Pamiętajmy o Leszku Szczerbie

Marek KORDOS, Warszawa

W lipcu 2010 roku zmarł Leszek Szczerba – jeden z Ojców Założycieli Ośrodka Kultury Matematycznej w Mordach. Warto wspomnieć o Nim na łamach *Matematyki-Społeczeństwa-Nauczania*, tym bardziej że Jego stan zdrowia uniemożliwiał Mu przez ostatnich kilka lat uczestniczenie w Szkołach Matematyki Poglądowej.

Pomysł stworzenia Ośrodka Kultury Matematycznej powstał w pociągu relacji Toruń–Warszawa, gdzieś w okolicach Kutna, we wrześniu 1987 roku. Wracaliśmy z egzaminu doktorskiego na toruńskim uniwersytecie. Leszek, który miał (czasami krępujący) zwyczaj głośnego fantazjowania podczas jazdy pociągiem, snuł rozważania na temat przeróżnych zalet uczelni siedleckiej, w której podjął pracę bodajże rok wcześniej. Była mowa o niechęci do przejęcia przez Wyższą Szkołę Rolniczo–Pedagogiczną im. Georgi Dymitrowa pałacyku carskiego gubernatora (z czasów, gdy Warszawa była miastem guberni siedleckiej), o malowniczym (zdobionym wielokolorowymi płaskorzeźbami) więzieniu, o rekreacyjnych walorach okolicy i o pałacu w Mordach, który – po kompletnym zdewastowaniu go przez technikum rolnicze – został, wraz z ogromnym parkiem, gorzelnią i browarem (nieczynnymi, niestety), przekazany siedleckiej uczelni. Tu Leszek się zatrzymał i zaproponował, aby zastanowić się nad możliwością wykorzystania tego pałacu na chwałę matematyki – oczywiście siedleckiej, ale też polskiej, a nawet światowej.

Pałac znaliśmy, bo swego czasu były w nim organizowane letnie obozy naukowe dla studentów matematycznych studiów wieczorowych UW. Była to posiadłość wielce romantyczna, czego jakimś fragmentarycznym dowodem może być fakt, że (co najmniej) trzech pracowników naszego wydziału ożeniło się z poznanymi tam bliżej studentkami. A pomysł zrobienia czegoś **dla** matematyki też wydał się nam romantyczny, bo mieliśmy jakiś niesmak związany z coraz bardziej formalizującymi się wykładami na znanych nam uczelniach – gdyby więc spróbować matematykę jakoś uczłowieczyć... Wydawało się też (o czym świadczyło grono współpracowników *Delty*), że istnieje sporo ludzi, którzy – odczuwając podobnie – wzięliby udział w takim przedsięwzięciu. Zanim więc dojechaliśmy do Warszawy, zamierzenie przybrało konkretny kształt: postanowiliśmy zwołać w grudniu konferencję w tej sprawie.

O dziwo, odzew był powszechny (około 50 uczestników z kilkunastu ośrodków akademickich) i trzydniowa konferencja powołała do życia Ośrodek Kultury Matematycznej, a ówczesny rektor WSR-P, Jan Trętowski, podarował Ośrodkowi Pałac w Mordach. Czasy były takie, że do zaistnienia Ośrodka potrzebna była zgoda przeróżnych organizacji (z PZPR na czele), ale dzięki poparciu wiceprezesa PAN, Gerarda Labudy (przygotowanemu przez jego ówczesnego sekretarza, Andrzeja Friszke), wszystko dało się załatwić.

Nie będę teraz opisywał historii OKM. Przypomnę tylko najbardziej – z dzisiejszego punktu widzenia – nietypowe fakty.

Postanowiliśmy zorganizować Szkoły Matematyki Poglądowej, których założeniem było kształcenie młodych pracowników nauki w demonstrowaniu na prowadzonych zajęciach matematyki niekryjącej się za formalizmami, powiązanej zarówno ze swą historią, jak też z całokształtem cywilizacji i kultury. Uczestnicy Szkół mogą ocenić, na ile realizowaliśmy te zamierzenia. Nie sposób nie przypomnieć o warunkach, w jakich odbywały się początkowe Szkoły. Szczególnie „niedzisiejsze” były warunki zimowych Szkół w Zawadach, gdzie śnieg padał (w niektórych miejscach) do wnętrza baraku, na posiłki biegało się do szopy, gdzie mieściła się jednorazowo tylko 1/3 uczestników, a spało się w wieloosobowych pokojach. Musiało jednak być w tych Szkołach coś pociągającego, skoro chętnych nie brakowało. Szkoły były też w Siedlcach, Miętnem, aż trafiły do rajskich Grzegorzewic.

