Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLIV Szkole Matematyki Poglądowej *Do czego to się przydaje?*, Sulejów, styczeń 2010.

# Tensory

*Zdzisław POGODA, Kraków*

Może się to wydawać dziwne, ale nawet najbardziej abstrakcyjne pojęcia matematyczne powstawały zazwyczaj w wyniku potrzeb praktycznych. Dziwne, bo matematyka jawi się jako dziedzina abstrakcyjna, hermetyczna, odległa od rzeczywistości. Można zrozumieć, że na przykład liczby, funkcje i równania różniczkowe znalazły zastosowania, ale osobom niewtajemniczonym trudno pojąć, do czego mogą się przydać wymyślne konstrukcje i teorie. Na sam dźwięk takich terminów jak grupy homologii, reprezentacje Galois, czy rozmaitości kaehlerowskie cierpnie skóra – gdzie tu myśleć o zastosowaniach. A jednak nawet teorie zupełnie oderwane od rzeczywistości i – wydawałoby się – nie mające szans na zastosowanie, bardzo często to zastosowanie znajdują. W matematyce jest wiele pojęć, które zrobiły ogromną karierę i znalazły liczne zastosowania również poza królową nauk. Jednym z takich pojęć, które z jednej strony wydają się wysoce abstrakcyjne, a z drugiej znalazły rozmaite zastosowania, jest pojęcie tensora. Samo słowo brzmi już groźnie i sugeruje, że mamy do czynienia z matematyką naprawdę niedostępną dla przeciętnego zjadacza chleba. Czym są tensory, do czego się przydają? Trudno w krótkim tekście precyzyjnie opisać to pojęcie. Można jednak na przykładach podać pewne intuicje i spróbować pokazać, że rzeczywiście zastosowania są różnorodne i często zaskakujące.

Status tensora jest specyficzny: z jednej strony jest uogólnieniem wektora, a z drugiej jego szczególnym przypadkiem. Jak to możliwe, niebawem się przekonamy. Z zajęć fizyki pamiętamy być może, że wielkość wektorowa ma takie cechy jak kierunek, zwrot, wartość i, czasem, punkt przyłożenia, czym różni się od wielkości skalarnej charakteryzowanej tylko przez wartość. W układzie współrzędnych wektor opisany jest przez współrzędne (ich liczba jest równa wymiarowi przestrzeni), z których można odczytać wspomniane cechy „fizyczne".

Gdy zmieniamy układ współrzędnych, zmieniają się współrzędne wektora, ale nie zmienia się jego „natura" – jest on tylko inaczej opisany. W geometrii różniczkowej, a także w fizyce, układy współrzędnych odgrywają istotną rolę, bo pozwalają na wykonywanie różnego rodzaju rachunków i, co niezwykle ważne, wykorzystanie algebry i analizy matematycznej. Ogólnie układ współrzędnych jest to odwzorowanie, które punktom płaszczyzny albo przestrzeni, ale też powierzchni dwu lub więcej wymiarowej, przyporządkowuje odpowiednie układy liczb – współrzędne tychże punktów. Najczęściej wykorzystuje się kartezjański układ współrzędnych obrazowo przedstawiany za pomocą prostopadłych osi. Z kursu analizy wiadomo, że często wygodnie jest wprowadzać inne typy układu współrzędnych, na przykład współrzędne biegunowe na płaszczyźnie, sferyczne lub walcowe w przestrzeni oraz bardziej wymyślne w zależności od potrzeb.

Z algebry liniowej wiadomo, że jeśli wektor $\mathbf{v}$ ma współrzędne $v^1, v^2, \ldots, v^n$ w jednym układzie współrzędnych, a w innym $v'^1, v'^2, \ldots, v'^n$, to przejście od jednych do drugich wyraża się wzorem

$$v'^s = A^s_t v^t, \tag{1}$$

gdzie $A^s_t$ są współczynnikami macierzy przejścia. Zastosowana tu została, powszechnie używana konwencja sumacyjna Einsteina: jeśli te same wskaźniki w jakimś wzorze występują jako górne i dolne (w powyższym wzorze $t$), to znaczy, że sumujemy względem nich ($t = 1, \ldots, n$). Za pomocą takiego wzoru w klasycznym rachunku tensorowym definiuje się właśnie wektory, czyli w terminologii tensorowej tensory typu (1,0). Jeśli natomiast rozważymy zależność

