

Topologia i podzbiory, czyli historia jednego twierdzenia

Michał ADAMASZEK, Coventry

Zacznijmy od wyjaśnienia tytułu. Będą nas interesować przestrzenie topologiczne, których elementami są podzbiory innych przestrzeni. Co to dokładnie znaczy?

Większość przestrzeni topologicznych, z którymi chcielibyśmy mieć do czynienia, powstaje z kilku podstawowych klocków, takich jak odcinek $I = [0, 1]$ czy okrąg S^1 . Do budowy bardziej skomplikowanych przestrzeni używamy operacji takich jak produkt kartezjański $X \times Y$, przestrzeń ilorazowa X/A czy bardziej ogólna przestrzeń ilorazowa X/\sim będąca wynikiem sklejenia punktów X w sposób opisany przez relację \sim . Na przykład okrąg powstaje przez sklejenie końców odcinka: $S^1 = I/0 \sim 1$.

Następny przykład motywuje potrzebę wprowadzenia innego typu konstrukcji. Mamy naczynie w kształcie pewnej przestrzeni X a w nim dokładnie n jednakowych, swobodnie poruszających się cząstek gazu. Chcemy opisać przestrzeń wszystkich możliwych położenia tych cząstek. Matematycznie elementami tej przestrzeni są n -elementowe podzbiory $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ przestrzeni X . Mówimy, że „blisko” ustalonego podzbioru C są wszystkie podzbiory otrzymane przez „małe” poruszenie wszystkimi punktami w C , oczywiście pod warunkiem, że żadne dwa punkty nie ulegną zderzeniu. Znaczenie słowa „małe” zależy tu od topologii w przestrzeni X . W ten intuicyjny sposób definiujemy małe otoczenia otwarte, a więc nadajemy naszej rodzinie podzbiorów strukturę przestrzeni topologicznej. Przestrzeń tego typu nazywa się zwykle przestrzeniami konfiguracyjnymi. Ten konkretny egzemplarz można zdefiniować bardziej formalnie jako

$$C_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j\} / \Sigma_n,$$

gdzie Σ_n oznacza grupę n -permutacji działającą na współrzędnych.

Po tym przykładzie Czytelnik powinien podejść ze zrozumieniem do przestrzeni, którymi będziemy się interesować:

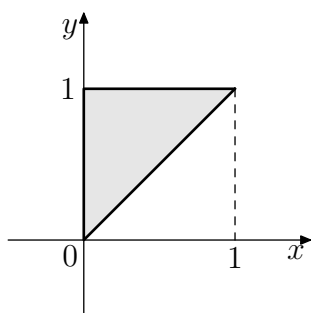
$$P_n(X) = \text{przestrzeń co najwyżej } n\text{-elementowych,} \\ \text{niepustych podzbiorów przestrzeni } X.$$

A zatem typowy element przestrzeni $P_n(X)$ wygląda tak samo, jak w $C_n(X)$, czyli jest zbiorem złożonym z n różnych punktów w X , ale dodatkowo mamy także wszystkie konfiguracje „zdegenerowane”, gdzie punktów jest mniej niż n . Małe otoczenie ustalonego podzbioru P definiujemy podobnie jak poprzednio, to znaczy pozwalamy na „małe” przemieszczenie wszystkich elementów z P , tym razem dopuszczając możliwość zderzenia i utworzenia konfiguracji o mniejszej liczności. Oznacza to, że zachodzi też zjawisko odwrotne, w którym jeden z punktów w konfiguracji zdegenerowanej może zamienić się na kilka punktów leżących bardzo blisko niego.

Zilustrujemy tę definicję na przykładzie. Przestrzeń co najwyżej dwuelementowych podzbiorów odcinka I można zapisać następująco:

$$P_2(I) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

ponieważ każdy 1- lub 2-elementowy podzbiór odcinka można jednoznacznie reprezentować przez parę uporządkowaną. Sytuacja ta przedstawiona jest na rysunku 1. Przestrzeń $P_2(I)$ jest więc topologicznie równoważna (fachowo: homeomorficzna) z domkniętym trójkątem. Podzbiorem jednoelementowym $\{x\}$ odpowiadają punkty postaci (x, x) . Widzimy, że małe otoczenie podzbioru $\{\frac{1}{2}\}$ zawiera podzbiory postaci $\{x, y\}$ gdzie x i y są bardzo bliskie $\frac{1}{2}$ i niekoniecznie równe.