Drugą formą działania OKM były imprezy wyjazdowe. Postanowiliśmy, że w rozmaitych uczelniach i ośrodkach doskonalenia nauczycieli będziemy organizowali jedno-, dwu- lub trzydniowe imprezy dla zachęcenia ich słuchaczy do prowadzenia podobnych dla swoich kolegów i uczniów. W ciągu dwóch lat (1988–9) przeprowadziliśmy takich imprez ponad 100, żądając za ich przeprowadzenie zwrotu kosztów podróży. Kilka początkowych zrobiliśmy tak, że poza wykładającymi przyjeżdżali też inni członkowie OKM, aby przedyskutować, czy impreza była przeprowadzona poprawnie – na pierwszą taką imprezę (w Lublinie), gdzie mieliśmy cztery odczyty, przyjechało nas (już na własny koszt) dziesięcioro. To działanie nie przyniosło jednak zadowalających rezultatów – nie doczekaliśmy się licznego potomstwa.

Kolejny nurt to upowszechnienie historii matematyki. Dziś w każdej uczelni jest wykładany taki przedmiot i trudno uwierzyć, że tak nie było zawsze.

Wreszcie zeszyty *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* – jak widać, jest ich już 46, a autorami byli najwybitniejsi, z Riemannem włącznie.

Tyle o działaniach Leszka (i, oczywiście, całego zespołu) w OKM. Ale Leszek był przede wszystkim matematykiem.

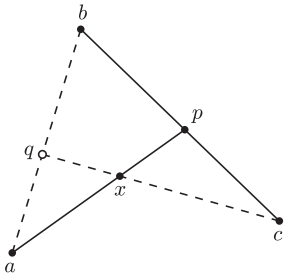
Bliżej poznałem Leszka w 1961 roku, gdy razem uczestniczyliśmy w odbywającym się w Krakowie Zjeździe Matematycznych Kół Naukowych. Zajmowaliśmy się wówczas podstawami geometrii – działem nieistniejącej już (praktycznie) dyscypliny badającej strukturę teorii matematycznych i własności ich modeli. Konkretnie prace nasze „napędzał” Alfred Tarski, mający wyjątkowy (u tak wybitnego uczonego) dar stawiania nietrafnych hipotez – obalanie ich było (z racji na jego rangę) zawsze publikowalne i mamy z Leszkiem kilka wspólnych prac tego typu. Napisaliśmy też wspólnie grubą (raczej niezbyt dobrą) książkę, której tytuł pominę.

Leszek zawsze imponował mi swoją matematyczną błyskotliwością. Było to tym bardziej uderzające, że w innych zakresach był notorycznym blagierem (stąd speleologiczny przydomek *Wspanialec*), a charakter miał (najdelikatniej mówiąc) trudny.

Na XLII Szkole przedstawiłem jego – moim zdaniem najwybitniejszą – pracę, jako przykład niebanalnego, interdyscyplinarnego, zaskakującego rozumowania (Leszek w owym czasie nie mógł nawet wysłuchać mojego odczytu). Najpierw kilka słów o źródłach tej pracy.

Jak (prawie) wszyscy wiedzą, pierwsza usterka w *Elementach* Euklidesa została znaleziona dopiero pod koniec XIX stulecia. Okazało się bowiem, że pojęcie odcinka jest w *Elementach* czysto intuicyjne – to, czy punkt na prostej leży w danym odcinku, czy poza nim, było określane zawsze prawidłowo, ale w tym dedukcyjnym dziele nie było podstaw, aby owo położenie z czegoś wywnioskować. Spostrzeżenie to jest autorstwa Moritza Pascha i zostało opublikowane w jego *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882). W tejże monografii podany jest „brakujący” aksjomat, zwany od tej pory aksjomatem Pascha i obecny nie tylko w podręcznikach geometrii, ale i topologii. Głosi on, że
prosta przecinająca jeden z boków trójkąta i nieprzechodząca przez żaden jego wierzchołek przecina jeszcze jeden jego bok.
W topologii za jego pomocą stwierdza się, że prosta rozcina płaszczyznę na dwie spójne części.

