Zbudujmy z klocków prostopadłościan

Michał KIEZA, Warszawa

Wprowadzenie

Zazwyczaj za wielomino (ang. *polymino*) uważa się kilka (albo i więcej) jednakowych kwadratów tworzących jeden kawałek, przy czym każde dwa z nich można połączyć ruchem wieży szachowej. Inaczej mówiąc każdy kwadrat styka się bokiem z co najmniej jednym innym oraz takiego kawałka nie można przedstawić w postaci kilku mniejszych wielomin, które stykały by się jedynie wierzchołkami. Wielomino jest bardzo ciekawym obiektem prowadzącym do wielu interesujących pytań, przykładowo – jakie prostokąty można zbudować za pomocą danych wielomin? Matematyka, którą tu napotykamy jest bardzo kolorowa, bowiem zazwyczaj, aby stwierdzić, że jakieś pokrycie jest niemożliwe, wystarczy odpowiednie pokolorowanie.

My jednak zostawimy płaszczyznę i wybierzemy się w trzeci wymiar. Wielominem w przestrzeni (ang. *polycube*, my będziemy po prostu mówić wielomino) będziemy nazywać bryłę złożoną z pewnej liczby jednakowych sześcianów, przy czym każdy z nich styka się ścianą z pewnym innym oraz danej bryły nie można rozłożyć na mniejsze wielomina stykające się jednynie wierzchołkami lub krawędziami. Powstaje naturalne pytanie:

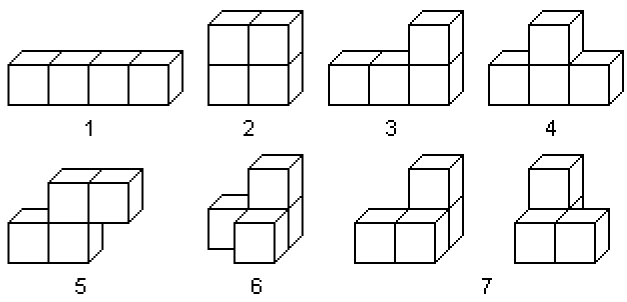
Jakie prostopadłościany możemy zbudować za pomocą wielomin danego typu?

Zapewne niemal każdy z młodszych Czytelników miał okazję w dzieciństwie bawić się klockami Lego.

Tutaj nie tylko spotkamy się z kolorowymi dowodami, ale także będziemy mogli czerpać radość z zabawy w układanie klocków.

W tym artykule skupimy się na tetraminach – czyli „spójnych" bryłach złożonych z czterech sześcianów (czasem mówi się też tetromino). Ponadto będziemy zakładali, że dane bryły można odbijać symetrycznie. Istnieje wówczas 7 typów różnych przestrzennych tetramin:

1. tetramino proste (zwane też I-tetraminem),
2. tetramino kwadratowe (zwane też O-tetraminem),
3. L-tetramino,
4. T-tetramino,
5. tetramino skośne (zwane też N-tetraminem),
6. tetramino rozgałęzione (ang. branch tetramino),
7. tetramino śrubowe (ang. screw tetramino).

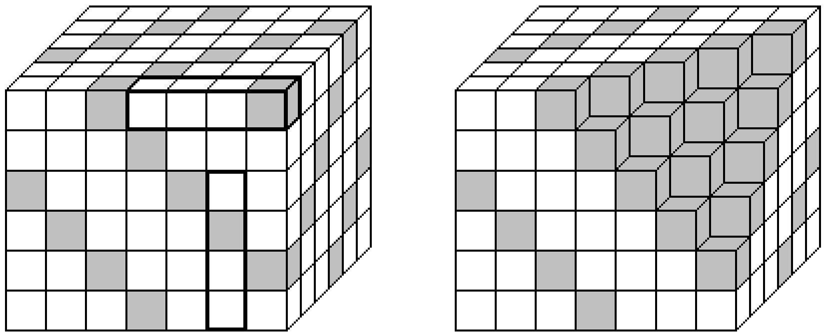


Rys. 1

Gdybyśmy opuścili założenie o odbijaniu, to ostatnie tetramino rozmnożyło by się nam na dwa. Zastanówmy się, jakie warunki musi spełniać prostopadłościan, aby dało go się zbudować z pewnej liczby jednakowych kopii brył każdego z powyższych rodzajów.

Tetramino proste

Jest to jeden z najłatwiejszych przypadków (jak zresztą sama nazwa wskazuje). Oczywiście każdy prostopadłościan, którego pewna krawędź ma długość podzielną przez 4 daje się zbudować z tetramin prostych. Udowodnimy, że jest to także warunek konieczny.