$$\alpha'_t = B^s_t \alpha_s, \tag{2}$$

to mamy do czynienia z tensorem typu (0,1) albo inaczej kowektorem lub, używając języka algebry liniowej, formą liniową (funkcjonałem liniowym). Podkreślmy: opisane wzory są znane z kursu algebry liniowej, gdy wyliczamy współrzędne wektora (kowektora) przy przejściu od jednej bazy do innej. Można też napisać

$$f'^s_t = A^s_p B^r_t f^p_r, \tag{3}$$

lub bardziej ogólnie

$$w^{s_1 \ldots s_m}_{p_1 \ldots p_k} = A^{s_1}_{r_1} \ldots A^{s_m}_{r_m} B^{t_1}_{p_1} \ldots B^{t_k}_{p_k} w^{r_1 \ldots r_m}_{t_1 \ldots t_k}. \tag{4}$$

Otrzymujemy w ten sposób tensory odpowiednio typu (1,1), (2,0), (0,2) i $(m, k)$. Używając języka algebry liniowej i iloczynów tensorowych można te obiekty zdefiniować elegancko bez współrzędnych jako elementy pewnych przestrzeni wektorowych. Nie będziemy się jednak zagłębiać w algebrę tensorów. Czytelnika zainteresowanego tematem można odesłać do klasycznych podręczników [4] i [5] lub jakiegoś nowoczesnego wykładu (np. [1], [3]). Zauważmy jednak, że choć tensory opisywane są za pomocą współrzędnych, to interesują nas ich pewne cechy globalne (np. długość wektora). Zilustrujmy to na ważnym przykładzie. Dobrze znanym obiektem jest iloczyn skalarny. Parze wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ (na przykład w $\mathbb{R}^3$) przyporządkowana jest w określony sposób i jednoznacznie pewna liczba $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Może pamiętamy definicję pracy z fizyki. Przyporządkowanie to spełnia kilka naturalnych warunków takich jak dwuliniowość, dodatnia określoność. Z własności iloczynu skalarnego wynika, że jest on jednoznacznie opisany przez wartości na wektorach bazowych. Jeśli $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ oznacza bazę, to liczby $a_{ij} = \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ wyznaczają iloczyn skalarny. Weźmy teraz inną bazę $\mathbf{e'_1}, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Przejście od pierwszej bazy do drugiej opisane jest zależnościami $\mathbf{e}'_i = B^k_i \mathbf{e}_k$. Wtedy mamy nowe współczynniki

$$a'_{ij} = \phi(B^k_i \mathbf{e}_k, B^m_j \mathbf{e}_m) = B^k_i B^m_j \phi(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = B^k_i B^m_j a_{km}. \tag{5}$$

A to wygląda jak reguła transformacji tensora typu (0,2) ze wzorów (3). Nic dziwnego, bowiem iloczyn skalarny jest tensorem typu (0,2). Wartość iloczynu na wektorach nie zależy od wyboru bazy, lecz od samych wektorów. Podobnie, jeśli przypatrzymy się pierwszemu ze wzorów (3), to dojdziemy do wniosku, że każde odwzorowanie liniowe jest tensorem typu (1,1). Iloczyny skalarne i odwzorowania liniowe są wektorami w odpowiednich przestrzeniach. Takich przykładów w algebrze liniowej jest bardzo dużo. Można więc śmiało stwierdzić, że z tensorami stykamy się w matematyce niemal na co dzień, nawet nie zdając sobie z tego sprawy.

Powróćmy jeszcze na chwilę do układów współrzędnych. Zauważyliśmy, że układy współrzędnych można związać z powierzchniami (np. sferami lub torusami) i innymi wyżej wymiarowymi tworami. W ten sposób dochodzimy do jednego z najważniejszych pojęć współczesnej matematyki – pojęcia rozmaitości. W Zeszytach OKM pojawiały się one już nie raz (por. np. [6]). Przypomnijmy tylko, że lokalnie rozmaitość $n$ wymiarowa wygląda jak przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Dwuwymiarowa rozmaitość, czyli powierzchnia, lokalnie przypomina płaszczyznę (choćby powierzchnia Ziemi, z dużym przybliżeniem oczywiście), a trójwymiarowa – przestrzeń. Odwzorowania realizujące tę lokalną cechę, w pewnym otoczeniu każdego punktu nazywa się mapami. Są to lokalne układy współrzędnych. Dodatkowo zakłada się jeszcze, że przejście od jednej mapy do innej zachowuje się odpowiednio regularnie (najczęściej żąda się, by były to gładkie dyfeomorfizmy). Rozmaitości z jednej strony dają się badać metodami globalnymi (topologia algebraiczna itp.) i same mogą wyglądać bardzo dziwacznie jak choćby butelka Kleina, a z drugiej lokalnie przypominają dobrze znaną przestrzeń $\mathbb{R}^n$ lub jej część.

