Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na XLV Szkole Matematyki Poglądowej, *Co mi się podoba*, Jachranka, sierpień 2010.

O uczniach, problemach i rozwiązaniach

Jacek DYMEL, Kraków

Wzorce będące dziełem matematyka, podobnie jak wzorce malarza lub poety, muszą być piękne; idee, tak jak barwy czy słowa, muszą pasować do siebie w harmonijny sposób. Piękno jest pierwszym sprawdzianem: na szkaradną matematykę nie ma miejsca pod słońcem.

Godfrey Hardy

Temat Szkoły Matematyki Poglądowej: *Co mi się podoba?* daje referującemu pewną swobodę w zakresie wyboru tematu referatu. Jednocześnie może stanowić pułapkę i spowodować wystąpienie obaw, czy na pewno to co podoba się autorowi, będzie się podobać czytelnikom. Ocena tego, co się podoba, jest oparta na wyczuciu estetyki; wszystko zależy od indywidualnych doświadczeń i wrażliwości, od rozróżnienia tego co ładne i tego co nieładne. Chciałem jednakże, by słowa Godfreya Hardy'ego były głównym drogowskazem przy pisaniu tego artykułu: chodzi o to, by pokazywać matematykę piękną.

Inspiracją dla każdego nauczyciela są oczywiście jego uczniowie. Szczególnie ci, którzy wykazują uzdolnienia i zainteresowania matematyczne. Analizując prace tych młodych matematyków można obserwować pomysły, inspiracje, także błędy. W moim artykule przedstawię takie pomysły rozwiązań zadań olimpijskich, które wywołały moje zainteresowanie. Aby podkreślić, co mi się podoba, postaram się to pokazać także na tle tego, co mi się nie podoba.

Gdy w trakcie jednego z referatów powiedziałem, że uczniowie, na szczęście, nie stosują zbyt często metody analitycznej do rozwiązywania zadań geometrycznych, to pewien pracownik naukowy zajmujący się geometrią algebraiczną, gorąco zaprotestował, mówiąc, że podejście analityczne jest najpiękniejszą metodą, jaką można posłużyć się w geometrii. Tymczasem z punktu widzenia uczestnika olimpiady metoda ta w zadaniach geometrycznych nie działa zbyt dobrze, bo jest długa, żmudna i nieczęsto prowadzi do rozwiązania. Przede wszystkim jednak, nie wymaga od ucznia uruchomienia pokładów kreatywności.

Zaprezentuję tu bardzo różne zadania, z różnych dziedzin, ale zawsze takie, które mają intrygujące rozwiązania, a ich autorami są uczniowie.

Na II etapie 57 Olimpiady Matematycznej uczniowie rozwiązywali następujące:

Zadanie

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie

Przedstawię pewien charakterystyczny sposób rozwiązania, który został zaproponowany przez 24 uczniów: dziewięciu z V LO w Krakowie , pięciu z XIV LO w Warszawie, po dwóch z I LO w łomży, LO w Stalowej Woli, VI LO w Warszawie, po jednym z III LO w Gdyni, I LO w Lublinie, V LO w Olsztynie, IV LO w Toruniu.

Nierówność z tezy zadania mnożymy stronami przez abc, a następnie prawą stronę zamieniamy na wyrażenie $ab + bc + ca$. Potem mnożymy stronami otrzymaną nierówność przez $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)$. Po wykonaniu przekształceń algebraicznych otrzymujemy nierówność:

$$\begin{gathered} a^7b^4 + a^7c^4 + b^7a^4 + b^7c^4 + c^7a^4 + c^7b^4 \geqslant \\ \geqslant a^6b^4c + a^6c^4b + b^6a^4c + b^6c^4a + c^6a^4b + c^6b^4a \end{gathered}$$

Teraz skorzystamy z nierówności Muirheada:

Twierdzenie Muirheada

Niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ będą dwoma ciągami nieujemnych liczb całkowitych spełniających warunki:

$$\begin{gathered}\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n\\ \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n\\ \alpha_1 \geqslant \beta_1\\ \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2\\ \vdots\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\end{gathered}$$

(Mówimy, że ciąg $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ majoryzuje ciąg $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.)