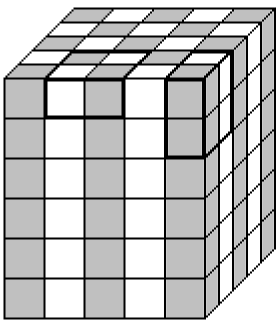
Rys. 2

Pokolorujmy na szaro co czwarty sześcian, jak pokazano na rysunku 2. Inaczej mówiąc umieszczamy prostopadłościan w układzie współrzędnych tak, aby środek każdego sześcianu jednostkowego był punktem kratowym i kolorujemy te sześciany, dla których suma wszystkich współrzędnych ich środka daje ustaloną resztę modulo 4 (załóżmy, że taką, jak dowolnie wybrany sześcian narożny). Zauważmy, że każde tetramino pokrywa dokładnie jeden pokolorowany sześcianik jednostkowy. Aby więc wypełnienie danego prostopadłościanu było możliwe, liczba pokolorowanych na szaro sześcianików musi stanowić $\frac{1}{4}$ wszystkich sześcianików tworzących dany prostopadłościan. Nietrudno spostrzec, że jeśli któraś z krawędzi danego prostopadłościanu ma długość podzielną przez 4, to ten warunek jest spełniony. W przeciwnym wypadku zaś dzieląc każdą z krawędzi z resztą przez 4 potniemy nasz prostopadłościan na kilka mniejszych, z których jeden będzie miał krawędzie długości mniejszych od 4, a pozastałe przynajmniej jedną z krawędzi o długości podzielnej przez 4. Wystarczy jeszcze zauważyć, że w każdym prostopadłościanie o krawędziach długości mniejszych niż 4 liczba pokolorowanych sześcianów jest większa niż $\frac{1}{4}$ liczby wszystkich sześcianików jednostkowych.

Udowodniliśmy zatem następujące

Twierdzenie 1. *Prostopadłościan można zbudować z tetramin prostych wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z jego krawędzi ma długość podzielną przez* 4.

Tetramino kwadratowe



Rys. 3

Ten przypadek jest równie łatwy jak poprzedni. Jest jasne, że z tego typu tetramin da się zbudować każdy prostopadłoscian, który ma co najmniej dwie krawędzie parzyste. Cała trudność polega na udowodnieniu implikacji odwrotnej.

Przypuśćmy, że udało nam się zbudować z tetramin kwadratowych pewien prostopadłościan, którego pewne dwie krawędzie mają długości nieparzyste. Pokolorujmy ścianę wyznaczoną przez te dwie krawędzie w szaro–białą szachownicę, zaś cały prostopadłościan w słupy, jak pokazuje rysunek 3. Wówczas liczby białych sześcianów jednostkowych i szarych są różne. Jednakże każde tetramino składa się z dwóch sześcianów białych i dwóch szarych, co stoi w sprzeczności z poprzednią obserwacją.

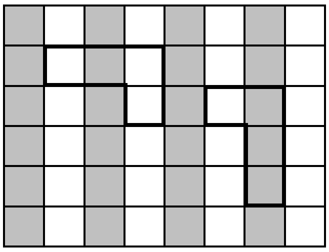
Udowodniliśmy zatem następujące

Twierdzenie 2. *Prostopadłościan można zbudować z tetramin kwadratowych wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej dwie z jego krawędzi mają długość parzystą.*

L-tetramino

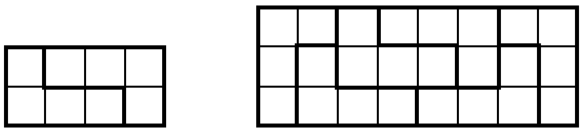
Ten przypadek jest nieco trudnieszy do poprzednich. Dzieje się tak z dwóch powodów: po pierwsze – odpowiedź dla prostopadłościanów, których jedna krawędź ma długość 1, jest inna niż dla pozostałych; po drugie – tym razem wreszcie będziemy mieli okazję trochę pobawić się w układanie klocków.

Ale po kolei. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, gdy jedna z krawędzi danego prostopadłościanu ma długość równą 1 (jest jasne, że może być co najwyżej jedna taka krawędź). Odnotujmy najpierw, że iloczyn długości krawędzi danego prostopadłościanu jest podzielny przez 4 (bowiem każde tetramino jest zbudowane z czterech sześcianów). Oznacza to, że co najmniej jedna z krawędzi ma długość parzystą. Pokolorujmy dany prostopadłościan w szaro–białe paski o szerokości 1 prostopadle do krawędzi parzystej, jak pokazuje rysunek 4. Wówczas liczba sześcianów białych jest równa liczbie sześcianów szarych. Z drugiej strony każde L-tetramino składa się z jednego sześcianu białego i trzech szarych, bądź odwrotnie. To wraz z poprzednią obserwacją oznacza, że dany prostopadłościan składa się z parzystej liczby L-tetramin, skąd wniosek, że iloczyn długości jego krawędzi jest liczbą podzielną przez 8.



Rys. 4

Załóżmy teraz, że mamy dany prostopadłościan, którego jedna krawędź jest równa 1, zaś pozostałe dwie są większe od 1, a ich iloczyn podzielny przez 8. Rysunek 5 przedstawia sposób zbudowania prostopadłościanów $4 \times 2 \times 1$ oraz $8 \times 3 \times 1$. Jeśli pewne dwie krawędzie danego prostopadłościanu są parzyste, to można go zbudować z prostopadłościanów $4 \times 2 \times 1$. Przyjmijmy teraz, że mamy dany prostopadłościan $m \times n \times 1$, przy czym liczba m jest podzielna przez 8, zaś liczba n jest nieparzysta i nie mniejsza niż 3. Wówczas dzielimy dany prostopadłościan na dwa prostopadłościany $m \times (n-3) \times 1$ i $m \times 3 \times 1$. Pierwszy z nich można zbudować z prostopadłościanów $4 \times 2 \times 1$, drugi zaś z prostopadłościanów $8 \times 3 \times 1$.