Jak łatwo zauważyć, aksjomat Pascha nie tylko określa porządek, lecz także wymiar – w sposób oczywisty nie może on być większy niż 2. Pedantyczność charakterystyczna dla podstaw geometrii kazała zastanowić się, czy tych dwóch spraw nie można by rozdzielić. Propozycję wydzielenia części porządkowej podał w 1909 roku Friedrich Schur (profesor uniwersytetów w Poznaniu i Wrocławiu) w postaci, którą można odczytać jako zdanie
wnętrze trójkąta nie zależy od porządku wierzchołków,



a które formalnie wygląda tak

$$\forall abcpx\, \exists q\ \mathrm{B}(axp) \wedge \mathrm{B}(bpc) \to \mathrm{B}(aqb) \wedge \mathrm{B}(cxq),$$

gdzie $\mathrm{B}(xyz)$ oznacza, że punkt y jest punktem odcinka xz – rysunek na marginesie. Obalając hipotezę Tarskiego, że porządek musi być zamieszany w wymiar (gdy nie mówimy o przystawaniu), jako część „czystowymiarową" zaproponowałem ($\mathrm{L}(xyz)$ oznacza, że te punkty są współliniowe),

$$\forall abcd\, \exists x\ (\mathrm{L}(abx) \wedge \mathrm{L}(cdx)) \vee (\mathrm{L}(acx) \wedge \mathrm{L}(bdx)) \vee (\mathrm{L}(adx) \wedge \mathrm{L}(bcx)),$$

co dało mi satysfakcję wygłoszenia dowodu, że koniunkcja tych dwóch zdań zastępuje aksjomat Pascha, w Collegium Maius na rzeczonym Zjeździe.

Pozostało pytanie, czy w zaproponowanych zdaniach nie kryją się jednak jakieś fakty, które są już zawarte również w innych aksjomatach. W przypadku aksjomatu wymiarowego dowód był trywialny, ale z aksjomatem podanym przez Schura (a zwanym zewnętrznym aksjomatem Pascha) było trudniej. I tego dotyczyła praca Leszka, którą chcę zreferować.

Ponoć od Adama Bieleckiego pochodzi sentencja: *każde twierdzenie ma powód i dowód – gdy znamy powód, dowód już nie jest istotny.* Tu nie będziemy stosować się do niej.

Ale najpierw zdarzenie, które było powodem zawartego w niej twierdzenia. Otóż Leszek wspólnie z Wolframem Schwabhauserem udowodnili pewnego razu twierdzenie (dotyczyło ono istnienia dla geometrii tak zwanej aksjomatyki $\Pi\Sigma$, co ma związek z twierdzeniem Łosia–Suszki o sumowaniu modeli, ale to tutaj nie ma żadnego znaczenia). Po zreferowaniu go na seminarium okazało się, że można podać prosty, niebudzący wątpliwości kontrprzykład. Zatem owo twierdzenie twierdzeniem nie było. Ale w dowodzie nie sposób było znaleźć błędu. Każdy wyrzuciłby to twierdzenie i nie zawracałby sobie nim głowy. Ale nie Leszek. On zaczął podejrzewać o fałszywość po kolei każdą, nawet najoczywistszą – wydawałoby się – użytą w nim przesłankę. Po prawie roku analiza ta przyniosła sukces. Przesłanką, która zawiodła, było stwierdzenie
podprzestrzeń przestrzeni liniowej ma nie większy od niej wymiar.