Rys. 1. $P_2(I)$

Zanim przejdziemy do dalszych przykładów, zaobserwujmy jeszcze dwie proste własności zachodzące dla dowolnej przestrzeni X :

$$P_1(X) = X$$

$$X = P_1(X) \subset P_2(X) \subset P_3(X) \subset \dots$$

Możemy teraz precyzyjnie wyjaśnić, dokąd zmierza ten artykuł. Naszym celem jest jak najlepsze zrozumienie przestrzeni

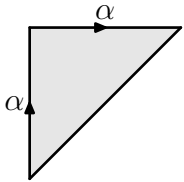
$$P_3(S^1)$$

złożonej z co najwyżej 3-elementowych podzbiorów okręgu. Czy jest ona topologicznie równoważna z jakąś znaną przestrzenią?

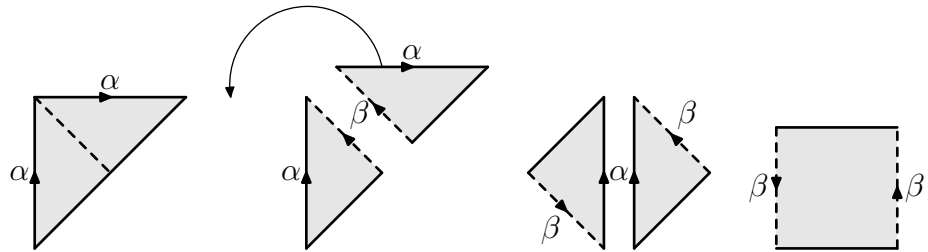
Na rozgrzewkę zbadajmy przestrzeń $P_2(S^1)$. Ponieważ okrąg powstaje z odcinka przez utożsamienie końców ($S^1 = I \sim 1$), więc także przestrzeń $P_2(S^1)$ powstaje z $P_2(I)$ poprzez utożsamienie wszystkich wystąpień punktów 0 i 1. Mamy zatem

$$P_2(S^1) = P_2(I)/(0, x) \sim (x, 1).$$

Sprawdźmy, jak to utożsamienie wpływa na trójkąt z rysunku 1. Punkty $(0, x)$ leżą na lewym, a $(x, 1)$ na górnym boku trójkąta, zatem musimy skleić te dwa boki zgodnie z kierunkiem strzałek na rysunku 2. Można to zrobić eksperymentalnie, związując lewy bok w okrąg i nawijając na niego górny bok (pamiętajmy, że wszystkie trzy wierzchołki trójkąta, $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$, reprezentują teraz ten sam podzbiór $\{0\}$). Ponieważ nie jest od razu jasne, co wychodzi, postąpimy inaczej, według przepisu z rysunku 3. Rozcinamy trójkąt wzdłuż linii przerywanej i rozsuwamy powstałe części, pamiętając, że w rzeczywistości przerywane krawędzie są skleione wzdłuż strzałek podpisanych β . Następnie sklejamy trójkąty wzdłuż krawędzi α i widzimy już, że mamy do czynienia ze wstęgą Möbiusa — obiektem powstałym z paska papieru poprzez sklejenie ze zmianą orientacji pary przeciwległych krawędzi. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie.



Rys. 2. $P_2(S^1)$



Rys. 3. $P_2(S^1)$ jest wstęgą Möbiusa

Twierdzenie. *Przestrzeń co najwyżej dwuelementowych podzbiorów okręgu, $P_2(S^1)$, jest topologicznie równoważna ze wstęgą Möbiusa. Przestrzeń podzbiorów jednoelementowych $P_1(S^1)$ jest w niej zawarta jako okrąg brzegowy wstęgi.*

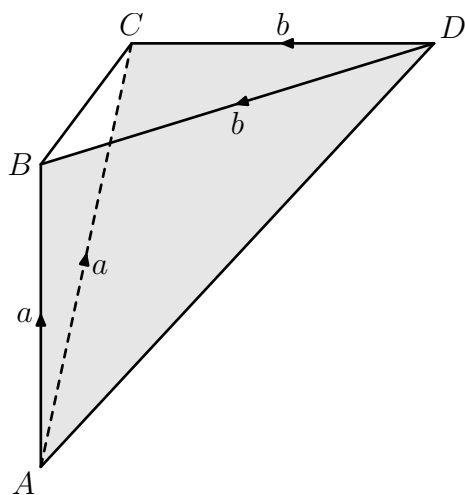
Aby otrzymać drugie z powyższych stwierdzeń wystarczy prześledzić położenie punktów (x, x) w czasie procedury rozcinania i sklejanja.