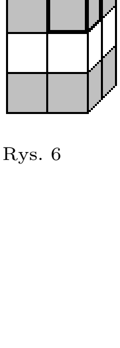
Rys. 5. Sposoby zbudowania prostopadłościanów $4 \times 2 \times 1$ i $8 \times 3 \times 1$ (widok z góry)

Udowodniliśmy zatem

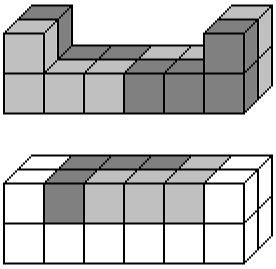
Twierdzenie 3a. *Prostopadłościan* $m \times n \times 1$ $(m, n > 1)$ *można zbudować z L-tetramin wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn* mn *jest podzielny przez* 8.

Załóżmy teraz, że wszystkie krawędzie prostopadłościanu są większe niż 1. Oczywiście iloczyn długości krawędzi musi być podzielny przez 4 i udowodnimy, że poza pewnymi wyjątkami jest to warunek dostateczny.

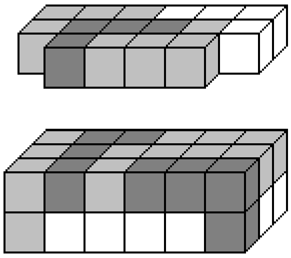
Jasne, że sześcianu o krawędzi długości 2 nie można zbudować z L-tetramin. Wykażemy, że to samo dotyczy prostopadłościanów $2 \times 2 \times k$, gdzie k jest nieparzyste. Jeśli pokolorujemy na szaro co drugi kwadrat 2×2 naszego prostopadłościanu, jak pokazuje rysunek 6, to stwierdzimy, że różnica między liczbą sześcianów jednostkowych szarych, a liczbą sześcianów jednostkowych białych jest równa 4. Jednakże każde L-tetramino pokrywa 3 sześciany szare i jeden biały albo na odwrót. Innymi słowy różnica między liczbą sześcianów szarych i białych dla każdego tetramina jest równa 2. Jeśli dany prostopadłościan dałoby się zbudować z takich klocków, to ich liczba musiałaby być nieparzysta, skąd wniosek, że dana różnica nie może się dzielić przez 4 – sprzeczność.



Rys. 6



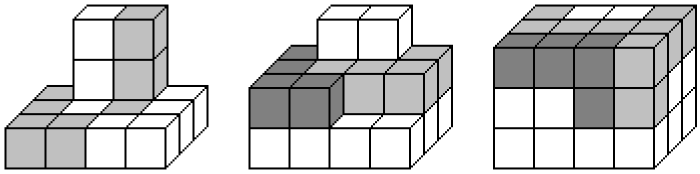
Rys. 7



Rys. 8

Teraz pokażemy, że pozostałe prostopadłościany można zbudować z L-tetramin. Najpierw odnotujmy, że możliwe jest zbudowanie następujących prostopadłościanów (patrz odpowiednio rysunki 5, 7, 8, 9):

$$2 \times 4 \times 1, \quad 2 \times 2 \times 6, \quad 2 \times 3 \times 6, \quad 3 \times 3 \times 4.$$



Rys. 9

Najpierw zajmiemy się przypadkiem, w którym co najmniej dwie krawędzie danego prostopadłościanu są parzyste. Z m kopii prostopadłościanów $2 \times 4 \times 1$ można zbudować dowolny prostopadłościan $2 \times 4 \times m$. Z prostopadłościanów $2 \times 6 \times 2$ i $2 \times 6 \times 3$ zbudujemy natomiast dowolny prostopadłościan $2 \times 6 \times m$. Ponieważ dowolną parzystą liczbę większą niż 2 możemy przedstawić jako sumę pewnej ilości czwórek i szóstek, to zbudujemy też prostopadłościan $2 \times 2l \times m$ (gdzie $l, m > 1$), a z k takich kopii dowolny prostopadłościan $2k \times 2l \times m$ (gdzie $l, m > 1$). Pozostaje jeszcze zauważyć, że jeśli prostopadłościan ma dwie krawędzie długości 2, to trzecia musi być parzysta i taki prostopadłościan zbudujemy z $2 \times 2 \times 6$ oraz $2 \times 2 \times 4$.

Przyjmijmy teraz, że pewne dwie krawędzie danego prostopadłościanu mają długości nieparzyste. Wówczas trzecia krawędź ma długość podzielną przez 4. Z prostopadłościanów $4 \times 3 \times 2$ i $4 \times 3 \times 3$ zbudujemy dowolny prostopadłościan $4 \times 3 \times m$ ($m > 1$). Natomiast każdy prostopadłościan $4 \times 2 \times m$ powstaje z m jednakowych kopii prostopadłościanu $4 \times 2 \times 1$. W takim razie możemy także zbudować prostopadłościan $4 \times l \times m$ ($l, m > 1$) i również dowolny prostopadłościan, w którym pewna krawędź ma długość podzielną przez 4, a pozostałe dwie większe niż 1.

