niego pęk) jest przekształceniem perspektywicznym wtedy i tylko wtedy, gdy ma element stały (punkt/prostą).

Przekształcenia rzutowe odgrywają też istotną rolę dla kolineacji i korelacji. Wprowadza się mianowicie pojęcia **kolineacji rzutowych** i **korelacji rzutowych**. Są to takie kolineacje czy korelacje, których obcięcie do każdego łańcucha i każdego pęku jest przekształceniem rzutowym. Bardzo ważny jest (udowodniony przez Bachmanna) fakt, iż

wystarczy, by jedno takie obcięcie było rzutowe.

Kolineacje i korelacje rzutowe w modelach analitycznych są przekształceniami liniowymi (bez warunku rzutowości takie być nie muszą), ale to nas tutaj nie będzie zajmowało.

Szczególną rolę wśród korelacji odgrywają **korelacje biegunowe** (*polarities*), czyli korelacje rzutowe będące inwolucjami, a to ze względu na

Twierdzenie von Staudta: *punkty i proste samosprzężone w korelacji biegunowej to punkty i styczne (pewnej) stożkowej*,

co oznacza, iż dla każdej korelacji biegunowej ψ istnieje taka stożkowa, że jej wszystkie punkty to te, które spełniają warunek $a|\psi_1(a)$, a wszystkie styczne to te, które spełniają warunek $A|\psi_2(A)$ (oczywiście, oba te zbiory mogą być puste); dla każdej niepustej stożkowej istnieje wyznaczająca ją korelacja biegunowa.

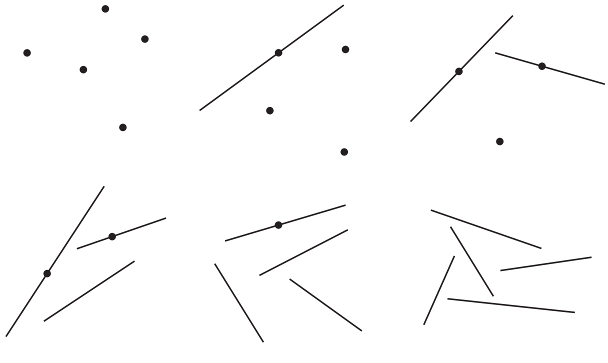
Przekształcenia rzutowe związane są ze stożkowymi także w bardziej bezpośredni sposób. Orzeka o tym komplementarne do poczynionego wyżej Spostrzeżenia 1

Twierdzenie Steinera. *Punkty przecięcia prostych pęku z ich obrazami w przekształceniu tego pęku na inny pęk są wszystkimi punktami pewnej stożkowej wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie to jest rzutowe i nieperspektywiczne.*

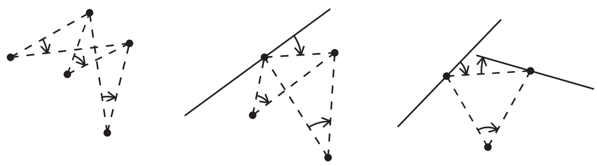
Zatem przekształcając rzutowo pęk na inny pęk, jako zbiór przecięć prostych z ich obrazami możemy otrzymać tylko albo łańcuch jakiejś prostej, albo stożkową.

Moc tego twierdzenia zilustrujemy dwoma jego efektownymi konsekwencjami. Efektowne będą też ich niesłychanie proste dowody.

Twierdzenie Braikenridge'a–Maclaurina. *Stożkowa jest wyznaczona przez pięć swoich elementów, jak na obrazku.*

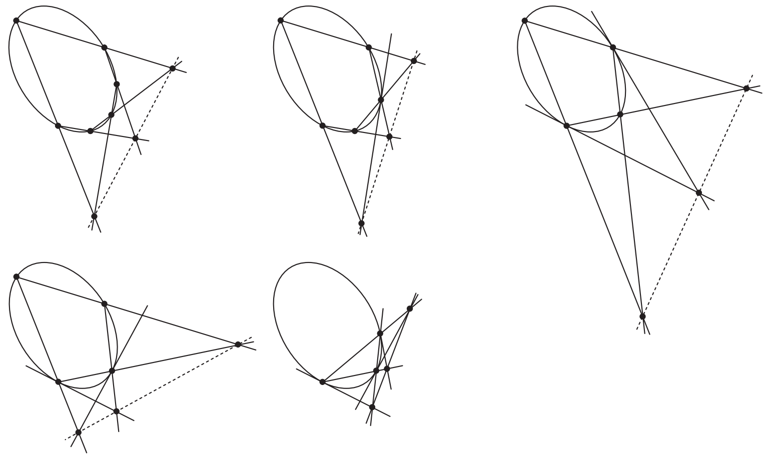


Dowód jest na poniższym rysunku:



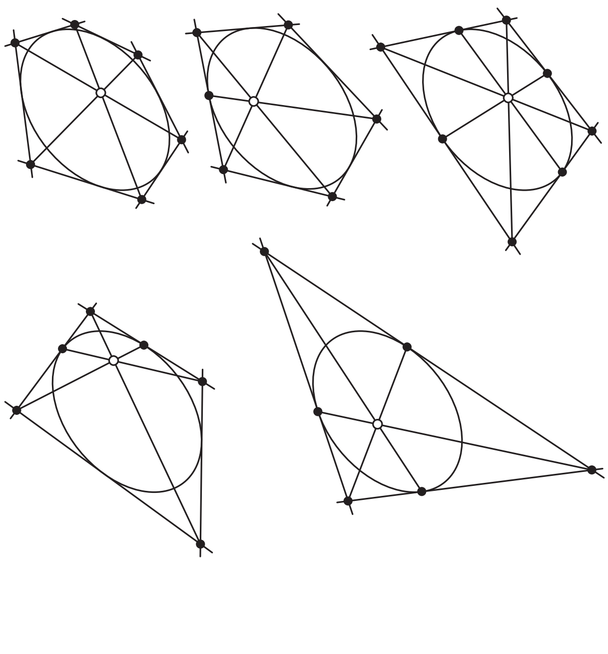
– obieramy dwa punkty i w ich pękach wskazujemy trzy pary prostych wyznaczających zgodnie z twierdzeniem Steinera stożkową (jest ono nieperspektywiczne, ponieważ punkty przecięcia prostych z ich obrazami są niewspółliniowe. Dowód w pierwszych trzech przypadkach wystarcza, albowiem przypadek czwarty jest dualny do trzeciego, piąty do drugiego i szósty do pierwszego.

Twierdzenie Pascala–Brianchona. *W uogólnionym sześciokącie wpisanym w stożkową przeciwległe boki przecinają się na jednej prostej,*



czyli (dualnie)

w uogólnionym sześcioboku opisanym na stożkowej proste łączące przeciwległe wierzchołki przecinają się w jednym punkcie.

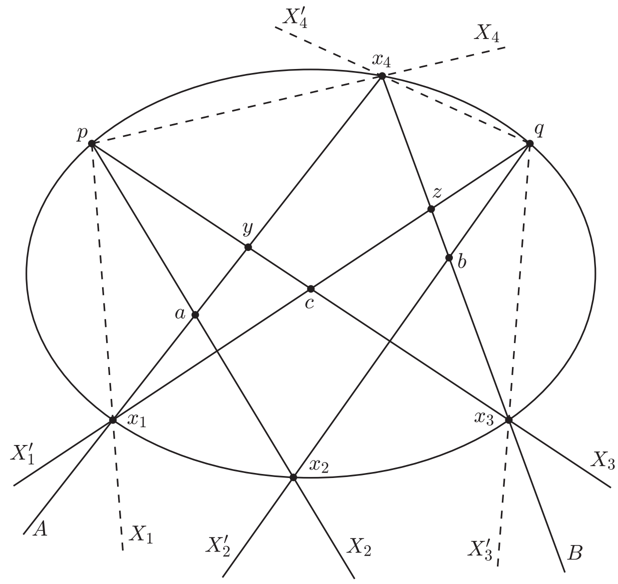


Uogólniony sześciokąt wpisany w stożkową powstaje ze „zwyczajnego” sześciokąta w ten sposób, że dwa jego sąsiednie wierzchołki ściskamy mocno, aż się spotkają – w ten sposób otrzymujemy pięciokąt ze styczną w jednym z wierzchołków jako szóstym bokiem. Dalsze ściskania prowadzą do czworokąta z dwiema stycznymi (co może wyglądać na dwa sposoby) i wreszcie trójkąt z trzema stycznymi.