Wówczas dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi nierówność:

$$X_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant X_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gdzie $X_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest *wielomianem symetrycznym* to znaczy jest sumą wszystkich jednomianów postaci

$$x_1^{\alpha_{i_1}} x_2^{\alpha_{i_2}} \ldots x_n^{\alpha_{i_n}},$$

gdzie ciąg $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jest dowolną permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n)$.

Ciąg $(7, 4, 0)$ majoryzuje ciąg $(6, 4, 1)$, a zatem na podstawie twierdzenia Muirheada dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność $W_{(7,4,0)}(a, b, c) \geqslant W_{(6,4,1)}(a, b, c)$, co kończy dowód.

Większość uczniów, którzy zaproponowali rozwiązanie zadania w oparciu o twierdzenie Muirheada, uczęszczała do renomowanych szkół, znanych z licznych sukcesów olimpijskich. Jednakże część z tych uczniów nie stosowała prawidłowej nazwy twierdzenia, poprawnego sformułowania, jedynie kilku z nich sprawdzało założenia i możliwość stosowania tej nierówności w tym zadaniu. Można przypuszczać, że rozwiązania były efektem specyficznego treningu i mechanicznego podejścia do zadania: trzeba wykonać pewien algorytm, który gwarantuje uzyskanie wyniku.

Rozwiązanie powyższe należy do mało eleganckich rozumowań. Istnieją ładne rozwiązania zadań olimpijskich oparte na nierówności Muirheada – warto zerknąć na zadania z IMO z roku 1995 i 2005.

Czy powyższe zadanie można było rozwiązać ładnie i efektownie? Poniżej przedstawiam rozwiązanie ucznia II klasy gimnazjum, uczestnika zawodów II stopnia 57 OM.

Na początek udowodnimy:

Lemat

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \geqslant \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}.$$

Dowód

Mnożymy nierówność z tezy lematu stronami przez $(a^n + b^n)(a^{n-1} + b^{n-1})$ i otrzymujemy

$$a^{2n} + b^{2n} + a^{n+1}b^{n-1} + a^{n-1}b^{n+1} \geqslant a^{2n} + b^{2n} + 2a^n b^n$$

Wówczas dostajemy nierówność prawdziwą

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Ponieważ wszystkie przejścia były równoważne, teza została udowodniona.

Korzystając z lematu zapisujemy:

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geqslant \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a^2+b^2}{a^1+b^1} \geqslant \frac{a^1+b^1}{a^0+b^0}.$$

Zatem możemy zapisać

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant \frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ca} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).$$

Ponieważ z założenia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, otrzymujemy

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$$

co kończy dowód.

Obserwując rozwiązania zadań olimpijskich można dostrzec, że wielu uczniów próbuje stosować metody, twierdzenia, algorytmy, bez dogłębnej ich znajomości. Trudno powiedzieć, jak sytuacja wyglądała dawniej, ale wydaje się, że algorytmizacja rozwiązywania tego typu zadań jest obecnie znacznie powszechniejsza niż np. 20-30 lat temu.