Możemy zatem podsumować

Twierdzenie 3. *Prostopadłościan daje się zbudować z L-tetramin wtedy i tylko wtedy, gdy*

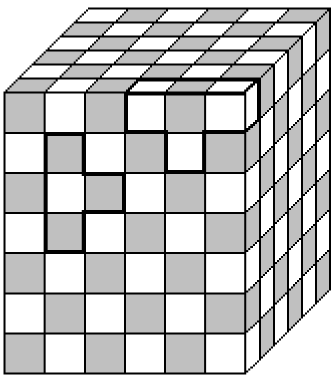
a) jedna z krawędzi jest równa 1, zaś iloczyn pozostałych dwóch podzielny przez 8;

b) wszystkie krawędzie mają długości większe niż 1 i ich iloczyn jest podzielny przez 4 z wyjątkiem przypadków $2 \times 2 \times 2$ *i* $2 \times 2 \times (2k + 1)$.

T-tetramino

Ten przypadek omówimy nieco pobieżnie, gdyż jest dość skomplikowany. Jeśli pokolorujemy dany prostopadłościan w przestrzenną szaro–białą szachownicę, to okazuje się, że każde T-tetramino składa się z trzech sześcianów jednego koloru i jednego drugiego koloru. W takim razie liczba tetramin musi być parzysta, a w konsekwencji iloczyn długości krawędzi danego prostopadłościanu podzielny przez 8.

Okazuje się, że jeśli każda z krawędzi prostopadłościanu ma długość większą niż 1, to ten warunek, poza „małymi” wyjątkami jest dostateczny. Listę „pierwotnych” prostopadłościanów można znaleźć na stronie `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PENTA/tetra-proof`.

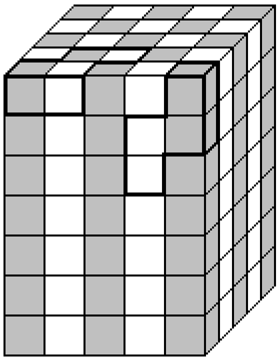


Rys. 10

Jeśli dokładnie jedna z krawędzi tego prostopadłościanu ma długość równą 1, to okazuje się, że pozostałe dwie krawędzie muszą mieć długości podzielne przez 4 i jest to także warunek dostateczny (czyli dany prostopadłościan można zbudować z prostopadłościanów $4 \times 4 \times 1$). Problem ten jest równoważny płaskiej wersji, której dowód można znaleźć w [4] – ze względu na to, że jest dość techniczny i skomplikowany, pominiemy go tu.

N-tetramino

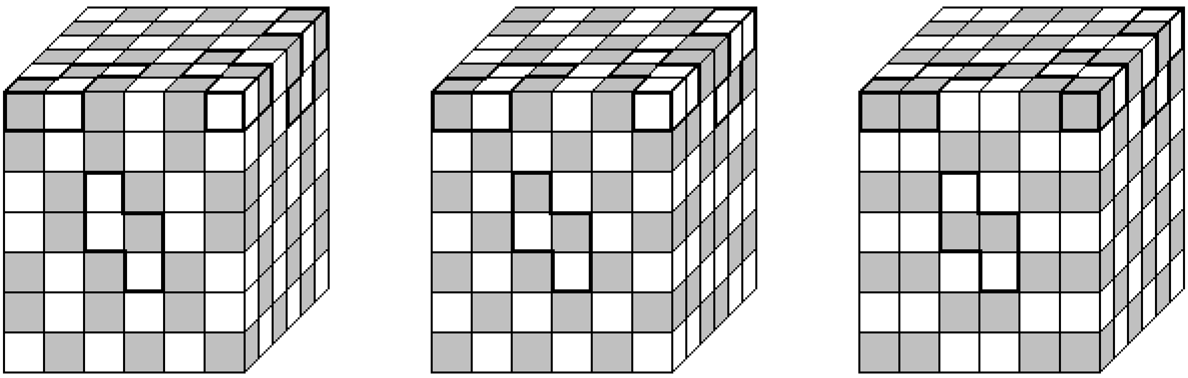
Ten przypadek jest bardzo nietypowy, bowiem na pierwszy rzut oka w ogóle nie jest oczywiste, że jakikolwiek prostopadłościan daje się ułożyć. Zwłaszcza, że na płaszczyźnie z „płaskich" N-tetramin nie można ułożyć żadnego prostokąta. W przestrzeni jednak szybko spotyka nas miła niespodzianka, bowiem można zbudować prostopadłościany $2 \times 4 \times 4$ i $2 \times 3 \times 4$ (który prostszy to już kwestia gustu).



Rys. 11

Udowodnimy najpierw, że aby w ogóle dany prostopadłościan dało się zbudować, to iloczyn długości jego krawędzi musi być podzielny przez 8 i co najmniej dwie z nich parzyste.

Rozpocznijmy właśnie od pokazania, że co najmniej dwie krawędzie danego prostopadłościanu są parzyste. Przypuśćmy przeciwnie i pokolorujmy ścianę wyznaczoną przez dwie krawędzie nieparzyste w szaro–białą szachownicę, zaś cały prostopadłościan w słupy, jak pokazuje rysunek 11. Wówczas liczby białych sześcianów jednostkowych i szarych są różne. Z drugiej strony każde N-tetramino składa się z jednakowej liczby szarych i białych sześcianów jednostkowych. Oznacza to, że zbudowanie prostopadłościanu o dwóch krawędziach nieparzystych jest niemożliwe.