Dla rozrywki Czytelnika Wyrafinowanego naszkicujemy inny argument. Przez dwa dane punkty na okręgu prowadzimy prostą (jeżeli punkt jest tylko jeden, rysujemy styczną w tym punkcie). Kierunek tej prostej wyznacza element w jednowymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbf{R}P^1$, topologicznie równoważnej z S^1 . W ten sposób zdefiniowaliśmy ciągle odwzorowanie $P_2(S^1) \rightarrow S^1$.

Przesuwając ustaloną prostą równolegle widzimy, że włókno tego przekształcenia (przeciwbraz dowolnego punktu) jest odcinkiem. Zatem przestrzeń $P_2(S^1)$ jest topologicznie równoważna z wiązką odcinków nad okręgiem. Są tylko dwie takie wiązki: walec $S^1 \times I$ i właśnie wstęga Möbiusa. Czytelnik, który dojrzał do tego etapu rozumowania, łatwo wyeliminuje pierwszą możliwość.

Po tej rozgrzewce rozważmy przestrzeń złożone z trzech punktów. Zaczniemy od odcinka i jego trójelementowych podzbiorów $P_3(I)$. Każdy 3-, 2- lub 1-elementowy podzbiór odcinka można zapisać w postaci trójki uporządkowanej, jednak w przypadku podzbiorów 2-elementowych $\{x, z\}$ można to zrobić na dwa sposoby (x, x, z) i (x, z, z) , które musimy utożsamić. Mamy więc

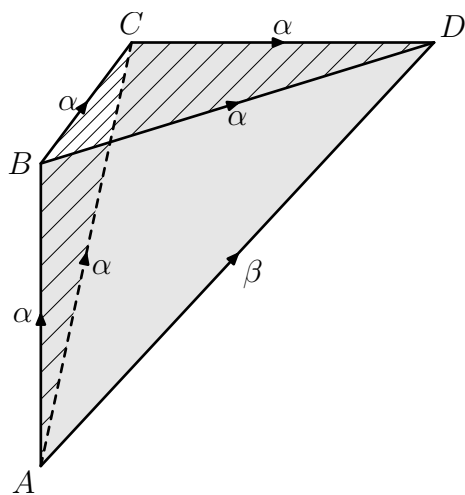
$$P_3(I) = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\} / (x, x, z) \sim (x, z, z).$$



Rys. 4. $P_3(I)$

Zbiór $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ jest czworościanem o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (1, 1, 1)$. Przestrzeń $P_3(I)$ powstaje więc z tego czworościanu poprzez utożsamienie ściany ABD (punkty postaci (x, x, z)) ze ścianą ACD (punkty postaci (x, z, z)) w taki sposób, że wierzchołek B przechodzi na C , krawędź AB na AC a krawędź BD na CD , jak na rysunku 4. Efekt końcowy łatwo uzyskać, jeśli wyobrazimy sobie, że cały czworościan jest z gumy, po czym wierzchołek C obrócimy wokół osi AD aż zacienione ściany nałożą się na siebie. Otrzymujemy bryłę wyglądającą jak dwa pełne stożki o wierzchołkach A i D , sklejone podstawami. Topologicznie jest to zwykła kula. Przestrzeń podzbiorów jednoelementowych postaci (x, x, x) jest w niej położona jako średnica AD . Na marginesie, bardziej zaawansowany Czytelnik może wywnioskować stąd (jak?), że docelowa przestrzeń $P_3(S^1)$ jest trójwymiarową rozmaitością (czyli każdy jej punkt ma otoczenie, które jest otwartą kulą).