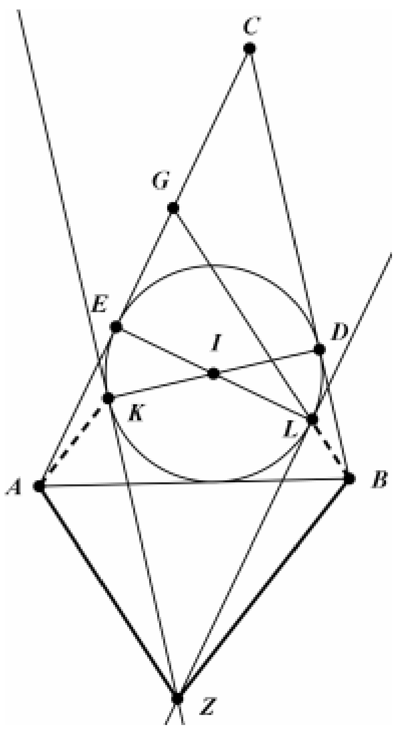
Można zauważyć, że podobne myślenie o rozwiązywaniu zadań matematycznych w oparciu o opanowane schematy, bez elementów rozumowania, jest dostrzegalne u autorów podstawy programowej, programów oraz egzaminów szkolnych z matematyki. Nie można się w tym miejscu nie odnieść do obserwacji prof. Marka Kordosa z artykułu *Metodologia empiryczna a metodologia dedukcyjna* ([2]). Pisze on tam, że metodologia dedukcyjna była podstawą nauki do XIX wieku. Po drugiej wojnie światowej pojawiła się wyraźna tendencja do stosowania przepisów, które co prawda nie mają dowodów, ale dobrze działają. Profesor Kordos zadał pytanie, czy metodologia empiryczna zacznie decydować o obliczu matematyki. Wydaje się, że wielu olimpijczyków świadomie lub nie, traktuje wiedzę matematyczną według standardów metodologii empirycznej. Uczniowie poznają na zajęciach kółka, czytają w książkach lub na stronach internetowych o metodach rozwiązywania zadań olimpijskich, a później korzystają z takich metod niczym babilończycy z glinianych tabliczek: jest przepis i wiadomo, że po zastosowaniu w pewnej sytuacji daje dobry efekt. Nie zawsze wiedzą dlaczego metoda jest poprawna, ale wiedzą kiedy dobrze działa.

Poniżej chciałbym zaprezentować interesujące rozwiązania dwóch niebanalnych zadań olimpijskich z drugich etapów Olimpiady Matematycznej. Autorzy rozwiązań nie znaleźli się w gronie finalistów OM, a ich pomysły nie opierały się na zaawansowanych teoriach, specyficznych twierdzeniach czy pojęciach.

Zadanie 2 z II etapu 57 OM

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC + BC = 3 \cdot AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie



Rys. 1

Niech prosta BL przecina bok AC w punkcie G, który jest punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta ABC, a zatem spełniona jest równość $CG = AE$, czyli $CE = AG$. Niech proste styczne w punktach K oraz L do okręgu wpisanego w trójkąt ABC przecinają się w punkcie Z.

Ponieważ $ZL = CE = AG$ i odcinek ZL jest równoległy do odcinka CE, czworokąt $AGLZ$ jest równoległobokiem. Wobec tego prosta AZ jest równoległa do prostej BL. Warto zwrócić uwagę na to, że do tego miejsca w dowodzie nie został wykorzystany warunek $AC + BC = 3 \cdot AB$, a zatem równoległość prostych BL i AZ nie zależy od wyboru trójkąta.

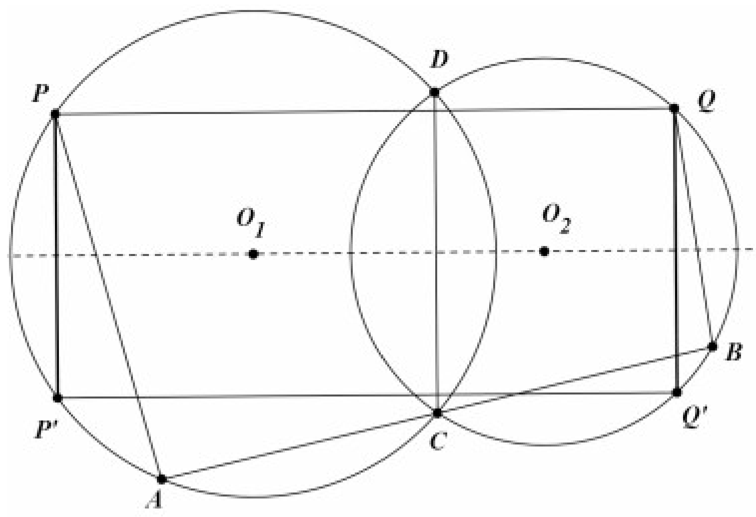
Warunek $AC + BC = 3 \cdot AB$ oznacza, że $CE = CD = AB$. Skoro tak, to punkty A, L, B, Z są wierzchołkami trapezu o równych przekątnych, czyli można na tym trapezie opisać okrąg. Taka sama sytuacja ma miejsce dla czworokąta $AZBK$, więc na trapezie $AZBK$ również można opisać okrąg. Stąd wynika, że punkty A, Z, B, L, K leżą na jednym okręgu, czyli także A, B, L, K są współokęgowe.