Podany opis byłby głupawy, gdyby nie fakt, że pochodzi od Victora Ponceleta, twórcy geometrii rzutowej.

Analogicznie, aby uzyskać *uogólniony sześciobok*, ściskamy proste zawierające dwa sąsiednie boki sześciokąta, aż staną się jedną prostą. Ich punkt wspólny staje się w tej sytuacji punktem styczności „podwójnej” prostej ze stożkową. W ten sposób otrzymujemy pięciobok z jednym punktem styczności jako szóstym wierzchołkiem i, kolejno, dwa czworokąty z dwoma punktami styczności oraz trójkąt z trzema punktami styczności.

Dowód tym razem przedstawię tylko w pierwszym przypadku.



Po to, by rysunek nie był zbyt wielki, narysowałem go tak, aby przecięcia przeciwległych boków leżały wewnątrz stożkowej – na dowód nie ma to żadnego wpływu.

Oznaczmy, jak na rysunku, kolejne wierzchołki sześciokąta: $px_2qx_1x_4x_3$. Przeciwległe boki tego sześciokąta przecinają się w punktach a (bok I i IV), b (II i V) i c (III i VI). Dorysujmy dodatkowe dwa punkty i cztery proste oraz ponazywajmy to wszystko, co się jeszcze nie nazywa, tak, jak na rysunku.

Skonstruujemy pewne przekształcenie rzutowe A^* na B^*.

Najpierw wykonujemy rzut A^* na p^* – punkty

$$x_1 \quad a \quad y \quad x_4$$

przechodzą na proste

$$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4.$$

Następnie stosujemy przekształcenie rzutowe p^* na q^*, definiujące, zgodnie z twierdzeniem Steinera, naszą stożkową – otrzymujemy w wyniku proste

$$X_1' \quad X_2' \quad X_3' \quad X_4'.$$

I na koniec rzutujemy q^* na B^*, co daje punkty

$$z \quad b \quad x_3 \quad x_4.$$

Jak widać, otrzymane przekształcenie ma punkt stały (x_4), jest więc perspektywiczne. Wobec tego proste łączące punkty z ich obrazami wszystkie przechodzą przez środek tego przekształcenia. Jak widać, zarówno x_1z, jak yx_3 przechodzą przez c. Zatem i ab przez c przechodzić musi.

Tyle o formalizmie syntetycznej geometrii rzutowej. A teraz o źródle jej warsztatu analitycznego. Pochodzi on z *Der baryzentrische Calcül* Ferdinanda Möbiusa.

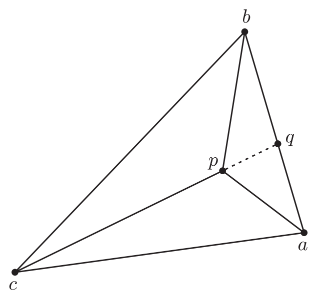
Współrzędne barycentryczne (*barycentric coordinates*) przyporządkowują każdemu punktowi p takie ciężary (lub wypory), jakie należy umieścić w punktach odniesienia (w przypadku płaszczyzny są to wierzchołki ustalonego trójkąta), by w p znalazł się środek ciężkości.

Będziemy dalej przez m_x oznaczać ciężar (lub wypór, czyli ujemny ciężar) umieszczony w punkcie x.

Δ_{xyz} będzie oznaczać pole trójkąta xyz – nieco niżej rozszerzymy znaczenie tego symbolu.

Tego fizycznego charakteru definicji można się jednak łatwo pozbyć, zamieniając ciężary na pola (przy wykorzystaniu znanych praw dźwigni – równości iloczynów ramienia i siły), mamy bowiem

Spostrzeżenie 2. $m_a : m_b : m_c = \Delta_{bcp} : \Delta_{cap} : \Delta_{abp}$



Oto dowód.

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{qb}{aq} = \frac{\Delta_{bcq}}{\Delta_{aqc}} = \frac{\Delta_{bpq}}{\Delta_{aqp}} = \frac{\Delta_{bcp}}{\Delta_{apc}} = \frac{\Delta_{bcp}}{\Delta_{cap}}.$$

Pierwsza równość to prawo dźwigni, następne dwie to fakt, że dwa trójkąty o równych wysokościach mają pola proporcjonalne do podstaw, wreszcie przedostatnia to fakt, że różnice wielkości proporcjonalnych są proporcjonalne do nich.