Gdzie leży niesłuszność tego argumentu? Okazuje się, że w nieprecyzyjności pojęcia *podprzestrzeń.* Jest to zresztą skutek ogólnego braku dopracowania logicznego pojęć dotyczących struktur wielosortowych. Trzymając się tego przykładu, zauważmy, że na ogół przez podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$ rozumiemy $\langle V', \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$, gdzie $V' \subset V$. Czyli zmniejszamy zbiór wektorów, podczas gdy ciało pozostawiamy bez zmian. I wtedy wszystko jest w porządku. Tymczasem można za podprzestrzeń $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot\rangle$ uważać $\langle V', \mathfrak{F}', +, \cdot\rangle$, gdzie także $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ – i tak zrobili Leszek i Wolfram. Ale wtedy użyta przesłanka jest nieprawdziwa. Bardzo dobitnym przykładem jest tu fakt, że $\mathbb{R}$, jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, jest, oczywiście, wymiaru 1, a nad $\mathbb{Q}$ – wymiaru nieskończonego $\mathfrak{c}$. Zapewne każdy zetknął się z realizującą tę sytuację bazą Hamela. I znów – każdy odkrywszy tak zakamuflowany błąd rozumowania wzniósłby może toast kielichem drogiego szampana i dał spokój, ale nie Leszek. Jak dyrektor teatru w dickensowskim *Magazynie osobliwości*, który znalazłszy wspaniałą miedzianą miednicę musiał włączyć ją do granej sztuki, tak Leszek musiał to odkrycie wykorzystać w swoich badaniach.

Równanie Cauchy'ego to równanie funkcyjne. Poszukuje się w nim funkcji $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunek

$$\forall xy\ f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Założenie jakiejkolwiek regularności funkcji prowadzi do wniosku, że

$$f(x) = \alpha \cdot x,\ \text{dla pewnego ustalonego } \alpha.$$

Takie rozwiązanie nazywa się trywialnym.

Skąd się wzięła baza Hamela? Otóż została ona stworzona, by pokazać, jak mogą wyglądać nietrywialne rozwiązania równania Cauchy'ego. Okazało się, że są one potworne: nie tylko są nieciągłe, ale też niemierzalne, w żadnym przedziale nieograniczone (nawet z jednej strony) itd., itp. Leszek spojrzał na to, jak na zakłócenie porządku i tak powstała praca *Independece of Pasch's Axiom*, którą już teraz mogę zrelacjonować.

Pokazuje ona, że możliwa jest geometria, w której porządek na każdej z prostych jest porządny (jak na porządek przystało), a mimo to na płaszczyźnie jest chaotyczny, czyli sprzeczny z aksjomatem Pascha.

Budujemy zatem w $\mathbb{R}^2$ geometrię, w której przystawanie będzie takie, jak na płaszczyźnie euklidesowej (oznaczanej dalej przez $\mathbb{E}^2$), porządek na każdej prostej też taki, jak w $\mathbb{E}^2$, a aksjomat Pascha nie będzie spełniony.

Przypomnijmy, jak wygląda baza Hamela i jak się jej używa. Dowolną liczbę rzeczywistą przedstawiamy jako pozaskończoną sumę

$$x = x_0 \cdot b_0 + \sum_\alpha x_\alpha \cdot b_\alpha,$$

Oczywiście, do skonstruowania bazy Hamela niezbędny jest pewnik wyboru.

gdzie x_0 i wszystkie x_α są liczbami wymiernymi, natomiast kolejne elementy bazy wybieramy (dowolnie) spośród tych liczb rzeczywistych, które nie są kombinacjami liniowymi o współczynnikach wymiernych dotychczas wybranych elementów. Tutaj posłużymy się jedną tylko bazą, w której

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_2 = \sqrt[4]{2},$$

a pozostałe elementy zostały dowolnie ustalone.

Wygodnie będzie też używać *stożka dodatniości* (oznaczymy go P), który oznaczać będzie zbiór wszystkich liczb nieujemnych.

Z obraną przez nas bazą Hamela związana będzie operacja

$$f: \quad f(x) = x_0 - \sum_\alpha x_\alpha \cdot b_\alpha.$$

Oznaczmy

$$\mathrm{P}^\star: \quad x \in \mathrm{P}^\star \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{P},$$

np. $\sqrt{2} \notin \mathrm{P}^\star$, $-\sqrt{2} \in \mathrm{P}^\star$, $-\sqrt[4]{2} \in \mathrm{P}^\star$. Nietrudno zauważyć, że

$$x, y \in \mathrm{P}^\star \to x + y \in \mathrm{P}^\star \quad \text{i} \quad x, y \notin \mathrm{P}^\star \to x + y \notin \mathrm{P}^\star,$$

bo dodawanie odbywa się „po współrzędnych".

Stąd wniosek, że f jest izomorfizmem $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P} \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, \mathrm{P}^\star \rangle$.