Badania powierzchni za pomocą współrzędnych rozpoczęto, gdy rozwinęła się analiza matematyczna. Jednym z pierwszych, którzy systematycznie studiowali powierzchnie był Leonhard Euler. Próbował on między innymi opisać stopień zakrzywienia powierzchni. Za datę powstania teorii powierzchni można uznać rok 1827, kiedy ukazała się piękna rozprawa Gaussa *Rozważania ogólne o krzywych powierzchniach.* Gauss wprowadził bardzo ważne pojęcia formy fundamentalnej i krzywizny powierzchni nazwanej krzywizną Gaussa. Forma fundamentalna jest odpowiednikiem iloczynu skalarnego dla powierzchni, czyli jest tensorem typu $(0, 2)$. Naturalnie w czasach Gaussa nie było jeszcze mowy o tensorach

Jego polski przekład można znaleźć np. w *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie*, 4 (I 1990).

i rozmaitościach. Ideę pojęcia rozmaitości zaproponował Bernhard Riemann w swoim wykładzie habilitacyjnym z 1854 roku. Rozszerzył pojęcie formy fundamentalnej na rozmaitości $n$ wymiarowe, co zostało nazwane później tensorem metrycznym. Uogólnił też pojecie krzywizny Gaussa wprowadzając obiekt, który dziś jest znany jako tensor Riemanna albo tensor krzywizny. Wykład habilitacyjny zawiera wiele rewolucyjnych idei, choć nie ma w nim prawie żadnych wzorów. Opublikowany został w 1868 roku dwa lata po śmierci autora. Dopiero wtedy świat matematyczny zapoznał się z niezwykłymi pomysłami Riemanna. Zaczęto je rozwijać i wykorzystywać do badania rozmaitości. W 1900 roku ukazała się obszerna praca dwóch włoskich matematyków Gregoria Ricci–Curbastra i Tulia Levi–Civity, w której rozwinięty został „rachunek różniczkowy absolutny" – tak nazywano wtedy rachunek tensorowy. Przy okazji warto zaznaczyć, że praca ta jeszcze w tym samym roku została przetłumaczona przez Samuela Dicksteina na język polski i opublikowana w Pracach Matematyczno–Fizycznych, mimo iż wśród polskich matematyków nie było nikogo, kto zajmowałby się tensorami. Zainteresowanie rachunkiem tensorowym wzrosło znacznie, gdy w 1915 roku Einstein ogłosił ogólną teorię względności i równania pola

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij} \tag{6}$$

Wiedzę na temat tensorów uzyskał od Marcela Grossmanna. Dzięki jego informacjom mógł ująć swoje fizyczne idee w piękną matematyczną formę. Prace Einsteina pokazały, że abstrakcyjna teoria matematyczna ma bardzo konkretne zastosowania. Fizycy natychmiast dostrzegli użyteczność rachunku tensorowego. Teoria względności nie była jedyną teorią, która wykorzystała tensory. Znakomicie przydały się one w teorii sprężystości (tensor naprężeń), a także równania Maxwella dzięki tensorom uzyskały nową, bardzo zgrabną postać. Obecnie wiele działów fizyki nie mogłoby istnieć bez rachunku tensorowego. Sztandarowym jednak przykładem zastosowania pozostaje nadal teoria względności. Pojęcie przestrzeni Riemanna, tensora krzywizny i jego odmian oraz wiele innych pojęć ściśle jest kojarzone z tą teorią.

W samej matematyce tensory na dobre zadomowiły się w geometrii różniczkowej. Dzięki nim zyskała potężne narzędzia pozwalające badać różne struktury na rozmaitościach. Co ciekawe, okazało się, że badanie struktury geometrycznej (tensora metrycznego) rozmaitości może dać wiele informacji o samej rozmaitości, a nawet przyczynić się do klasyfikacji rozmaitości z dokładnością do homeomorfizmu. Spróbujmy zobaczyć w czym rzecz.