Dowód jest jednak „mądrzejszy”, niż na to wygląda. Mianowicie, dotyczy również sytuacji, gdy punkt p nie leży we wnętrzu trójkąta.

Aby przekonać się, że tak jest, należy zamiast pola użyć w nim *pola zorientowanego*, czyli ustalić orientację płaszczyzny i jako pole zorientowane trójkąta brać liczbę odpowiadającą jego geometrycznemu polu wtedy, gdy wypisana kolejność wierzchołków trójkąta jest zgodna z tą orientacją, a liczbę przeciwną w przeciwnym przypadku.

Teraz więc Δ_{xyz} oznaczać będzie pole zorientowane. Stąd np.

$$\Delta_{xyz} \cdot \Delta_{zyx} < 0.$$

W przedstawionym dowodzie Spostrzeżenia 2 oznaczenia są uporządkowane w ten sposób, że jest on poprawny bez zmian również dla pól zorientowanych i punktów p poza wnętrzem trójkąta abc, czego sprawdzenie może być pouczającym i miłym zajęciem dla Czytelnika.

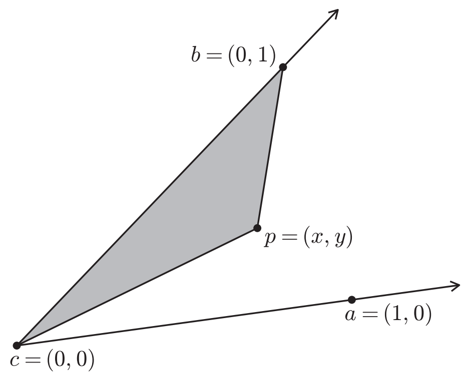
Łatwo zauważyć, że punkty, których suma współrzędnych barycentrycznych jest równa zeru, nie znajdują się na „zwykłej" płaszczyźnie – już choćby dla punktów (1, 0, 0) i (−1, 0, 0) nie można znaleźć środka ciężkości w sensie fizyki (mnie ponad pół wieku temu w szkole kazano mówić o takiej sytuacji: *para sił*).

Współrzędne barycentryczne mają oczywiste korzystne własności algebraiczne – są jednorodne (istotnie, środek ciężkości wypadnie w tym samym miejscu, zarówno, gdy ciężary (m_a, m_b, m_c) będziemy odliczali w gramach, jak i w tonach). Wszystkie zależności geometryczne będą więc za ich pomocą opisywane przez funkcje jednorodne.

Czasami jednak „na chwilę" warto się jednorodności pozbyć. Gdy ograniczyć się do punktów, których suma współrzędnych jest różna od zera, można wprowadzić **współrzędne arealne/polowe** (*areal coordinates*) – te spośród współrzędnych barycentrycznych, których suma jest równa 1:

$$\bar{m}_a + \bar{m}_b + \bar{m}_c = 1.$$

Wówczas – wobec Spostrzeżenia 2 – mamy $\Delta_{bcp} = \bar{m}_a \cdot \Delta_{abc}$.



We współrzędnych afinicznych mamy więc

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{m}_a \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{m}_a$$

i, analogicznie, $y = \bar{m}_b$.

Zatem dla $\bar{p} = (p_a, p_b, p_c)$, $\bar{q} = (q_a, q_b, q_c)$, $\bar{r} = (r_a, r_b, r_c)$ mamy

$$\Delta_{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_a - p_a & q_b - p_b \\ r_a - p_a & r_b - p_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_a & p_b & 1 \\ q_a & q_b & 1 \\ r_a & r_b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ r_a & r_b & r_c \end{vmatrix}.$$

Wobec tego punkty $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ r_a & r_b & r_c \end{vmatrix} = 0,$$

co już nie zależy od tego, czy posługujemy się współrzędnymi arealnymi, czy nie (bo jest to wyrażenie jednorodne).