Ale jednak $\mathfrak{R} := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathrm{P} \rangle$ i $\mathfrak{R}^\star := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathrm{P}^\star \rangle$ nie są izomorficzne, bo np. $(-\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} \notin \mathrm{P}^\star$, czyli $(\mathrm{P}^\star)^2 \not\subset \mathrm{P}^\star$.
Wprowadźmy wobec tego odmienne pojęcie modułu:

$$|x|^\star = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in \mathrm{P}^\star, \\ -x, & \text{gdy } x \notin \mathrm{P}^\star. \end{cases}$$

Okazuje się, że ma on bardzo regularne własności:

$$|x| = |y| \leftrightarrow |x|^\star = |y|^\star,$$

bo każda z tych równości ma miejsce, gdy x i y różnią się co najwyżej znakami.
Mamy więc

$$\big||x|\big|^\star = |x|^\star \quad \text{i} \quad \big||x|^\star\big| = |x|.$$

Z kolei w $\mathbb{R}^2$ wprowadzimy inną normę

$$\|a\|^\star := |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|^\star$$

Zauważmy, że podobnie jak dla modułu mamy

$$(*) \qquad \|a\| = \|b\| \leftrightarrow \|a\|^\star = \|b\|^\star,$$

i

$$\big|\|a\|\big|^\star = \|a\|^\star \quad \text{i} \quad \big|\|a\|^\star\big| = |a|.$$

Po tym algebraicznym wstępie możemy przejść do geometrii. Powszechnie wiadomo, że do jej opisania wystarczają dwie relacje: relacja leżenia między (betweenness, czyli wspomniana już relacja B) i czteroargumentowa relacja przystawania (equidistance, gdzie D($abcd$) oznacza, że odległość punktów a i b jest taka sama, jak odległość punktów c i d).

W przypadku geometrii jednowymiarowej nad $\mathfrak{R}$ i nad $\mathfrak{R}^\star$ interpretujemy te relacje w oczywisty sposób:

$$\mathrm{B}_1(xyz) \leftrightarrow |x - y| + |y - z| = |x - z| \quad \mathrm{D}_1(xyzt) \leftrightarrow |x - y| = |z - t|$$

oraz

$$\mathrm{B}_1^\star(xyz) \leftrightarrow |x - y|^\star + |y - z|^\star = |x - z|^\star \quad \mathrm{D}_1(xyzt) \leftrightarrow |x - y|^\star = |z - t|^\star.$$

Zwróćmy uwagę, że w tych interpretacjach nieużywane jest mnożenie.

Powoduje to, że
jednowymiarowe geometrie $\mathfrak{E}_1 := \langle \mathbb{R}, \mathrm{B}_1, \mathrm{D}_1 \rangle$ *i* $\mathfrak{E}_1^\star := \langle \mathbb{R}^\star, \mathrm{B}_1^\star, \mathrm{D}_1^\star \rangle$ *są izomorficzne,* jako struktury jednakowo określone nad izomorficznymi algebrami.

Analogicznie określimy geometrie dwuwymiarowe $\mathfrak{E}_2 := \langle \mathbb{R}^2, \mathrm{B}_2, \mathrm{D}_2 \rangle$ i $\mathfrak{E}_2^\star := \langle (\mathbb{R}^\star)^2, \mathrm{B}_2^\star, \mathrm{D}_2^\star \rangle$, przyjmując

$$\mathrm{B}_2(xyz) \leftrightarrow \|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\| \quad \text{i} \quad \mathrm{D}_2(xyzt) \leftrightarrow \|x-y\| = \|z-t\|$$

oraz

$$\mathrm{B}_2^\star(xyz) \leftrightarrow \|x-y\|^\star + \|y-z\|^\star = \|x-z\|^\star \quad \text{i} \quad \mathrm{D}_2^\star(xyzt) \leftrightarrow \|x-y\|^\star = \|z-t\|^\star.$$

Przydatna też będzie relacja współliniowości L (odp. $\mathrm{L}^\star$), określona w oczywisty sposób dla $\mathfrak{E}_2$ przez warunek

$$(**) \qquad \mathrm{L}(xyz) \leftrightarrow \mathrm{B}_2(xyz) \vee \mathrm{B}_2(yzx) \vee \mathrm{B}_2(zxy),$$

i odpowiednio dla $\mathfrak{E}_2^\star$.