Zadanie 5 z II etapu 57 OM

Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera punktu C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera punktu C. Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech O_1, O_2 będą, odpowiednio, środkami okręgów o_1, o_2. Poprowadźmy z punktów P oraz Q proste prostopadłe do prostej O_1O_2. Przetną one okręgi o_1 i o_2 kolejno w punktach P' oraz Q'.



Rys. 2

Zauważmy, że $\angle PAC = \angle PP'C$, bo kąty są oparte na tym samym łuku oraz $P'C = PD$, bo PP' jest prostopadła do O_1O_2 i zarazem równoległa do prostej CD. Skoro kąty PAC i $PP'C$ są równe oraz oba kąty zawierają ramię o tej samej długości (AP i $P'C$), to drugie ramię kąta musi być też tej samej długości. Zatem $PP' = AC$.

Analogicznie postępując w przypadku drugiego okręgu otrzymujemy $QQ' = CB = AC$.

Zatem czworokąt $PP'Q'Q$ jest prostokątem, którego boki PP' i QQ' są równoległe do prostej CD, a zatem odcinki PQ i $P'Q'$ są prostopadłe do prostej CD, co kończy dowód.

Obydwa zacytowane rozwiązania charakteryzowały się niebanalnymi pomysłami. Do tego stopnia niebanalnymi, że ani twórcy tych zadań, ani inni uczestnicy zawodów nie wpadli na nie.

Rozwiązywanie zadań jest obarczone pewną „kierunkowością”: wiadomo, że istnieje rozwiązanie. W przypadku zadania olimpijskiego jest ono zwykle ładne i efektowne. I takiego rozwiązania szukają zawodnicy. To inna sytuacja niż szukanie rozwiązania problemu otwartego, czy stawianie hipotez, gdy nie wiadomo, jaki będzie dowód. Wówczas ważniejsza niż efektowność jest efektywność.

Bardzo wielu uczniów odkryło, że szereg zadań olimpijskich można rozwiązać „siłowo”. Nie jest ważne wtedy piękno, lecz skuteczność.

Znamienne jest to, że proste i efektowne rozwiązania zadań z etapów okręgowych Olimpiady są charakterystyczne dla dwóch typów uczniowskich: uczniów wybitnych, osiągających znakomite rezultaty w OM, oraz zawodników, którzy nie zostają finalistami OM. Zatem można postawić hipotezę, że ładne pomysły to efekty deficytów w wiedzy i umiejętnościach (potrzebna jest deska ratunkowa - to właśnie pomysł) albo głębokiej wiedzy i dostrzegania faktów matematycznych w szerokim kontekście.

Proste, efektowne rozwiązanie oparte na pomyśle jest oznaką kultury matematycznej. Jak ocenić niebanalność rozwiązania? Kiedy można uznać, że pomysł jest interesujący? Może wtedy, gdy mało zawodników podaje dane rozwiązanie?

Kolejne zadanie, 3 z III etapu 57 OM, okazało się zadaniem bardzo trudnym – tylko dziewięciu zawodników z nim się uporało. Aż siedmiu rozwiązało je opisaną poniżej metodą.