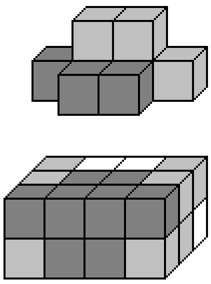


a) b) c)

Rys. 12

Teraz wykażemy, że liczba N-tetramin musi być parzysta, co w konsekwencji oznacza iloczyn długości krawędzi podzielny przez 8. Wybierzmy dowolną ze ścian (np. górną) i pokolorujmy warstwę sześcianów sąsiadujących z nią w szaro–biała szachownicę. Kolejną warstwę pokolorujmy tak samo. Następne dwie warstwy kolorujemy również w szachownicę, ale na odwrót. Kolejne dwie warstwy znów malujemy w szachownice i znów odwrotnie niż poprzednio itd. (patrz rysunek 12a). Ten sam proces powtórzymy dla ściany bocznej i przedniej (rysunki 12b i 12c). Ponieważ prostopadłościan ma co najmniej dwie krawędzie parzyste, to każda z szachownic będzie zawierała jednakową liczbę sześcianików białych i szarych, a w konsekwencji w każdym z tych trzech kolorowań obie liczby będą równe. Popatrzmy jeszcze raz na rysunek 12a. Zauważmy, że każde z tetramin ustawionych „pionowo" (czyli przecinających trzy warstwy w pionie) składa się z trzech sześcianów białych i jednego szarego, bądź na odwrót. U pozostałych N-teteramin zaś obie liczby są równe. Skoro więc liczba sześcianów białych jest równa liczbie sześcianów szarych, to liczba „pionowych" tetramin musi być parzysta. Przeprowadzając podobne rozumowanie dla dwóch pozostałych kolorowań wykażemy, że liczba N-tetramin każdego z tych trzech typów jest parzysta. W takim razie liczba wszystkich tetramin tworzących dany prostopadłościan jest parzysta.

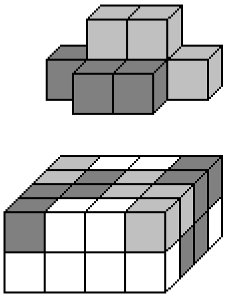
Załóżmy teraz, że mamy dany prostopadłościan, którego iloczyn długości krawędzi jest podzielny przez 8 i co najmniej dwie z nich są parzyste. Jest oczywiste, że z N-tetramin nie da się zbudować żadnego prostopadłościanu, którego jedna z krawędzi ma długość równą 1 oraz żadnego prostopadłościanu o dwóch krawędziach równych 2. Także zbudowanie prostopadłościanu $2 \times 6 \times 6$ nie jest możliwe, co wymaga jednak żmudnej analizy wielu przypadków (chyba, że któryś z Czytelników znajdzie jakiś lepszy argument). Pokażemy, że pozostałe prostopadłościany już dają się zbudować z N-tetramin. Mamy do rozpatrzenia dwa przypadki:



Rys. 13

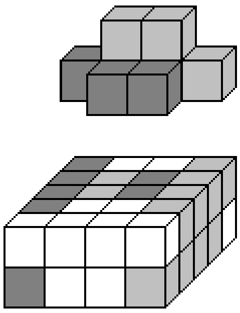
a) jedna z krawędzi ma długość podzielną przez 4, a jedna z dwóch pozostałych jest parzysta,

b) wszystkie parzyste niepodzielne przez 4.



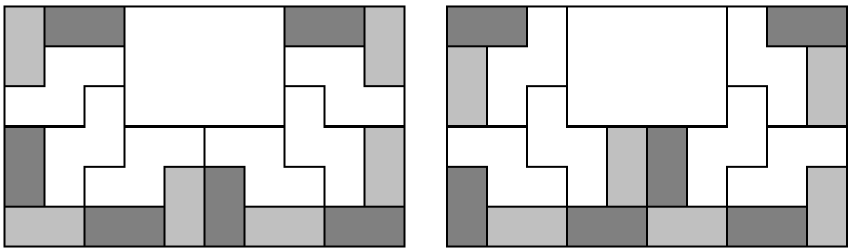
Rys. 14

W pierwszym zauważmy najpierw, że da się zbudować prostopadłościany $4 \times 2 \times 3$, $4 \times 2 \times 4$ i $4 \times 2 \times 5$ (patrz rysunki 13, 14 i 15). Z nich złożymy każdy prostopadłościan $4 \times 2 \times m$ ($m \geqslant 3$), a następnie wszystkie prostopadłościany $4k \times 2l \times m$ ($m \geqslant 3$).