Wobec $(*)$ mamy

$$D_2(xyzt) \leftrightarrow D_2^\star(xyzt).$$

Jednak $\mathfrak{E}_2$ i $\mathfrak{E}_2^\star$ nie są izomorficzne, bo $\mathrm{B}_2 \neq \mathrm{B}_2^\star$, gdyż np. dla $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ i $c = (\sqrt{2}, 0)$ mamy $\mathrm{B}_2(abc)$, a więc $\neg \mathrm{B}_2(cab)$ i równocześnie $\mathrm{B}_2^\star(cab)$.

Natomiast $\mathrm{L} = \mathrm{L}^\star$, co ze względu na to, że definicja L jest alternatywą, ma dowód żmudny, choć – oczywiście – elementarny.

Załóżmy zatem, że zachodzi $\mathrm{L}(abc)$. Wobec $(**)$ możemy bez straty ogólności przyjąć $\mathrm{B}(abc)$. Mamy udowodnić, że

$$\mathrm{L}^\star(abc) \quad \text{czyli} \quad \mathrm{B}_2^\star(abc) \vee \mathrm{B}_2^\star(bca) \vee \mathrm{B}_2^\star(cab).$$

Z definicji B mamy

$$(***) \qquad \|a-b\| + \|b-c\| = \|a-c\|.$$

Rozpatrzyć należy wszystkie przypadki należenia/nienależenia $\|a-b\|$, $\|b-c\|$ i $\|a-c\|$ do $\mathrm{P}^\star$.

Zauważmy, że wobec $(***)$ nie jest możliwe

$$\text{ani } \|a-b\|, \|b-c\| \in \mathrm{P}^\star \wedge \|a-c\| \notin \mathrm{P}^\star,$$
$$\text{ani } \|a-b\|, \|b-c\| \notin \mathrm{P}^\star \wedge \|a-c\| \in \mathrm{P}^\star.$$

Zatem możliwych jest 6 przypadków:

$$\|a-b\|, \|b-c\|, \|a-c\| \in \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(abc);$$
$$\|a-b\|, \|a-c\| \in \mathrm{P}^\star \wedge \|b-c\| \notin \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(acb);$$
$$\|a-c\|, \|b-c\| \in \mathrm{P}^\star \wedge \|a-b\| \notin \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(bac);$$
$$\|a-b\| \in \mathrm{P}^\star \wedge \|b-c\|, \|a-c\| \notin \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(bac);$$
$$\|b-c\| \in \mathrm{P}^\star \wedge \|a-b\|, \|a-c\| \notin \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(acb);$$
$$\|a-b\|, \|b-c\|, \|a-c\| \notin \mathrm{P}^\star, \text{ wtedy } \mathrm{B}_2^\star(abc)$$

– np. w piątym przypadku możemy $(***)$ zapisać jako

$$-\|a-b\|^\star + \|b-c\|^\star = -\|a-c\|^\star,$$

czyli

$$\|a-c\|^\star + \|c-b\|^\star = \|a-b\|^\star, \quad \text{co oznacza} \quad \mathrm{B}_2^\star(acb).$$

Tak więc rzeczywiście $\mathrm{L} = \mathrm{L}^\star$.

Można zatem sformułować

Twierdzenie 1. *Każde zdanie sformułowane w terminach współliniowości* L *i przystawania* D *jest prawdziwe w* $\mathfrak{E}_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w* $\mathfrak{E}^\star$.

Przechodząc do zasadniczego rezultatu przedstawianej pracy, należy zwrócić uwagę na oczywisty fakt, że niezależność jakiegoś aksjomatu to stwierdzenie, że nie daje się on wyprowadzić z pozostałych aksjomatów konkretnej aksjomatyki.

Dla wszystkich uprawiających podstawy geometrii po drugiej wojnie światowej oczywiste było, że najbardziej fundamentalną pracą, do której odnoszono wszystkie wyniki dotyczące geometrii euklidesowej, była aksjomatyka podana przez Alfreda Tarskiego w jego pracach *What is elementary geometry?* i *A decision method for elementary algebra and geometry.* Oto ona.