Wspomniano wcześniej o formie fundamentalnej i tensorze metrycznym. Co kryje się pod tymi pojęciami? Jaki jest ich sugerowany związek z iloczynem skalarnym? Konstrukcje, choć formalne, bazują na konkretnych intuicjach nawiązujących do geometrii płaszczyzny. Najpierw naszkicujmy fundamentalne dla rozmaitości pojęcie przestrzeni stycznej. Jest to właśnie naturalne uogólnienie koncepcji płaszczyzny stycznej do powierzchni. Nieprecyzyjnie, ale obrazowo można powiedzieć, że przestrzeń styczna w punkcie $p$ do rozmaitości $M$ jest to zbiór wszystkich wektorów stycznych do krzywych przechodzących przez ten punkt. Oznacza się ją zazwyczaj $T_pM$. Przestrzeń styczną można interpretować jako zbiór prędkości (wektorów prędkości) punktów poruszających się po różnych trajektoriach na $M$ i przechodzących przez $p$. W $T_pM$ wprowadza się dość naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. Tak więc z każdym punktem rozmaitości związana jest przestrzeń wektorowa, co pozwala w naturalny sposób przenieść konstrukcje z algebry liniowej na rozmaitości. Rozważa się pola wektorowe, kowektorowe i ogólnie tensorowe dowolnego typu. Termin pole oznacza, że (przynajmniej lokalnie) punktom rozmaitości przypisane są obiekty danego typu na przykład wektory lub inne tensory i przyporządkowanie to spełnia warunki regularności. Jeśli teraz z każdą przestrzenią styczną $T_pM$ zwiążemy iloczyn skalarny $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, to dostaniemy właśnie tensor metryczny – wiemy już, że jest to tensor typu (0,2). Tak naprawdę jest to pole tensorowe, lecz w przypadku rozmaitości terminy tensor i pole tensorowe używane są wymiennie. Jak przystało na iloczyn skalarny tensor metryczny wyznaczony jest przez współczynniki tradycyjnie oznaczane $g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, gdzie $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ są wektorami bazowymi w przestrzeni stycznej. Tym razem współczynniki są funkcjami zmiennej $p$, lecz rzadko się to wyraźnie zaznacza odwołując się do domyślności czytelnika.

Rozmaitość z tensorem metrycznym to jest właśnie rozmaitość riemannowska, sam tensor metryczny bywa też nazywany tensorem Riemanna. Co daje nam ten obiekt? W każdej przestrzeni stycznej mamy odległość i wszystkie tego konsekwencje. Czy jednak na samej rozmaitości da się coś sensownego zrobić? Chociaż tensor metryczny na każdej przestrzeni stycznej zadaje inny iloczyn skalarny, to jednak ze względu na regularność pozwala na obliczanie długości krzywej na rozmaitości. Klasyczny wzór na długość dla krzywej $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ma postać

$$l_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt. \tag{7}$$

Na rozmaitości normę zastępuje tensor metryczny. Mając długość można zdefiniować odległość dwóch punktów jako infimum długości krzywych łączących te punkty. Jak jest odległość, to są też izometrie, czyli odwzorowania zachowujące odległości. Możemy wskazać krzywe pełniące rolę linii prostych, czyli realizujące najkrótszą drogę pomiędzy punktami. Trzeba tylko szybko dodać, punktami nie za bardzo odległymi, albo inaczej, dostatecznie bliskimi. Geodezyjne, bo tak nazywają się te linie, można scharakteryzować na wiele sposobów. Na przykład, jeśli geodezyjną przechodzącą przez punkt $p$ zrzutujemy „prostopadle" na przestrzeń styczną, to otrzymamy prostą (a mogłaby powstać inna krzywa). Cudzysłów oznacza, że prostopadłość jest związana z intuicją powierzchni dwuwymiarowej. W rzeczywistości dla rozmaitości riemannowskiej określa się odwzorowanie oznaczane exp. Najpierw wybieramy niewielkie otoczenie zera w przestrzeni $T_pM$. Z wektorem $\mathbf{v}$ z tego otoczenia związana jest jednoznacznie geodezyjna $\gamma$ o własnościach $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Następnie przyjmujemy $\exp(\mathbf{v}) = \gamma(1)$. Odwzorowanie exp przekształca otoczenie zera w przestrzeni stycznej na otoczenie punktu $p$ na rozmaitości.