Podobnie powstałe z tej równości równanie prostej $\bar{p}\bar{q}$:

$$\begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ x_a & x_b & x_c \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$x_a \cdot \begin{vmatrix} p_b & p_c \\ q_b & q_c \end{vmatrix} - x_b \cdot \begin{vmatrix} p_a & p_c \\ q_a & q_c \end{vmatrix} + x_c \cdot \begin{vmatrix} p_a & p_b \\ q_a & q_b \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to nie zmieni się także, gdy dopuścimy również punkty o zerującej się sumie współrzędnych.

Zatem w zdefiniowanym poprzednio modelu analitycznym $\langle (F^3 - \{(0,0,0)\})/_\sim, (F^3 - \{(0,0,0)\})/_\sim; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \rangle$ wyrażenie $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ (symbol $\times$ oznacza iloczyn wektorowy) to dla punktów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ incydująca z nimi prosta, a dla prostych $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ incydujący z nimi punkt.

Tak więc np. dla punktów $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ napis $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ oznacza wspólny punkt prostych $\mathbf{xy}$ i $\mathbf{uv}$.

Ale można pójść dalej

Nieodróżnialność analitycznej postaci punktów i prostych pozwala postawić pytanie, co oznacza napis $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, gdy wynik działania np. dla prostych zechcemy interpretować jako prostą.

Okazuje się, że można go traktować jak wspólną prostopadłą do prostych $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, co daje metryzację płaszczyzny rzutowej, a że – wobec twierdzenia Georga Hamela z 1903 roku – jedyną taką metryzacją jest **płaszczyzna eliptyczna**, więc opisany formalizm właśnie ją opisuje,

tyle, że TO JUŻ INNA HISTORIA.

Na zakończenie chciałbym przedstawić kilka książek i jedną anegdotę.

• Federigo Enriques, *Lezioni di Geometria projettiva*, 1904, wydanie polskie 1917

Od tej książki zaczęło się opisane tutaj rozumienie syntetycznej geometrii rzutowej.

• Oscar Veblen & John W. Young, *Projective geometry*, 1910/1918

Ta książka nadała geometrii rzutowej przedstawiony tutaj zaledwie śladowo, powszechnie dziś używany formalizm geometrii rzutowej; wielokrotnie przez pół wieku była wznawiana.

• Herbert Busemann & Paul J. Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, 1953

Wzorcowa książka dla tych, którzy chcą wiedzieć, a nie chcą brnąć w charakterystyczne dla podstaw matematyki szczegóły; tu po raz pierwszy konsekwentnie używana jest symbolika iloczynu wektorowego.

• Günter Pickert, *Projective Ebenen*, 1955

A to przeciwnie, książka dla tych, którzy lubią dłubaninę i rozważanie różnych zdegenerowanych modeli (a poza tym Autor to recenzent mojej pracy habilitacyjnej – jeśli można dołączyć akcent osobisty).

• Harold S.M. Coxeter, *Projective geometry*, 1964

Najlepsza książka do czytania na ten temat.

• Robin Hartshorn, *Foundations of Projective Geometry*, 1967

Stustronicowe notatki z jednosemestralnego wykładu, którego przyczynę Autor uzasadnia stwierdzeniem, że przekonał się, iż jego koledzy, geometrzy algebraiczni, używają geometrii rzutowej, ale znają ją tylko z analitycznie utylitarnej strony – chciał więc im zaproponować również inny punkt widzenia.

No i anegdota. Lat temu dwadzieścia parę wybitny i znany dziś na świecie polski geometra algebraiczny, wówczas świeżo po doktoracie, przysłał mi swoją pracę dotyczącą geometrii rzutowej z pytaniem, czy zawarte tam wyniki są publikowalne. Wybrał akurat mnie, bo był jeszcze wcześniej laureatem Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki (jego praca uczniowska też dotyczyła geometrii algebraicznej, choć wtedy nie wiedział o istnieniu takiej dyscypliny).

Przysłaną mi pracę przeczytałem z zachwytem, bo było tam mnóstwo wspaniałych twierdzeń – w szczególności te, które tu prezentowałem. Twierdzenia były oczywiście publikowalne, a nawet zostały stulecie wcześniej opublikowane, przynosząc wiele chwały swoim twórcom. To, że mój korespondent je udowodnił, dowodziło nie tylko jego talentu, ale też i tego, że *dulce et decorum est* się nimi zajmować.

A tym, którzy chcieliby poznać zdanie przeciwne, polecam dzieło Nicolas Bourbaki, *Elementy historii matematyki*.