Przestrzeń $P_3(S^1)$ możemy teraz uzyskać utożsamiając, jak poprzednio, punkty 0 i 1. Mamy zatem:



Rys. 5. $P_3(S^1)$

$$P_3(S^1) = P_3(I) / (0, y, z) \sim (y, z, 1).$$

Tak więc $P_3(S^1)$ powstaje z czworościanu $ABCD$ poprzez sklejenie ścian ABD i ACD (jak w $P_3(I)$) oraz dodatkowo ściany ABC (punkty postaci $(0, y, z)$) ze ścianą BCD (punkty postaci $(y, z, 1)$) w taki sposób że krawędzie AB, BC, CA zostają sklejone, kolejno, z krawędziami BC, CD, DB , co zaznaczone zostało na rysunku 5. To drugie utożsamienie znacząco komplikuje sprawę. Nasze poprzednie techniki — rozcinanie, sklejanie czy budowanie modeli — mogą okazać się niewystarczające.

W rzeczywistości odpowiedzi na pytanie czym jest $P_3(S^1)$ udzielili jako pierwsi Karol Borsuk (1905-1982) i Raoul Bott (1923-2005). Tego pierwszego nie trzeba chyba polskiemu Czytelnikowi specjalnie przedstawiać. Dość powiedzieć, że we współczesnej matematyce jest on znany m.in. z definicji korozwłóknienia a także z hipotezy Borsuka (Czy każdy zbiór wypukły w \mathbf{R}^d

można podzielić na $d + 1$ zbiorów o mniejszych średnicach?), rozstrzygniętej negatywnie w roku 1993 oraz z twierdzenia Borsuka-Ulana, którego popularne sformułowanie stanowi, iż w każdej chwili istnieją na powierzchni Ziemi dwa punkty antypodyczne w których panuje ta sama temperatura i ciśnienie. Z kolei matematyk węgierskiego pochodzenia Raoul Bott był jednym z czołowych przedstawicieli nowoczesnej topologii algebraicznej, kojarzonym głównie ze słynnym, z początku zaskakującym twierdzeniem o periodyczności dla grupy unitarnej, które okazało się wkrótce po udowodnieniu odegrać zasadniczą rolę w rodzącej się akurat K -teorii.

Historia odpowiedzi, jakiej udzielili Borsuk i Bott, jest równie ciekawa, jak sama odpowiedź. W 1949 Borsuk opublikował pracę [1], w której pokazał, że $P_3(S^1)$ jest topologicznie równoważna z produktem $S^2 \times S^1$ zwykłej sfery i okręgu. Trzy lata później w Fundamenta ukazała się praca Botta [2], mająca formę listu do Borsuka i zaczynająca się od słów (oznaczenia oryginalne):

In your paper *On the third symmetric potency of the circumference* (...) you assert that the third symmetric potency of $S_1^{(3)}$ of the circle S_1 is homeomorphic to the Cartesian product of S_1 and the two sphere S_2 . (...). But in fact the identification you have made is incorrect and in consequence your final conclusion (...) is false. A quite simple and short argument shows that $S_1^{(3)}$ has a vanishing fundamental group whence (...) $S_1^{(3)}$ is a simply connected lenspace, *i.e.* the three sphere S_3 .

A zatem praca Borsuka zawiera błąd i prawidłowa odpowiedź powinna brzmieć:

Twierdzenie. *Przestrzeń $P_3(S^1)$ jest topologicznie równoważna ze sferą trójwymiarową S^3 .*

Jeśli Czytelnika przechodzą ciarki na samą myśl o trójwymiarowej sferze, to najłatwiej będzie myśleć o niej, przez analogię z niżej-wymiarowymi odpowiednikami, jak o przestrzeni \mathbf{R}^3 z dodatkowym "punktem w nieskończoności".

W tym miejscu Czytelnikowi należy się wyjaśnienie, a Karolowi Borsukowi usprawiedliwienie. Otóż praca Borsuka, choć skomplikowana, jest zasadniczo poprawna, a błąd wkradł się dopiero pod sam koniec rozumowania. Podkreśla to zresztą sam Bott, który poprawia tylko końcówkę dowodu Borsuka. Mianowicie po dłuższych przekształceniach Borsuk dochodzi do wniosku, że interesująca nas przestrzeń może być otrzymana z dwóch pełnych torusów, których brzegi są w pewien sposób utożsamione. Problem w tym, że w grę wchodzi dwa możliwe sposoby sklejenia takich torusów: południki jednego utożsamiamy z południkami albo z równoleżnikami drugiego. W pierwszym przypadku otrzymujemy właśnie $S^2 \times S^1$ (co widać dość łatwo), a w drugim S^3 (co już nieco trudniej).