Wiele osób zapoznając się z tym rozwiązaniem jest zaskoczonych jego prostotą. Jednocześnie można zapytać: dlaczego tak mało zawodników rozwiązało to zadanie? Przecież metoda zastosowana w tym rozwiązaniu jest typowa i należy do stałego arsenału strategii: rozważ szczególny przypadek i spróbuj go uogólnić.

Zadanie 3 z III etapu 57 OM

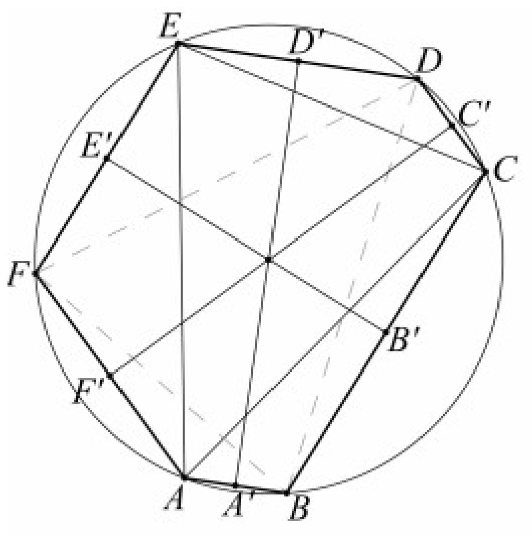
Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1

Przyjmijmy, że trójkąty ACE i DFB są wpisane w ten sam okrąg o środku S. Wówczas z równości $AE = BD$ wynika, że $AB \parallel ED$. A zatem prosta łącząca środki odcinków AB i ED przechodzi przez punkt S. Analogicznie pokazujemy, że proste łączące środki odcinków BC i EF oraz CD i FA przechodzą przez punkt S.



Rys. 3

Przypadek 2

Niech S_1 będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE, S_2 - środkiem okręgu opisanego na trójkącie DFB i $S_1 \neq S_2$. Niech A', B', C', D', E', F'

będą środkami boków, odpowiednio, AB, BC, CD, DE, EF, FA. W translacji o wektor $\overrightarrow{S_2S_1}$ obrazem trójkąta DFB jest trójkąt GHJ. Trójkąty ACE i GHJ są wpisane w ten sam okrąg o środku S_1. Punkty $A'', B'', C'', D'', E'', F''$ są środkami boków, odpowiednio, AJ, JC, CG, GE, EH, HA. Wówczas

$$\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{C'C''} = \overrightarrow{D'D''} = \overrightarrow{E'E''} = \overrightarrow{F'F''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{S_2S_1}.$$

Ponieważ punktem przecięcia prostych $A''D''$, $B''E''$ i $C''F''$ jest punkt S_1, więc punktem przecięcia prostych $A'D'$, $B'E'$ i $C'F'$ jest środek odcinka S_1S_2.

Zaprezentowane rozwiązanie podpowiada także, w jaki sposób można uogólnić zadanie (uogólnienie nie od razu jest widoczne, gdy obejrzymy rozwiązanie firmowe):

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym trójkąty ACE i BDF mają równe pola. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Na koniec pozostawiłem przedstawienie niezwykle interesującego zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Zadanie było jednym z najtrudniejszych w historii IMO; rozwiązało je tylko czterech zawodników: Konstantin Matwiejew z Rosji, Peter Scholze z Niemiec, Danylo Radczenko z Ukrainy i Pietro Verteci z Włoch. W zasadzie tylko znajomość pewnej techniki umożliwiała jego natychmiastowe rozwiązanie .