A 1 $\forall xy\ \mathrm{B}(xyx) \rightarrow x = y$
A 2 $\forall xyzu\ \mathrm{B}(xyu) \wedge \mathrm{B}(yzu) \rightarrow \mathrm{B}(xyz)$
A 3 $\forall xyzu\ \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{B}(xyu) \wedge x \neq y \rightarrow \mathrm{B}(xzu) \vee \mathrm{B}(xuz)$
A 4 $\forall xy\ \mathrm{D}(xyyx)$
A 5 $\forall xyz\ \mathrm{D}(xyzz) \rightarrow x = y$
A 6 $\forall xyzuvw\ \mathrm{D}(xyzu) \wedge \mathrm{D}(zuvw) \rightarrow \mathrm{D}(xyvw)$
A 7 $\forall txyzu\ \exists v\ \mathrm{B}(xtu) \wedge \mathrm{B}(yuz) \rightarrow \mathrm{B}(xvy) \wedge \mathrm{B}(ztv)$
A 8 $\forall txyzu\ \exists vw\ \mathrm{B}(xut) \wedge \mathrm{B}(yuz) \wedge x \neq y \rightarrow \mathrm{B}(xyv) \wedge \mathrm{B}(xzw) \wedge \mathrm{B}(vtw)$
A 9 $\forall xx'yy'zz'uu'\ \mathbf{D}(xyx'y') \wedge \mathbf{D}(yzy'z') \wedge \mathrm{D}(xux'u') \wedge \mathrm{D}(yuy'u') \wedge$
$\wedge \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{B}(x'y'z') \rightarrow \mathrm{D}(zuz'u')$
A10 $\forall xyuv\ \exists z\ \mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{D}(yzuv)$
A11 $\exists xyz\ \neg\mathrm{B}(xyz) \wedge \neg\mathrm{B}(yzx) \wedge \neg\mathrm{B}(zxy)$
A12 $\forall xyzuv\ \mathrm{D}(xuxv) \wedge \mathrm{D}(yuyv) \wedge \mathrm{D}(zuzv) \wedge u \neq v \rightarrow \mathrm{B}(xyz) \vee \mathrm{B}(yzx) \vee \mathrm{B}(zxy)$
A13 $\forall \mathbf{FG}\ \big\{\exists x\ \forall uv\ [u \in \mathbf{F} \wedge v \in \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{B}(xuv)] \rightarrow$
$\rightarrow \exists y\ \forall uv\ [u \in \mathbf{F} \wedge v \in \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{B}(uyv)]\big\}$

Aksjomaty **A 1** – **A 6** nie wymagają komentarzy.
A 7 to aksjomat Pascha w wersji Schura.
A 8 to aksjomat Euklidesa w wersji z bezzasadnej przesłanki użytej przez Legendre'a w dowodzie piątego postulatu Euklidesa. Orzeka on, że przez punkt wewnątrz kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą jego oba ramiona.
A 9 to tzw. aksjomat o pięciu odcinkach. Jest to wersja drugiej cechy przystawania trójkątów.
A10 mówi, że na prostej można odkładać odcinek.
A11 i **A12** opisują wymiar i – odpowiednio – mówią, że istnieją punkty niewspółliniowe, oraz że symetralna odcinka jest prostą.
Wreszcie **A13** to aksjomat ciągłości w wersji Dedekinda, czyli fakt, że przekrój wyznacza na prostej punkt.

Teraz można już sformułować zasadnicze twierdzenie omawianej pracy.

Twierdzenie 2. *$\mathfrak{E}_2^\star$ jest modelem wszystkich aksjomatów* **A 1** – **A13**, *poza* **A 7**.

Dowód. Jako rzecz stwierdzoną ponad wszelką wątpliwość przyjmujemy, że $\mathfrak{E}_2$ jest modelem wszystkich aksjomatów.

Z twierdzenia 1 wynika w szczególności, że w $\mathfrak{E}_2^\star$ i w $\mathfrak{E}_2$ są te same proste, oraz że wszystkie proste w $\mathfrak{E}_2^\star$ są izometryczne. Ponadto na każdej prostej w $\mathfrak{E}_2^\star$ jest porządek izomorficzny z porządkiem na tej prostej w $\mathfrak{E}_2$ (bo każda prosta jest izometryczna z prostą $(0,0)(0,1)$, a ta z kolei z prostą 01 w $\mathfrak{E}_1$ izomertycznym z $\mathfrak{E}_1^\star$).

W świetle tych spostrzeżeń widać, że do sprawdzenia mamy (poza **A 7**) jedynie **A 8**, **A 9** i **A10**, bo pozostałe aksjomaty dotyczą tylko punktów współliniowych lub przystawania.