Czytelnik obeznany choć trochę z podstawowymi zakłębieniami topologii algebraicznej może samodzielnie sprawdzić, kto ma rację. Choć nasz opis $P_3(S^1)$ jako przestrzeni ilorazowej czworoscianu $ABCD$ jest trudny koncepcyjnie, jednak świetnie sprawdza się jako jej rozkład komórkowy (bardzo ściśle: rozkład jako Δ -kompleks). Nadaje się przez to do liczenia takich niezmienników topologicznych jak grupa podstawowa i grupy homologii. Wyznamy zatem, podobnie jak zrobił to Bott, grupę podstawową $\pi_1(P_3(S^1))$ przestrzeni $P_3(S^1)$. Zaczniemy od szybkiego przypomnienia (lub, jak kto woli, wprowadzenia) definicji. Grupa podstawowa przestrzeni X jest generowana przez wszystkie pętle (funkcje ciągłe $f : S^1 \rightarrow X$) zaczepione w wyróżnionym punkcie x_0 (to znaczy $f(1) = x_0$). Dwie pętle f i g utożsamiamy, jeśli jedną można w sposób ciągły zdeformować w drugą, czyli istnieje cała rodzina pętli przechodzących w sposób ciągły z f do g . Fachowo mówimy, że takie pętle są homotopijne. Elementami grupy podstawowej $\pi_1(X)$ są zatem klasy równoważności relacji homotopii.

Wszystko to brzmi bardzo naukowo, ale jeśli dysponujemy rozkładem komórkowym przestrzeni, to grupę podstawową możemy opisać bardzo łatwo. Po pierwsze, wystarczy ograniczyć się do pętli tworzących jednowymiarowy szkielet tego rozkładu. W naszym przykładzie mamy dwie takie pętle, α i β (pamiętajmy, że skleiliśmy punkty A, B, C i D). Każda ściana dwuwymiarowa ogranicza, a przez to trywializuje, pewną pętlę — taka pętla może być ściągnięta do punktu, a więc pętli trywialnej, poprzez deformację prowadzącą cały czas po wybranej ścianie. Z Rysunku 5 odczytujemy, że ściana ABD (a także ACD) ma na swym brzegu pętlę $\alpha\alpha\beta^{-1} = \alpha^2\beta^{-1}$, a ściana ABC (a także BCD) ogranicza pętlę $\alpha\alpha\alpha^{-1} = \alpha$. Wobec tego w grupie $\pi_1(P_3(S^1))$, generowanej przez dwa elementy α, β , zachodzą relacje $\alpha^2\beta^{-1} = 1$ oraz $\alpha = 1$, co zapisujemy

$$\pi_1(P_3(S^1)) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha = 1, \alpha^2\beta^{-1} = 1 \rangle.$$

Zatem $\alpha = 1$ oraz $\beta = \alpha^2 = 1$, więc ta grupa jest trywialna. To już wystarczy, aby wykluczyć odpowiedź $S^2 \times S^1$, bo grupa podstawowa tej ostatniej przestrzeni to \mathbf{Z} . Co więcej, Czytelnik Nowoczesny, który ponadto sprawdził, że $P_3(S^1)$ jest rozmaitością, już wie, że musi to być sfera S^3 . Jest to wniosek z Hipotezy Poincarégo w wymiarze 3, jednego z siedmiu problemów milenijnych, udowodnionej niedawno przez Grigorija Perelmana. Głosi ona dokładnie, że S^3 jest jedyną trójwymiarową rozmaitością o trywialnej grupie podstawowej. Wobec tego poprawka Botta jest jak najbardziej słuszna.

Zajmijmy się wobec tego innym intrygującym pytaniem. Wiemy już, że $P_3(S^1)$ jest sferą S^3 , czyli przestrzenią trójwymiarową \mathbf{R}^3 uzavzoną jednym dodatkowym punktem. Znajduje się w niej podprzestrzeń $P_1(S^1)$ złożona z podzbiorów jednoelementowych. Pamiętamy jednak, że $P_1(S^1) = S^1$ jest okręgiem, a okrąg zanurzony w \mathbf{R}^3 to inaczej węzeł. Jaki to węzeł?