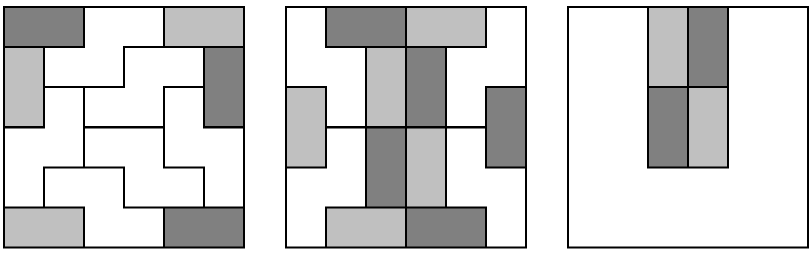


Rys. 15

W drugim zauważmy, że można zbudować prostopadłościany $2 \times 6 \times 10$ i $6 \times 6 \times 6$ (rysunki 16 i 17). Ponieważ z poprzednich rozważań już wiemy jak zbudować prostopadłościan $2 \times 4 \times 4$, to z pierwszego z nich dostajemy wszystkie prostopadłościany $2 \times 2l \times 2m$ ($l \geqslant 3$ i $m \geqslant 5$), a potem również prostopadłościany $2k \times 2l \times 2m$ ($l \geqslant 3$ i $m \geqslant 5$). Ponieważ już wcześniej odrzuciliśmy przypadki $2k \times 2 \times 2$ i $2 \times 6 \times 6$, to pozostały nam jedynie prostopadłościany $2k \times 6 \times 6$. Jednakże je otrzyjmujemy z prostopadłościanów $6 \times 6 \times 6$ i $4 \times 6 \times 6$.



Rys. 16. Sposób zbudowania prostopadłościanu $2 \times 6 \times 10$ (kolejno warstwa pierwsza i druga, jednakowym kolorem zaznaczono fragmenty wchodzące w skład tego samego tetramina).



Rys. 17. Sposób zbudowania sześcianu o krawędzi 6. Na rysunku pokazano wypełnienie kolejno pierwszych trzech warstw (jednakowym kolorem zaznaczono fragmenty wchodzące w skład tego samego tetramina). Do powstałej bryły wystarczy jeszcze prostopadłościan $4 \times 3 \times 2$, dwa prostopadłościany $4 \times 4 \times 2$ i jeden prostopadłościan $4 \times 6 \times 2$.

Udowodniliśmy zatem

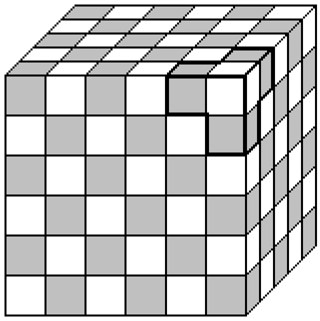
Twierdzenie 4. *Prostopadłościan o krawędziach większych niż 1 daje się zbudować z N-tetramin wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn długości jego krawędzi jest podzielny przez 8 i co najmniej dwie z nich są parzyste poza przypadkami:*

a) $2 \times 6 \times 6$,

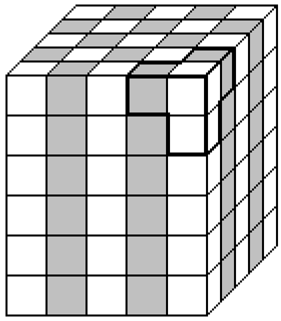
b) pewne dwie krawędzie prostopadłościanu mają długość równą 2.

Tetramino rozgałęzione

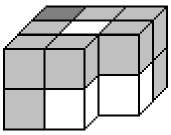
Zajmijmy się teraz pierwszym z dwóch (lub trzech, jeśli opuścimy założenie o odbijaniu) tetramin, które są „naprawdę przestrzenne” – tetraminem rozgałęzionym. Udowodnimy na początek warunek konieczny, a mianowicie, że iloczyn długości krawędzi prostopadłościanu musi się dzielić przez 8 i co najmniej dwie z nich muszą być parzyste (podobnie jak w przypadku N-tetramin). Oczywiście także każda z krawędzi danego prostopadłościanu musi mieć długość większą niż 1.