Technika wykorzystana przez zawodników nosi nazwę *Combinatorial Nullstellensatz.* A oto jej główne:

Twierdzenie

Niech F będzie ciałem i $P \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ będzie niezerowym wielomianem stopnia $\sum_{i=1}^{n} m_i$, w którym współczynnik przy $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ jest różny od zera. Dla dowolnych zbiorów $S_1, \ldots, S_n \subset F$ takich, że $|S_i| > m_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$, istnieją $c_i \in S_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ takie, że $P(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.

Dowód

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na stopień wielomianu P.

Jeżeli $deg(P) = 1$, to twierdzenie jest oczywiste.

Niech $deg(P) > 1$ i P spełnia założenia twierdzenia i nie spełnia tezy, to znaczy dla każdego $x \in S_1 \times \ldots \times S_n$: $P(x) = 0$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $m_1 > 0$.

Jeżeli wielomian P potraktujemy jak wielomian zmiennej x_1 o współczynnikach z pierścienia $F[x_2, \ldots, x_n]$, to w wyniku dzielenia przez wielomian $(x_1 - a)$ dla $a \in S_1$, otrzymamy

$$P = (x_1 - a)Q + R,$$

gdzie R jest wielomianem zmiennych $x_2, \ldots, x_n$, natomiast Q musi zawierać nieznikający jednomian postaci $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ i

$$deg(Q) = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1 = deg(P) - 1.$$

Dla dowolnego $x \in \{a\} \times S_2 \ldots \times S_n$ zachodzi $P(x) = 0$, co oznacza, że także $R(x) = 0$. Ponieważ R jest wielomianem zmiennych $x_2, \ldots, x_n$, znika on także dla $x \in (S_1 \setminus \{a\}) \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Weźmy zatem dowolny $x \in (S_1 \setminus \{a\}) \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Ponieważ $(x_1 - a)$ się nie zeruje, $Q(x) = 0$. Zatem Q zeruje się na $(S_1 \setminus \{a\}) \times S_2 \times \ldots \times S_n$, co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym.

Powyższy dowód zaproponował Mateusz Michałek ([3]), doktorant UJ, olimpijczyk z licznymi sukcesami. Aby docenić ten prosty i zrozumiały (nawet dla przeciętnych uczniów liceum) dowód, warto dla porównania zapoznać się z oryginalnym dowodem Nogi Alona ([1]).

Teraz możemy już łatwo rozwiązać zadanie z IMO.

Zadanie (IMO 2007)

Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Przyjmijmy, że

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

jest zbiorem $(n + 1)^3 - 1$ punktów w trójwymiarowej przestrzeni. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera S, ale do której nie należy $(0, 0, 0)$.

Rozwiązanie (Danylo Radchenko)

Niech $k \in N_+$ i $k < 3n$. Załóżmy, że każdy punkt zbioru S należy do jednej z k parami różnych płaszczyzn:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_kx + b_ky + c_kz = d_k,$$

gdzie $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$ oraz $d_i \neq 0$ dla $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Niech wielomian P będzie określony następująco:

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_ix + b_iy + c_iz - d_i) - \alpha \prod_{j=1}^{n} (x - j)(y - j)(z - j),$$

gdzie α jest tak dobrane, że $P(0, 0, 0) = 0$ (oczywistym jest, że $\alpha \neq 0$).

Ponieważ $k < 3n$, współczynnik przy $x^ny^nz^n$ nie jest równy 0. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* dla zbiorów $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, \ldots, n\}$ zachodzą założenia twierdzenia ($|S_1| > n$, $|S_2| > n$, $|S_3| > n$), więc istnieje taki punkt $(a, b, c) \in \{0, 1, \ldots, n\}^3$, że $P(a, b, c) \neq 0$. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $k \geqslant 3n$.