Odpowiedź na to pytanie można znaleźć na przykład w nowej pracy Jacoba Mostovoy'a [3]. Aby zachęcić Czytelnika do przeczytania tej krótkiej notki, powiedzmy tylko, że Mostovoy podaje jawny, analityczny wzór, który zadaje równoważność pomiędzy przestrzeniami $P_3(S^1)$ i S^3 . Mając taki wzór można wyprowadzić równanie, które spełnia w S^3 podzbiór $P_1(S^1)$. Podamy od razu wynik. Otóż jeśli sferę S^3 utożsamimy ze zbiorem

$$\{(u, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} : |u|^2 + |w|^2 = 1\},$$

to podzbiór $P_1(S^1)$ spełnia równanie $u^3 = w^2$. Po przeskalowaniu można go też przedstawić przy pomocy parametryzacji

$$S^1 \ni z \rightarrow (z^2, z^3) \in S^1 \times S^1 \subset S^3,$$

a więc szukany przez nas węzeł jest położony na torusie $S^1 \times S^1$ w taki sposób, że obiega torus dwukrotnie w kierunku równoleżnikowym i trzykrotnie w kierunku południkowym, jak na rysunku 6. Taki węzeł nazywa się fachowo $(2, 3)$ -węzłem torusowym (analogicznie definiujemy (p, q) -węzły torusowe). Ten konkretny węzeł to najprostszy z nietrywialnych węzłów, zwany *trójlistnikiem*.

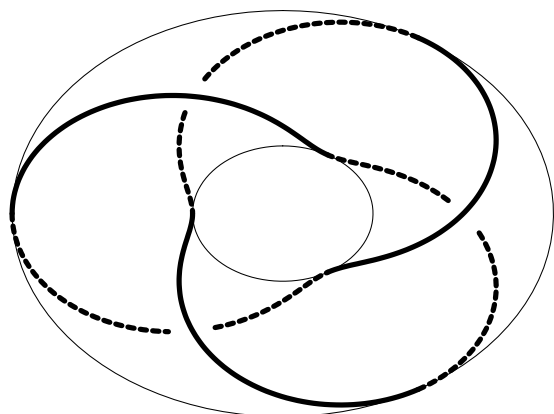
Zamiast reprodukować tutaj argument Mostovoy'a, który Czytelnik może samodzielnie przeanalizować, podamy inny dowód twierdzenia o trójlistniku, w którym wykorzystamy to, czego nauczyliśmy się już o grupie podstawowej. Obliczymy mianowicie *grupę węzła*. Jest to niezmiennik zdefiniowany dla dowolnego węzła K jako

$$\pi_1(S^3 \setminus K)$$

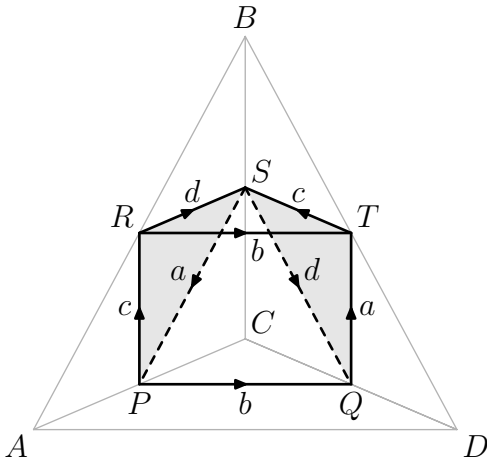
czyli grupa podstawowa tego, co zostaje po usunięciu węzła z przestrzeni.

W naszym zadaniu sferę S^3 reprezentuje czworościan $ABCD$ z odpowiednimi utożsamieniami ścian (Rys. 5), a interesujący nas węzeł K jest w nim zawarty jako zbiór punktów postaci (x, x, x) , czyli odcinek $\beta = AD$. Usunięcie węzła K w tym modelu polega zatem na usunięciu odcinka β oraz wierzchołków B i C (bo reprezentują one ten sam punkt, co A i D).