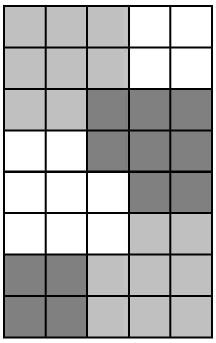
Rys. 18



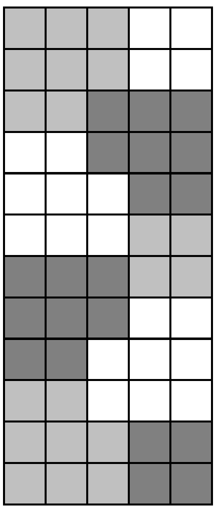
Rys. 19



Rys. 20



Rys. 21

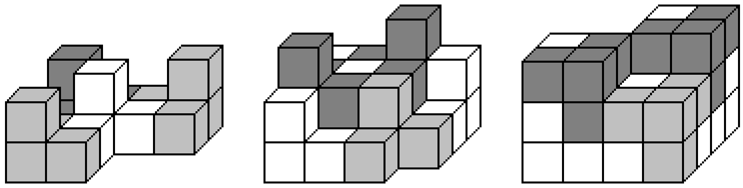


Rys. 22

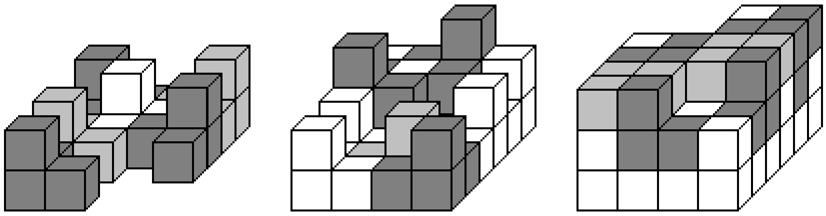
Pokolorujmy dany prostopadłościan w przestrzenną szaro–białą szachownicę (rysunek 18). Jeśli da się go zbudować z tetramin rozgałęzionych, to iloczyn długości krawędzi musi dzielić się przez 4, skąd wniosek, że co najmniej jedna z krawędzi jest parzysta. To zaś oznacza, że sześcianów jednostkowych szarych i białych jest tyle samo. Zauważmy jednak, że każde tetramino składa się z trzech sześcianików szarych i jednego białego albo na odwrót. Stąd wynika, że liczba tych tetramin musi być parzysta, a więc łączna liczba sześcianów jednostkowych tworzących dany prostopadłościan jest podzielna przez 8 – iloczyn długości krawędzi prostopadłościanu również.

Przypuśćmy teraz, że pewne dwie krawędzie danego prostopadłościanu mają długości nieparzyste. Pokolorujmy ścianę wyznaczoną przez te dwie krawędzie w szaro–białą szachownicę, zaś cały prostopadłościan w słupy, jak pokazuje rysunek 19. Wówczas liczby białych sześcianów jednostkowych i szarych są różne. Jednakże każde tetramino rozgałezione składa się z dwóch sześcianów białych i dwóch szarych. Oznacza to, że wypełnienie takiego prostopadłościanu nie jest możliwe.

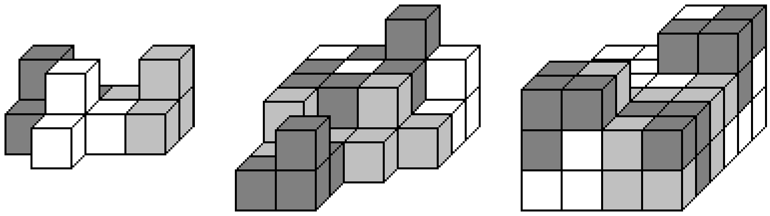
Zajmijmy się teraz problemem zbudowania pozostałych prostopadłościanów z tetramin rozgałęzionych. Ponieważ sześcian o krawędzi długości 2 składa się z dwóch takich tetramin, to natychmiast stąd wynika, że każdy prostopadłościan o wszystkich krawędziach parzystych również można z nich zbudować. Zajmijmy się teraz prostopadłościanami, których jedna krawędź jest nieparzysta, zaś iloczyn pozostałych dwóch dzieli się przez 8. Jest jasne, że krawędź nieprzysta musi mieć długość większą niż 1. Niestety nie potrafimy nic powiedzieć o prostopadłościanach, których jedna z krawędzi ma długość 3 poza tym, że ułożenie „małych” przypadków (tzn. o krawędziach mniejszych niż 9) jest niemożliwe, co sprawdzono za pomocą komputera. Nietrudno też się przekonać (rozpatrując kilka potencjalnych możliwości), że prostopadłościan $2 \times 4 \times 5$ nie daje się zbudować z tetramin rozgałęzionych. Pokażemy teraz, że pozostałe już się dają. Z bryły pokazanej na rysunku 20 i sześcianów o krawędzi długości 2 zbudujemy prostopadłościany $2 \times 8 \times 5$ i $2 \times 12 \times 5$ (rysunki 21 i 22). To nam da wszystkie rozważane prostopadłościany o dwóch krawędziach długości 2 i 5, zaś przez dołożenie sześcianów o krawędzi 2 dostaniemy wszystkie prostopadłościany, których jedna krawędź jest równa 2. Na rysunku 23 mamy sposób ułożenia bryły, której dwie kopie tworzą prostopadłościan $4 \times 4 \times 5$, zaś na rysunkach 24 i 25 pokazane jest jak zbudować dwie bryły A i B, z których powstanie prostopadłościan $4 \times 6 \times 5$. Z nich złożymy dowolny prostopadłościan $4 \times 2l \times 5$ ($l \geqslant 2$), a przez dołożenie sześcianów o krawędzi 2 i skopiowanie k razy dostajemy dowolny prostopadłościan $4k \times 2l \times m$ ($l \geqslant 2$ i $m \geqslant 5$–nieparzyste).



Rys. 23. Kolejne etapy budowania bryły, której dwie kopie tworzą prostopadłościan $4 \times 4 \times 5$ (na biało jest pokolorowana część już zbudowana, na kolorowo – nowe klocki)



Rys. 24. Kolejne etapy budowania bryły A (na biało jest pokolorowana część już zbudowana, na kolorowo – nowe klocki)



Rys. 25. Kolejne etapy budowania bryły B, która wraz z bryłą A tworzy prostopadłościan $4 \times 6 \times 5$ (na biało jest pokolorowana część już zbudowana, na kolorowo – nowe klocki)

Udowodniliśmy zatem następujące

Twierdzenie 5. *Prostopadłościan o krawędziach większych niż 1 daje się zbudować z tetramin rozgałęzionych wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn długości jego krawędzi jest podzielny przez 8 i co najmniej dwie z nich są parzyste poza dwoma przypadkami:*

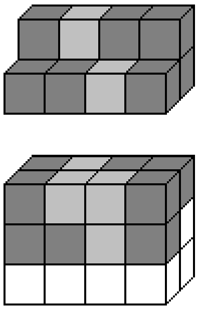
a) $2 \times 4 \times 5$,

b) jedna z krawędzi jest równa 3 (to problem jest otwarty, choć wydaje się, że również i tu odpowiedź jest negatywna).