Pozostaje jeszcze wskazać najmniejszą liczbę płaszczyzn. Jest nią $3n$, gdyż można skonstruować odpowiedni zbiór płaszczyzn spełniających warunki zadania:

$$x = 1,\ x = 2,\ \ldots,\ x = n,\ \ y = 1,\ y = 2,\ \ldots,\ y = n,\ \ z = 1,\ z = 2,\ \ldots,\ z = n.$$

Sposoby rozwiązania zadania powyższego i rozwiązania przykładu pierwszego z tego artykułu należy ocenić inaczej. Twierdzenie *Combinatorial Nullstellensatz* należy do twierdzeń raczej niespotykanych w zastosowaniach olimpijskich, a znajomość metody jego wykorzystania wynika z głębokiej wiedzy zawodników najwyższej klasy na temat zagadnień współczesnej matematyki.

Nieczęsto zdarza się, aby na olimpiadzie pojawiało się zadanie powiązane ze współczesnymi wynikami matematycznymi. W nauczaniu matematyki w ogóle rzadko pojawia się stosowność do pokazania „żywej matematyki”. W zasadzie tylko w przypadku kształcenia uczniów wybitnie uzdolnionych taka okazja może się pojawić. Próby wprowadzenia współczesnych osiągnięć matematyki do kształcenia zwykłych uczniów prowadziły do niepokojących skutków.

Jak szybko przenika „żywa matematyka” do edukacji matematycznej najzdolniejszych? Wydaje się, że może to trwać od kilku do kilkunastu lat. Czy warto, aby takie treści pojawiały się w kształceniu najzdolniejszych? To pytanie jest silnie związane z pytaniem o cele konkursów takich jak olimpiady matematyczne. W mojej opinii zawody olimpiad matematycznych powinny być nastawione na wyławianie utalentowanych matematycznie uczniów, a zadania przedstawiane do rozwiązywania powinny wskazywać interesujące i warte poznania zagadnienia matematyczne, także te odkryte współcześnie. Zawody OM nie powinny być zwykłymi zawodami sportowymi, w których liczy się tylko doskonałość techniczna i to, kto zna więcej twierdzeń i tricków olimpijskich. W końcu przygotowujemy uczniów uzdolnionych do bycia twórczymi matematykami.

Należy pokazywać trudną, współczesną matematykę, ale nie jako wytrych do „rozkminiania" (to modne obecnie wśród olimpijczyków określenie) zadań, ale jako pretekst do interesujących rozważań pokazujących szerszy kontekst matematyczny. Sam fakt, że takie wyniki jak *Combinatorial Nullstellensatz* są przydatne do rozwiązywania zadań, nie przemawia za tym, aby je pokazywać uczniom. Należy raczej wskazać na to, że metoda ta nie wymaga potężnego aparatu pojęciowego i pozostaje blisko intuicji oraz nauczania szkolnego. Bo *Combinatorial Nullstellensatz* w istocie jest twierdzeniem bardzo poglądowym i intuicyjnym, choć już jego stosowanie wymaga dużej wprawy i wiedzy.

Inną kwestią pozostaje problem dotarcia do współczesnych wyników, mających zastosowania w zadaniach olimpijskich. Zwiększył się (w stosunku do XX wieku) dostęp uczniów do wiedzy poprzez internet czy publikacje książkowe, ale tej wiedzy jest zbyt dużo, aby nawet świetny uczeń (czy dobry nauczyciel) mógł dokonać selekcji. Skazany jest raczej na przypadkowe poszukiwania lub na przewodników. Od nas, nauczycieli (tych szkolnych i akademickich), zależy, jakimi będziemy przewodnikami i jaki obraz matematyki przedstawimy uczniom w czasie ich edukacji i poszukiwań. Bo warto pamiętać, że nie musimy uczyć tylko matematyki użytecznej, czasami powinniśmy pokazać matematykę ładną.

Literatura

[1] Noga Alon: *Combinatorial Nullstellensatz.* Combinatorics Probability and Computing 8, str. 7-29, 1999.

[2] Marek Kordos: *Metodologia empiryczna a metodologia dedukcyjna.* Matematyka Społeczeństwo Nauczanie nr 2, 1989, Siedlce.

[3] Mateusz Michałek, *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, 2009, Kraków.