Tensor metryczny odpowiada za zakrzywienie rozmaitości. Dla powierzchni prowadzi to do wspomnianej już krzywizny Gaussa. W wyższych wymiarach wykorzystujemy tensory krzywizny. Istnieje wiele sposobów ich konstrukcji. Postępujemy na przykład tak (por. [2]). Wybieramy punkt $p \in T_pM$ i rozważamy dwuwymiarową powierzchnię $\xi \subset T_pM$ oraz bazę ortonormalną $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dla $\xi$. Definiujemy krzywe

$$c_r(\theta) = \exp(r\cos(\theta)\mathbf{u} + r\sin(\theta)\mathbf{v}). \tag{8}$$

Są to rzuty okręgów wokół zera w przestrzeni stycznej na rozmaitość. Dowodzi się, że długość tak powstałej krzywej można zapisać

$$l(c_r) = 2\pi r\left(1 - \frac{K(p,\xi)}{6}r^2 + O(r^3)\right). \tag{9}$$

Liczbę $K(p, \xi)$ nazywamy krzywizną sekcyjną rozmaitości w punkcie $p$ albo krzywizną w dwukierunku $\xi$. Gdy $M$ jest powierzchnią, to krzywizna sekcyjna staje się po prostu krzywizną Gaussa. Zamiast $K(p, \xi)$ piszemy też $K(p, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ lub „tradycyjnie" $K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bez punktu $p$. Wykorzystując krzywiznę sekcyjną przeprowadzamy dalsze konstrukcje – krzywiznę skalarną

$$R = \sum_{i,j} K(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \tag{10}$$

dla bazy ortonormalnej $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ w przestrzeni stycznej.

Stąd już jest blisko do tensora krzywizny Ricciego. Najpierw definiujemy

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_i K(\mathbf{e}_i, \mathbf{u}). \tag{11}$$

Następnie stosujemy standardowe sztuczki linearyzacji i symetryzacji

$$\mathrm{Ric}(a\mathbf{u}, a\mathbf{u}) = a^2 \mathrm{Ric}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \tag{12}$$

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}(\mathrm{Ric}(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathrm{Ric}(\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v})). \tag{13}$$

Przy okazji wyjaśniliśmy sens symboli występujących w równaniach Einsteina (6): $R_{ij}$ są współczynnikami tensora Ricciego, $R$ jest krzywizną skalarną, natomiast $T_{ij}$ ma znaczenie fizyczne, jest to tensor energii–pędu.

Przy tak skrótowym opisie trudno wyrobić sobie geometryczne intuicje wprowadzonych pojęć. W prostych przypadkach da się coś jednak zauważyć. Na przykład dla rozmaitości $S^2 \times \mathbb{R}$ krzywizna sekcyjna $K(p,\xi) = 1$, gdy $\xi$ jest styczna do $S^2$ oraz $K(p,\xi) = 0$, gdy $\xi$ zawiera styczną do $\mathbb{R}$.

Czytelnik niewtajemniczony w tematykę zastanawia się, po co to wszystko? Na ogół bez solidnego przygotowania trudno odpowiedzieć na to pytanie. Należałoby głębiej wejść w geometrię przestrzeni Riemanna.

Stosunkowo niedawno tensor Ricciego znalazł się w centrum zainteresowań nie tylko specjalistów z geometrii różniczkowej i fizyków. Pewne pomysły związane z tensorem Ricciego dały nadzieję topologom na rozwiązanie trudnych problemów, z którymi zmagali się od wielu lat – w szczególności hipotezy Poincarégo.