A 8 można zastąpić kolejną z bezzasadnych przesłanek wykorzystywanych przy próbach dowodzenia piątego postulatu Euklidesa – tym razem użytą przez Farkasa Bolyaia (ojca Janosa):

$$\forall xyz\ \exists t\ \neg\mathrm{L}(xyz) \wedge \mathrm{D}(xtyt) \wedge \mathrm{D}(ytzt),$$

co oznacza, że na dowolnym trójkącie można opisać okrąg, a formułuje się tylko za pomocą L i D.

Odkładanie odcinka (**A10**) można rozbić na przeniesienie go na daną prostą i potem odkładanie odcinka wewnątrz prostej, czyli

$$\forall xyuv\ \exists z\ \mathrm{L}(xyz) \wedge \mathrm{D}(yzuv) \quad \text{i} \quad \forall xyz\ \exists t\ \mathrm{L} \rightarrow \mathrm{B}(xyt) \wedge \mathrm{D}(yzyt),$$

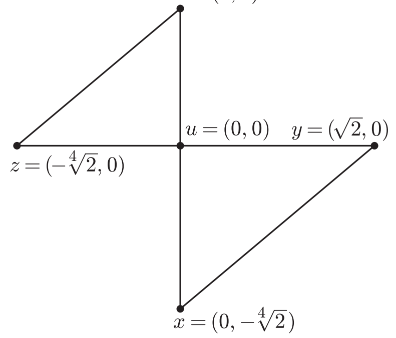
co, jak widać, też formułuje się jedynie za pomocą L i D.

Podobnie postępujemy z aksjomatem o pięciu odcinkach (**A 9**):

$$\forall xyxx'y'z'\mathrm{B}(xyz) \wedge \mathrm{B}(x'y'z') \wedge \mathrm{D}(xyx'y') \wedge \mathrm{D}(yzy'z') \rightarrow \mathrm{D}(xzx'z')$$

i $\forall xx'yy'zz'uu'\ \mathrm{L}(xyz) \wedge x \neq y \wedge \mathrm{D}(xyx'y') \wedge \mathrm{D}(yzy'z') \wedge \mathrm{D}(xzx'z') \wedge$
$\wedge \mathrm{D}(xux'u') \wedge \mathrm{D}(yuy'u') \rightarrow \mathrm{D}(zuz'u')$,

ale to już zwykła dłubanina.



Pozostaje do sprawdzenia, że w $\mathfrak{E}_2^\star$ nie jest spełniony **A 7**. Rozważmy punkty $t = (0, 1)$, $x = (0, -\sqrt[4]{2})$, $y = (\sqrt{2}, 0)$, $z = (-\sqrt[4]{2}, 0)$, $u = (0, 0)$.
Ponieważ $\sqrt{2} <^\star 0 <^\star 1 <^\star -\sqrt[4]{2}$, więc $\mathrm{B}_2^\star(xtu) \wedge \mathrm{B}_2^\star(yuz)$, a tymczasem proste xy i zt są rozłączne, więc skoro $\forall v\ \neg\mathrm{L}(xyv) \vee \neg\mathrm{L}(ztv)$, więc tym bardziej $\neg\big(\mathrm{B}_2^\star(xvy) \wedge \mathrm{B}_2^\star(ztv)\big)$, co kończy dowód.

Wobec totalnego zaniku podstaw matematyki (a już z całą pewnością zaniku powszechnego kształcenia w tym kierunku) wypada przypomnieć, że znalezienie dwóch struktur, w których spełnionych jest jakieś n aksjomatów, i w jednej z nich spełniony jest jeszcze jeden dodatkowy aksjomat, a w drugiej nie, dowodzi niezależności tego dodatkowego aksjomatu od początkowych n.

Sądzę, że nawet dla ludzi, którzy pracują w bardzo odległych od geometrii dziedzinach (i którzy przerzucili tylko ten tekst) jest zaskoczeniem, że tak specyficzny obiekt, jak baza Hamela, może mieć zastosowanie w elementarnej geometrii. I zgodzą się zapewne, że wpadnięcie na taki pomysł i jego realizacja może być dziełem tylko bardzo dojrzałego matematyka.

Może to nietypowe, by jako epitafium przywoływać prace matematyczne Zmarłego. Tyle że jestem pewny, iż byłby On zadowolony, że właśnie Jego to spotkało.