Aby otrzymać przestrzeń o porządnej triangulacji wygodniej będzie usunąć węzeł K razem z małym otwartym otoczeniem. W naszym modelu realizujemy ten krok usuwając małą pryzmę wzdłuż odcinka β oraz małe czworościenne czapeczki wokół wierzchołków B, C . Wreszcie nic nie stoi na przeszkodzie aby poprzez ciągłą deformację powiększyć te otoczenia i zastąpić słowo „małe” przez „sięgające aż do połowy krawędzi α ”. Pozostanie wówczas bryła z rysunku 7 — ostrosłup o podstawie $PRTQ$ i wierzchołku S . Utożsamienia w czworościanie $ABCD$ przekładają się na utożsamienia ścian i krawędzi tego ostrosłupa zaznaczone na rysunku (proszę sprawdzić!). Każda z jednowymiarowych komórek a, b, c, d jest w wynikowej przestrzeni okręgiem, zatem stanowią one generatory grupy podstawowej $\pi_1(S^3 \setminus K)$. Tak jak poprzednio, wypiszemy relacje zachodzące w tej grupie:



Rys. 6. Trójlistnik



Rys. 7

- ściana górna RTS : $bcd^{-1} = 1$,
- ściana przednia $QTRP$: $ab^{-1}c^{-1}b = 1$,
- ściana lewa SPR (a także prawa QTS): $acd = 1$,
- ściana tylna SPQ : $abd^{-1} = 1$.

Z pierwszej relacji mamy $c = b^{-1}d$, zaś z drugiej

$$a = b^{-1}cb = b^{-1}b^{-1}db = b^{-2}db.$$

Trzecia relacja przyjmuje postać

$$1 = acd = b^{-2}dbb^{-1}dd = b^{-2}d^3,$$

a zatem $b^2 = d^3$. Ostatnia relacja okazuje się wynikać z poprzednich, bo mamy:

$$1 = abd^{-1} = b^{-2}dbbd^{-1} = b^{-2}db^2d^{-1} = b^{-2}dd^3d^{-1} = b^{-2}d^3 = 1.$$

Ostatecznie więc poszukiwana grupa podstawowa jest generowana przez dwa elementy b, d z jedną relacją $b^2 = d^3$:

$$\pi_1(P_3(S^1) \setminus P_1(S^1)) = \langle b, d \mid b^2 = d^3 \rangle.$$

Ta grupa jest dobrze znana. Jest to tak zwana grupa warkoczy o 3 pasmach. Z pierwszych stron podręczników o teorii węzłów dowiemy się, że właśnie taką grupę ma trójlistnik (ogólnie w grupie każdego (p, q) -węzła torusowego zachodzi jedyna relacja $x^p = y^q$). Czy stąd już wynika, że nasz węzeł jest trójlistnikiem? W ogólności sprawa jest delikatna, ponieważ dwa różne węzły mogą mieć takie same grupy (znane są jawne przykłady takich par). Tym razem jednak mamy szczęście, ponieważ trójlistnik, a także każdy (p, q) -węzeł torusowy, jest jednoznacznie wyznaczony przez swoją grupę, co pokazali w pełnej ogólności Burde i Zieschang. Twierdzenie jest zatem udowodnione.

Na tym kończy się ta opowieść, w której rozcinaliśmy i sklejaliliśmy dwuwymiarowe powierzchnie, spotkaliśmy wstęgę Möbiusa, nauczyliśmy się obliczać grupę podstawową przestrzeni, skonstruowaliśmy nietypowy model sfery S^3 , zastosowaliśmy Hipotezę Poincarégo, rysowaliśmy węzły na torusie, a na koniec poznaliśmy i obliczyliśmy teoriogrupowy niezmiennik węzła. A wszystko to wzięło się z niepozornie wyglądającego problemu. Na koniec podsumujemy nasze osiągnięcia w postaci twierdzenia.

Twierdzenie (Borsuk-Bott-Czytelnik-Mostovoy). *Przestrzeń co najwyżej trójelementowych podzbiorów okręgu, $P_3(S^1)$, jest topologicznie równoważna ze sferą trójwymiarową S^3 . Podprzestrzeń $P_1(S^1)$ jest w niej zawarta jako trójlistnik a przestrzeń $P_2(S^1)$ jako wstęga Möbiusa, której brzegiem jest ten trójlistnik.*

Apropos, jak wygląda wstęga Möbiusa, której brzegiem jest trójlistnik?

Podziękowania

Artykuł powstał przy wsparciu Centre for Discrete Mathematics and its Applications (EPSRC grant EP/D063191/1).

Literatura

- [1] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math. 36 (1949) 236-244,
- [2] R. Bott, *On the third symmetric potency of S_1* , Fund. Math. 39 (1952) 264-268,
- [3] J. Mostovoy, *Lattices in \mathbf{C} and Finite Subsets of a Circle*, Amer. Math. Monthly 111 (2004), no. 4, 357-360.