Rozmaitości $S^2 \times \mathbb{R}$,$S^3, \mathbb{R}^3$ łączą pewne cechy topologiczne: wszystkie przestrzenie są jednospójne, co oznacza, że każda pętla w tych rozmaitościach jest ściągalna do punktu. Udowodniono, że z dokładnością do dyfeomorfizmu są to jedyne jednospójne rozmaitości trójwymiarowe z nieujemną krzywizną sekcyjną. Zauważmy, że wśród nich tylko $S^3$ jest zwarta. Taki rezultat daje nadzieję na nową charakteryzację sfery trójwymiarowej. W ten sposób zbliżamy się do hipotezy Poincarégo. Przypomnijmy jej sformułowanie:

*Trójwymiarowa rozmaitość zwarta, spójna i jednospójna jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową.*

Hipoteza opierała się intensywnym atakom matematyków, chociaż udało się rozstrzygnąć jej niemal wszystkie uogólnienia. Wymyślne metody topologiczne zawodziły. Nowa sytuacja powstała, gdy przeformułowano hipotezę na język geometryczny z wykorzystaniem struktur riemannowskich i tensorów krzywizny.

Opisaliśmy już niemal wszystkie pojęcia pozwalające na nowe sformułowanie problemu. Potrzebny jest jeszcze jeden termin – metryka Einsteina. Jest to po prostu metryka o stałej krzywiźnie Ricciego, a dokładniej dla metryk Einsteina prawdziwa jest zależność $\mathrm{Ric}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ag(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Liczba $a$ jest tą stałą krzywizną. Metryki Einsteina są elementami szczególnymi w rodzinie metryk Riemanna. Znawcy ogólnej teorii względności wiedzą, że są punktami krytycznymi dla funkcjonału określonego na przestrzeni metryk Riemanna na danej rozmaitości, nazywanego działaniem Einsteina–Hilberta.

Wykorzystując wyróżnione cechy metryki Einsteina udało się pokazać, że

*Jeśli $(M,g)$ jest trójwymiarową rozmaitością zwartą, spójną i jednospójną z metryką Einsteina, to jest izometryczna ze sferą trójwymiarową.*

Dzięki temu hipoteza Poincarégo przyjmuje nową dość niezwykłą postać

*Każda zamknięta (czyli zwarta i spójna) trójwymiarowa rozmaitość jednospójna ma metrykę Einsteina.*

Wydaje się, że jest to komplikowanie sytuacji. A jednak! Inne spojrzenie okazało się bardzo owocne. Najpierw William Thurston pod koniec lat siedemdziesiątych XX wieku postawił hipotezę o rozkładzie trójwymiarowej rozmaitości na kanoniczne geometryczne kawałki – jest to hipoteza geometryzacyjna Thurstona. A w latach osiemdziesiątych powstał program, którego realizacja doprowadziłaby nie tylko do dowodu hipotezy Poincarégo, lecz także do pełnego rozstrzygnięcia hipotezy geometryzacyjnej, co w rezultacie dałoby klasyfikację rozmaitości trójwymiarowych. Autorem programu nowego ataku na hipotezę Poincarégo z wykorzystaniem tensora Ricciego jest Richard Hamilton, który zaproponował badanie potoków (albo przepływów) Ricciego. Polega to na zastosowaniu do jednoparametrowej rodziny metryk riemannowskich równania postaci

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(t), \quad g(0) = g_0.$$

Sam Hamilton uzyskał kilka ciekawych rezultatów dowodząc na przykład, że jeśli rozmaitość trójwymiarowa ma metrykę z dodatnią krzywizną Ricciego (czyli $\mathrm{Ric}(U, U) > 0$, dla $U \in \mathrm{T}_p M$), to dopuszcza metrykę Einsteina. Głównie dzięki pracom Grigorija Jakowlewicza Perelmana program został zrealizowany: udowodniono klasyczną hipotezę Poincarégo i hipotezę geometryzacyjną. Klasyfikacja rozmaitości trójwymiarowych stała się faktem. Wykorzystanie tensorów pozwoliło na rozwiązanie problemów, które, wydawałoby się, są z zupełnie innej bajki. Takich przykładów jest znacznie więcej...

**Literatura**


[1] Bishop, R. L.; Goldberg S. I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover 1980.
[2] Gadgil S.; Seshardi, *Ricci flow and Perelman's proof of the Poincaré conjecture*, Current Science v. 91 no 10 Nov. 2006, pp. 1326–1334.
[3] Gancarzewicz J., *Geometria różniczkowa*, PWN Warszawa 1986.
[4] Gołąb St, *Rachunek tensorowy*, PWN Warszawa 1966.
[5] Karaśkiewicz E., *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN Warszawa 1976.
[6] Pogoda Z., *Problemy z 3-rozmaitościami*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 40 (I 2008).