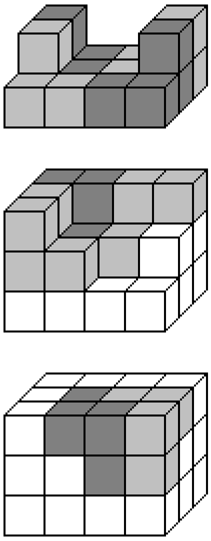
Być może któryś z Czytelników znajdzie odpowiedź na to nierozstrzygnięte na razie pytanie...

Tetramino śrubowe

Został nam ostatni przypadek, w którym przyjmujemy oczywiście, że dane części możemy odbijać symetrycznie (jeśli tego nie założymy, to sprawa robi się znacznie bardziej uciążliwa). Jest jasne, że aby wypełnienie prostopadłościanu takimi tetraminami było możliwe, to iloczyn długości krawędzi tego prostopadłościanu musi być podzielny przez 4. Jasne też, że każda z tych krawędzi musi mieć długość większą niż 1 i nietrudno się także przekonać, że zbudowanie prostopadłościanu, którego pewne dwie krawędzie są równe 2, a trzecia nieparzysta, jest niemożliwe.

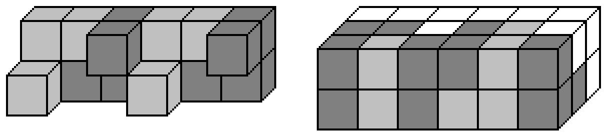


Rys. 26



Rys. 27

Udowodnimy teraz, że można zbudować wszystkie pozostałe prostopadłościany. Rysunki 26, 27 i 28 przedstawiają sposoby zbudowania odpowiednio prostopadłościanów $2 \times 3 \times 4$, $3 \times 3 \times 4$ i $2 \times 3 \times 6$. Jasne też, że z dwóch tetramin śrubowych złożymy sześcian o krawędzi 2. Stąd natychmiast otrzymujemy wszystkie prostopadłościany o trzech krawędziach parzystych. Zajmijmy się teraz prostopadłościanami o jednej krawędzi nieparzystej. Z prostopadłościanów $4 \times 3 \times 2$ i $4 \times 3 \times 3$ dostaniemy dowolny prostopadłościan o dwóch krawędziach równych 4 i 3. Dokładając do niego sześciany o krawędzi 2 otrzymamy dowolny prostopadłościan, którego jedna z krawędzi jest równa 4, a z odpowiedniej liczby jego kopii dowolny prostopadłościan, którego jedna z krawędzi jest podzielna przez 4. Pozostały jeszcze tylko prostopadłościany o dokładnie dwóch krawędziach parzystych. Z prostopadłościanów $4 \times 2 \times 3$ i $6 \times 2 \times 3$ złożymy dowolny prostopadłościan $2k \times 2 \times 3$ ($k \geqslant 2$). Dokładając do niego sześciany o krawędzi 2 zbudujemy dowolny prostopadłościan $2k \times 2 \times m$ ($k \geqslant 2$ i m nieparzyste), a z odpowiedniej liczby jego kopii dowolny prostopadłościan o dokładnie dwóch krawędziach parzystych poza przypadkami $2 \times 2 \times (2n+1)$, które już wcześniej odrzuciliśmy.



Rys. 28

A przecież to nie koniec. Można przecież pytać, co będzie jeśli będziemy używać wiecej niż jednego typu. Co, gdy narzucimy ograniczenia, że np. można użyć tylko jednej kopii tetramina prostego? A jak tego będzie mało, to mamy przed sobą przestrzenne pentomina, hexomina, itd... Możemy też opuścić założenie o spójności wielomin. A co, gdy zaczniemy jeszcze np. łaczyć tetramina z pentaminami i hexaminami itd... A w ogóle kto powiedział, że mamy się ograniczać tylko do budowania prostopadłościanów – można przecież spróbować z innymi, mniej reguralnymi, typami brył. Pytania jak widać można mnożyć bez ograniczeń. Czytelnikom, których interesuje ta tematyka, polecam kilka pozycji z literatury.

Literatura

[1] A. Cibulis, Packing Boxes with N-tetracubes, Crux Mathematicorum (October 1997), vol 23 n 6, 336-342,

[2] A. L. Clarke, Packing Boxes with Congruent Polycubes, J. of Recreational Mathematics 10 (1977/78) 177-182,

[3] D. A. Klarner, Packing a Rectangle with Congruent N-ominoes, Journal of Combinatorial Theory 7 (1969) 107-115, Thm 4,

[4] D. W. Walkup, Covering a rectangle with T-tetraminoes, American Mathematical Monthly 72 (1965), 986-988,

[5] `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke` – strona Torstena Sillke m. in. o wypełnianiu prostopadłościanów klockami.